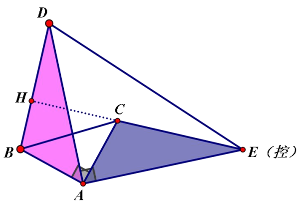
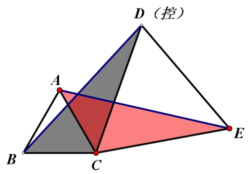
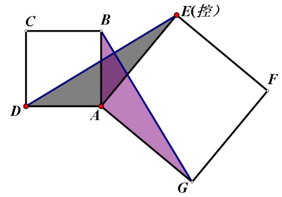
手拉手模型及应用

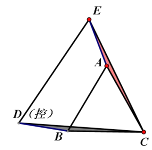
【知识导航】

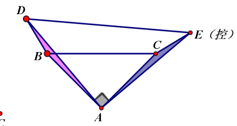
手拉手模型的特点：两个**顶角度数相等**的等腰三角形**共用**一个顶角顶点，并连结对应的底角顶点。









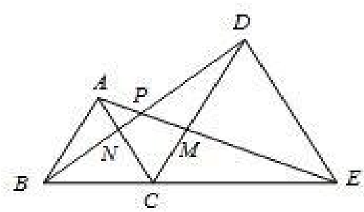
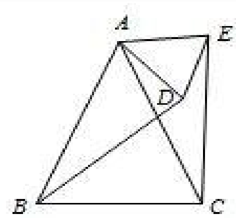
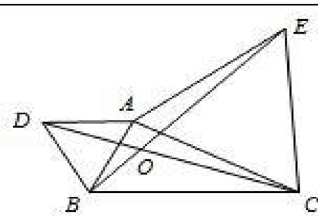
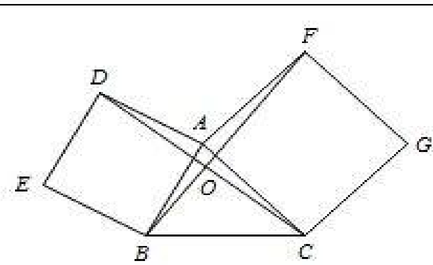


基本结论：**角生角**，60° →60° ；90° →90°

角平分，第三边所在直线的夹角或其邻补角，被它们交点和公共顶点的连线平分。

基本方法：手拉手，导角找“8”字

手拉手起源于“A”字，本质：**旋转全等**

模型	已知	如图	结论
三角形手拉手	等边三角形 ABC 与等边三角形 CDE，点 B、C、E 三点共线，连接 AE，BD 相交于点 P，AE 与 CD 相交于点 M，BD 与 AC 相交于点 N		①$\triangle BCD\cong\triangle ACE$ ②$BD=AE$ ③ $\angle APB=60^\circ$ ④CP 平分$\angle BPE$ ⑤$\triangle CMN$ 为等边三角形 ⑥$PB=PA+PC$ ⑦$PE=PD+PC$
	等腰三角形 ABC 与等腰三角形 ADE，且 $\angle BAC=\angle DAE$，连接 BD，CE		①$\triangle ABD\cong\triangle ACE$ ②$BD=CE$ ③BD 与 CE 的夹角等于$\angle BAC$ 或和$\angle BAC$ 互补
	$\triangle ABC$ 中，以 AB 为边作等边三角形 ADB，以 AC 为边作等边三角形 ACE，连接 DC、BE，相交于点 O		①$\triangle ADC\cong\triangle ABE$ ②$DC=BE$ ③ $\angle DOB=60^\circ$
正方形手拉手	$\triangle ABC$ 中，以 AB 为边作正方形 $ABED$，以 AC 为边作正方形 $ACGF$，连接 DC、BF，相交于点 O		①$\triangle ADC\cong\triangle ABF$ ②$CD=BF$ ③ $\angle DOB=90^\circ$

武汉 TOP 学案网 **原创文档，版权所有！** 网址：www.whedu.top 电话：132 9410 5612

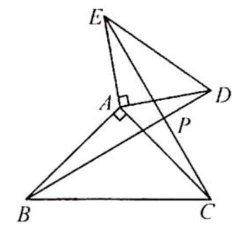
【典例讲练】

【例 1】 如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 均为等腰直角三角形，$\angle BAC=\angle DAE=90^\circ$，连接 BD，CE 交于点 P.

