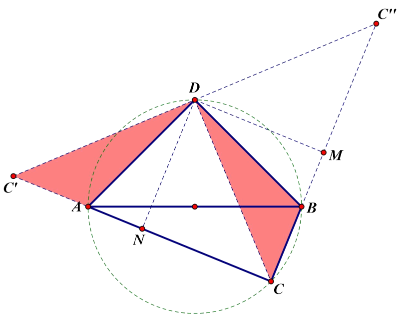
对角互补模型及应用

【知识导航】

一、对角互补（双直角）

1、双直角异侧型



基本结论：

CB+CA=2DN=2DM=$\sqrt{2}$CD

CA-CB=2AN=2BM

边相等→角平分

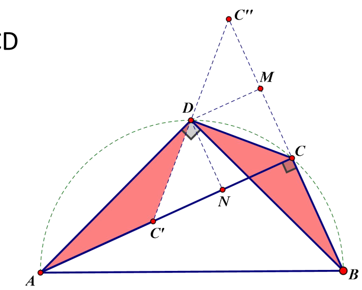
角平分→边相等

基本方法：

辅助线 1：作双垂线

辅助线 2：旋转

2、双直角同侧型



基本结论：

AC-BC=2CN=2CM=$\sqrt{2}$CD

AC+BC=2AN=2BM

边相等→角平分

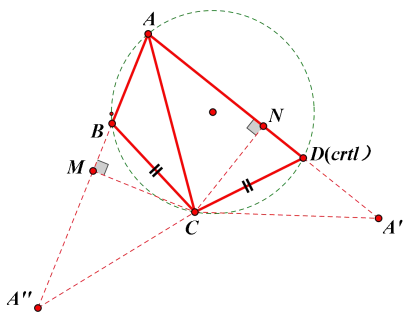
角平分→边相等

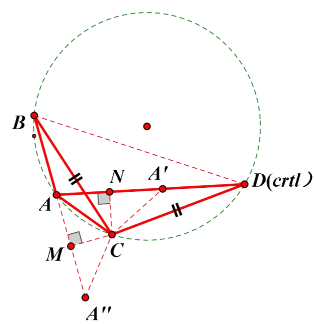
基本方法：

辅助线 1：作双垂线

辅助线 2：旋转

二、对角互补（任意角）





左图 基本结论：

AB+AD=2AM=2AN

AD-AB=2DN=2BM

边相等→角平分

角平分→边相等

基本方法：

辅助线 1：作双垂线

辅助线 2：旋转

以上模型，八年级学生，可以忽略“圆”的存在，九年级学生，可以从“四点共圆”的角度解读此模型。

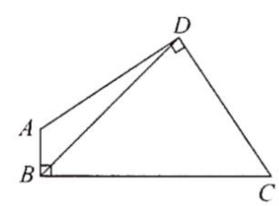
【典例讲练】

例题 1、如图，在四边形 ABCD 中，∠ABC=∠ADC=90°，BD 平分∠ABC.

求证：（1）AD=CD；

（2）AB + BC = $\sqrt{2}$ BD；

（3）$S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}BD^2$



(1)方法一：过点 D 作 $DE\perp BD$ 交 BC 延长线于点 E（或过点 D 作 $DE\perp BD$ 交 BA 延长线于点 E），可得等腰 Rt$\triangle BDE$，$BD=DE$，$\triangle ADB\cong\triangle CDE$（ASA 或 AAS），$\therefore AD=CD$；

方法二：在射线 BC 上取点 D，使 $DE=BD$，得$\triangle ADB\cong\triangle CDE$(AAS)；

方法三：过点 D 分别作 AB，BC 的垂线，垂足分别为点 E，F，证$\triangle ADE\cong CDF$(AAS)；

(2)$AB+BC=BE=\sqrt{2}BD$；

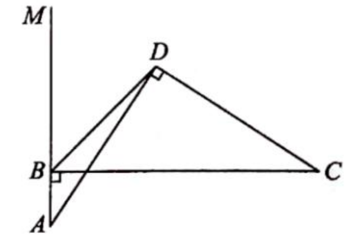
(3)$S_{四边形ABCD}=S_{\triangle BDE}=\frac{1}{2}BD^2$.

例题 2、如图，∠ABC=∠ADC=90°，BD 是∠ABC 的邻补角∠MBC 的平分线.

求证：（1）AD=CD；

（2）$\mathrm{BC}-\mathrm{AB}=\sqrt{2}\,\mathrm{BD}$；

（3）$S_{\triangle BDC}-S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}BD^2$



(1) 过点 D 作 ED⊥BD 交 BC 于 E

可以得到等腰直角三角形 BDE

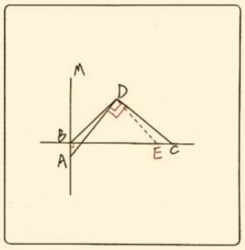
∴ BD=DE

∵ ∠BDE=∠BDA+∠ADE=90°

∠ADC=∠CDE+∠ADE=90°

∴ ∠BDA=∠CDE

在△ABD 和△CED 中



∠ABD=∠CED=135° （∠ABD=90°+45°=135° ∠CED=180°-45°=135°）

BD=DE ∠BDA=∠CDE ∴ △ABD≌△CED (ASA) ∴ AD=CD

(2) 由(1)知 △ABD≌△CED ∴ AB=CE

∴ $BC-AB=BC-CE=BE=\sqrt{2}BD$ （△BDE 是等腰 Rt△）

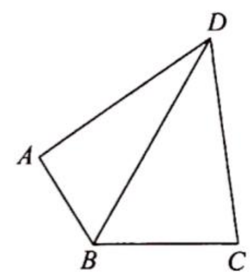
(3) 由(1)知 △ABD≌△CED ∴ $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle CED}$

∴ $S_{\triangle ABC}-S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle CED}=S_{\triangle BDE}$

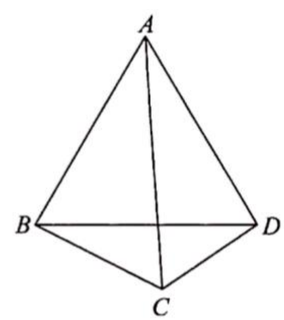
$S_{\triangle BDE}=\frac{1}{2}\times BD\times DE=\frac{1}{2}BD^2$ （△BDE 是等腰直角三角形）

【同类变式】

1、如图，在四边形 ABCD 中，∠ABC=2∠ADC=120°，BD 平分∠ABC. 求证：（1）AD=CD；（2）AB+BC=BD.



2、如图，在四边形 ABCD 中，∠ABC+∠ADC=180°，BD 平分∠ABC. 求证：AD=CD.



3、如图，在△ABC 中，∠ABC=∠ACB，点 D，E 分别是 BC，AC 上的点，AD，BE 相交于点 P，∠EBC=∠BAD.

（1）求证：∠DPE+∠C=180°；

（2）作 AF∥BC 交 DE 的延长线于点 F，若 PE=CE，求证：∠ADF=∠F.