(1)求证：$\triangle ABD\cong\triangle ACE$；

(2)判断 BD，CE 的关系并证明；

(3)连接 PA，求 $\angle APB$ 的度数.



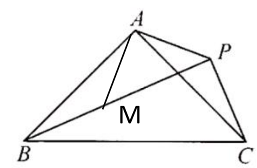
(1)$\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 均为等腰直角三角形，$\angle BAC=\angle DAE=90^\circ$，$\therefore AB=AC$，$AD=AE$，$\angle BAD=\angle CAE$，$\therefore\triangle ABD\cong\triangle ACE$(SAS)；

(2)$BD=CE$ 且 $BD\perp CE$. 证明：$\because\triangle ABD\cong\triangle ACE$，$\therefore BD=CE$，$\angle ABD=\angle ACE$，$\therefore\angle BPC=\angle BAC=90^\circ$，$\therefore BD\perp CE$.

(3)过点 A 分别作 BD，CE 的垂线，垂足分别为 M，N，由面积法(或全等)可得点 A 到 BD，CE 的距离相等，$\therefore AP$ 平分 $\angle BPE$，又 $\angle BPE=90^\circ$，$\therefore\angle APB=45^\circ$.

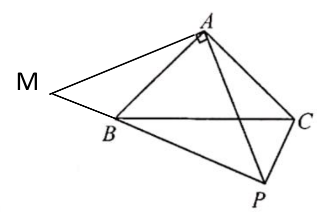
【例 2】 如图，等腰 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，P 为 $\triangle ABC$ 外一点，$\angle APB=45^\circ$，连接 PC. 求 $\angle APC$ 的度数.

证明△ABM 和△ACP 全等，8 字导角，可证∠BPC=90°，答案 135°



1. 在例 2 的条件下，将点 P 移至 BC 的下方，$\angle APB=45^\circ$不变，求 $\angle APC$ 的度数.

证明△ABM 和△ACP 全等，答案 45°



(2)如图 2，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle ADB=\angle BAC=60°$，求$\angle ADC$ 的度数；

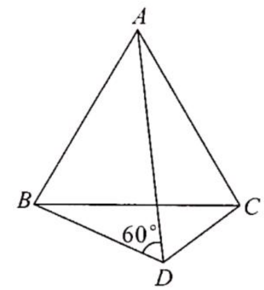


图 2

(3)如图 3，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle BAC=120°$，$\angle ADB=30°$，求$\angle ADC$ 的度数；

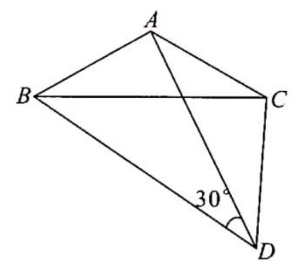


图 3

(4)如图 4，在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle ADB=\angle ABC=\angle ACB$，求证：$AD$ 平分$\angle BDC$.

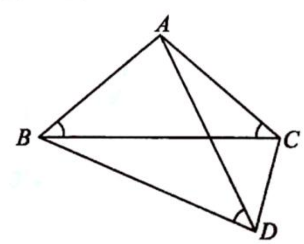
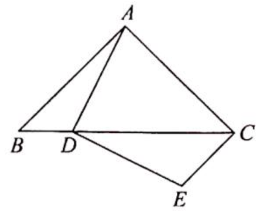


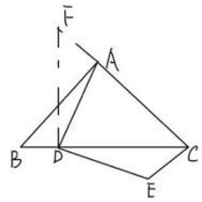
图 4

1. 如图，△ABC 中，$AB=AC$，D 为 BC 上一点，$AD=DE$，$\angle ADE=\angle BAC=\alpha$.