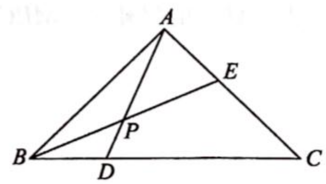


图1

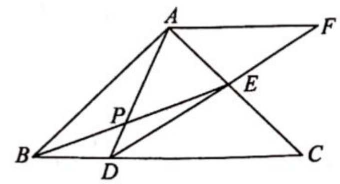


图2

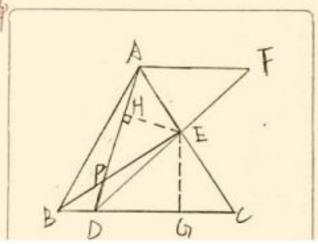
(1) ∵∠APE=∠ABP+∠BAP（三角形外角等于跟它不相邻的两个内角和）

∠ABC=∠ABP+∠PBD

又∵∠PBD=∠EBC=∠BAD

∴∠APE=∠ABC

∵∠ABC=∠ACB ∴∠APE=∠ACB



又∵∠APE+∠DPE=180° ∴∠DPE+∠C=180°

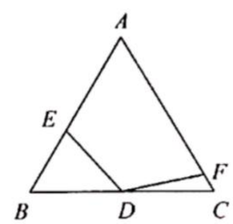
(2) 如图作 EG⊥DC 于 G，EH⊥AD 于 H，则

∵∠EPH=∠C ∠EHP=∠EGC=90° EP=EC ∴△EHP≌△EGC（AAS）

∴EH=EG，又 EG⊥DC，EH⊥AD ∴∠ADF=∠CDF

∵AF∥BC ∴∠F=∠CDF ∴∠ADF=∠F

4、如图，等边△ABC 的边长为 1，D 是 BC 的中点，点 E，F 分别位于 AB，AC 边上，且∠EDF=120°，那么 AE+AF 的长是否为定值？如果是，求出该值；如果不是，请说明理由.



【解析】过 D 作 AB、AC 的垂线段，定值 $\frac{3}{2}$

【课后作业】

1. 如图 1，正方形 $ABCD$ 和 $OPQR$ 的边长都为 2，如果点 O 正好是正方形 $ABCD$ 的中心，而正方形 $OPQR$ 可以绕着点 O 旋转，那么它们重叠部分的面积为(　　)

A. 4　　B. 2　　C. 1　　D. $\frac{1}{2}$

2. 如图 2，在四边形 $ABCD$ 中，$AD=DC$，$\angle ADC=\angle ABC=90°$，$DE\perp AB$ 于点 E，若四边形 $ABCD$ 的面积为 8，则 DE 的长为(　　)

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 3　　D. $3\sqrt{2}$

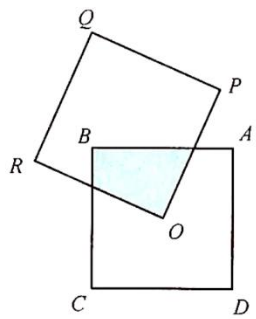


图 1

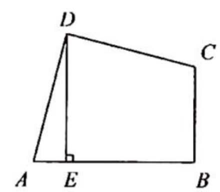


图 2

3. 如图 3，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle D=\angle B=90°$，$DC=AD$，若这个四边形的面积为 12，则 $BC+AB$ =__________.

4. 如图 4，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle BAC=90°$，直角 $\angle EPF$ 的顶点 P 是 BC 的中点，两边 PE，PF 分别交 AB，AC 于点 E，F，若 $FC=3$，$BE=4$，则 $\triangle EFP$ 的面积为__________.

5. 如图 5，四边形 $ABCD$ 被对角线 BD 分为等腰 Rt$\triangle ABD$ 和 Rt$\triangle CBD$，其中 $\angle BAD$ 和 $\angle BCD$ 都是直角，另一条对角线 AC 的长度为 2，则四边形 $ABCD$ 的面积为__________.

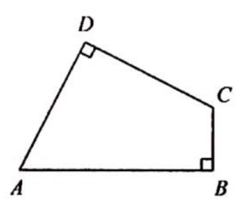


图 3

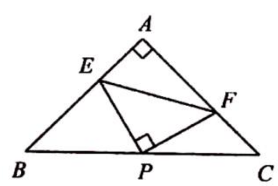


图 4

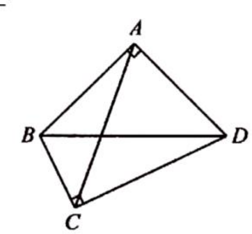


图 5

【解析】1、C　　2、B　　3、$4\sqrt{3}$　　4、$\frac{25}{4}$　　5、2