(1)如图 1，若 $\alpha=90°$，求 $\angle DCE$ 的度数；



(1)



∠DCE=45°

过D作DF⊥BC交CA的延长线于点F

∵AB=AC，∠BAC=90°，∴∠B=∠ACB=45°

∴∠F=90°-45°=45°=∠ACB

∴DF=DC

∵FD⊥BC ∴∠FDA+∠ADC=90°

又∵∠ADE=90°，∴∠ADC+∠CDE=90°

∴∠FDA=∠CDE

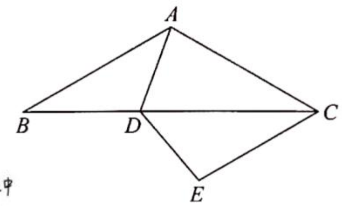
在△ADF与△EDC中

$\begin{cases} DF=DC \\ \angle FDA=\angle CDE \\ AD=ED \end{cases}$

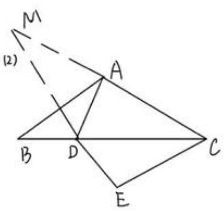
∴△ADF≌△EDC(SAS)

∴∠DCE=∠F=45°

(2)如图 2，若 $\alpha=120°$，求 $\angle DCE$ 的度数；



(2)



作∠CDM=120°交CA的延长线与点M

∵∠BAC=120°，AB=AC，∴∠B=∠ACB=30°

又∵∠CDM=120°，∴∠M=30°=∠ACB

∴DM=DC

∵∠MDC=∠MDA+∠ADC，∠ADE=∠ADC+∠CDE，且∠MDC=∠ADE=120°

∴∠MDA=∠CDE

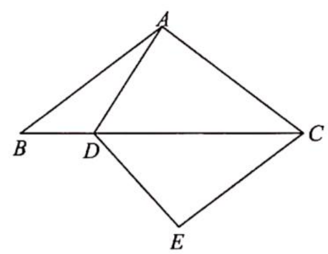
在△MDA与△CDE中

$\begin{cases} MD=CD \\ \angle MDA=\angle CDE \\ AD=ED \end{cases}$

∴△MDA≌△CDE(SAS)

∴∠DCE=∠M=30°

(3)如图 3，点 E 在直线 BC 的下方，$\angle DCE$ 与 $\angle ACB$ 是否存在某种确定的数量关系？试说明理由.



【解析】在 CA 的延长线上取 F，使 DF=DC，构造双等腰△ADE 和△FDC 手拉手，即△FDA≌△CDE(SAS)，故∠DCE=∠F=∠ACB

2. 如图，在平面直角坐标系中，点 $A(-2,0)$，$B(0,-2\sqrt{3})$，$\angle ABO=30°$，$R(-6,0)$，点 P 为线段 BR 上一动点，以 AP 为边作等腰△APQ，$PA=PQ$，且 $\angle APQ=\angle RAB$，连接 AQ，当点 P 运动时，△ABQ 的面积是否变化？若不变，求其值；若变化，求其变化范围.

解析

解：△ABQ面积不变，$S_{\triangle ABQ}=4\sqrt{3}$

过程如下：

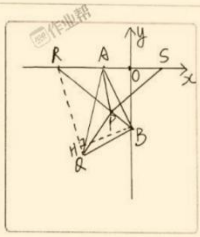
在x轴上取点S，使PS=PR，

连接RQ，过点B作BH⊥RQ，

垂足为H

∵∠ABO=30°，

∴AB=2OA=4=AR



(直角三角形中，30°角所对的边是斜边的一半)

∴∠ARB=∠ABR=$\frac{1}{2}$∠BAO=30°

∴∠APQ=∠RAB=120°=∠RPS ∴∠QPR=∠APS

∴△PQR≌△PAS(SAS) (三角形全等的证明方法：边角边)

∴∠PRQ=∠PSR=∠ABR=30°

∴RQ∥AB

易知BH=OB=$2\sqrt{3}$，AB=4.

∴$S_{\triangle ABQ}=\frac{1}{2}AB\cdot BH=\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$