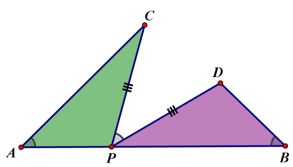
一线三等角模型及应用

【知识导航】

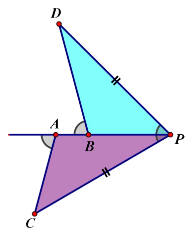
“一线三等角”在初中几何中出现得比较多，是一种常见的全等或相似模型，指的是有三个等角的顶点在同一条直线上构成全等或相似图形.这三个等角可以是直角也可以是锐角或钝角，可以是在直线的同侧，也可以是在直线的异侧.

一、“一线三等角”的基本构图：

一线三等角（同侧型）



一线三等角（异侧型）



基本结论：△APC≌△BDP

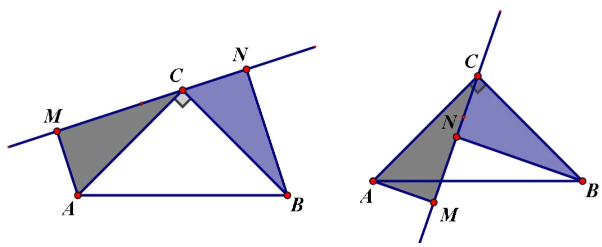
基本方法：

导角 1，“一线”，平角 180°

导角 2，“内角和”或推论

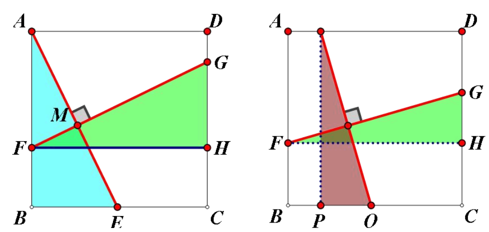
判定定理：AAS 或 ASA

二、“一线三等角”——“三垂直”+“十字架”



基本结论：△ACM≌△CBN

MN=AM+BN（左）; MN=BN-AM（右）



△ABE≌△FHG

基本方法：作“横平竖直”辅助线，构造全等

【典例讲练】

例题 1、如图，在 Rt△ABC 中，∠ACB=90°，AC=BC，E 为 BC 上一点，连接 AE，作 AF⊥AE 且 AF=AE，BF 交 AC 于点 D.

（1）如图 1，求证：点 D 为 BF 中点；

（2）如图 1，求证：BE=2CD；

（3）如图 2，若 $\frac{BE}{CE}=\frac{2}{3}$，则 $\frac{AD}{CD}=$__________.

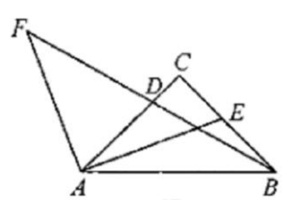


图1

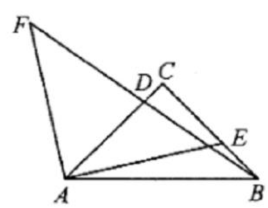


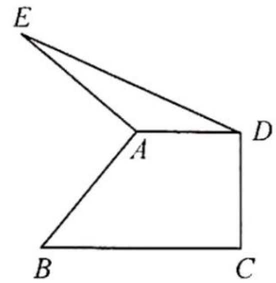
图2

(1)过点 F 作 $FH\perp AC$ 于点 H，则易得 $\triangle AFH\cong\triangle EAC$(AAS)，∴ $FH=AC=BC$，∴ $\triangle BCD\cong\triangle FHD$(AAS)，∴ $BD=DF$，即点 D 为 BF 中点.

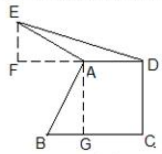
(2)由(1)得 $\triangle AFH\cong\triangle EAC$，∴ $AH=CE$，∴ $AC-AH=BC-CE$，∴ $BE=CH$，又 $\triangle BCD\cong\triangle FHD$，∴ $DH=CD$，∴ $BE=CH=2CD$.

(3)由(2)知 $BE=2CD$，设 $CD=x$，则 $BE=2x$，$CE=3x$，则 $AC=BC=2x+3x=5x$，∴ $AD=4x$，∴ $\frac{AD}{CD}=4$.

例题 2、如图，在四边形 ABCD 中，∠ADC=∠C=90°，BC=7，AD=4，过点 A 作 AE⊥AB，垂足为 A，且 AE=AB，连接 DE.求△ADE 的面积。



如图所示，过点E作$EF\perp AD$，交DA的延长线于点F,过点A作$AG\perp BC$于点G，



$\therefore \angle F=\angle AGB=\angle AGC=90^\circ$
$\because \angle ADC=\angle C=90^\circ$
$\therefore \angle DAG=360^\circ-90^\circ-90^\circ-90^\circ=90^\circ$
$\therefore$四边形$ADCG$为矩形，$\angle FAG=90^\circ$
$\therefore AD=GC$
$\because AD=4$
$\therefore GC=4$
$\because BC=7$
$\therefore BG=BC-CG=7-4=3$
$\because AE\perp AB$
$\therefore \angle EAB=90^\circ$
$\therefore \angle EAF=90^\circ-\angle BAF=\angle FAG-\angle BAF=\angle BAG$
又$\because AE=AB$
$\therefore \triangle AEF\cong\triangle ABG$
$\therefore EF=BG=3$
$\therefore S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}AD\times EF=\frac{1}{2}\times4\times3=6$
故$\triangle ADE$的面积为6.

例题 3、（1）如图 1，△ABC 为等腰直角三角形，AC=BC，AC⊥BC，A（0，3），C（1，0），求点 B 的坐标。
（2）如图 2，△ABC 为等腰直角三角形，AC=BC，AC⊥BC，A（-1，0），C（1，3），求点 B 的坐标。
（3）如图 3，△ABC 为等腰直角三角形，AC=AB，AC⊥AB，B（2，2），C（4，-2），求点 A 的坐标.

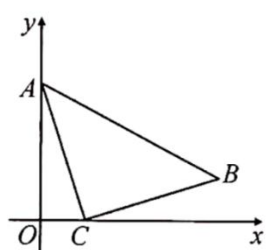


图1

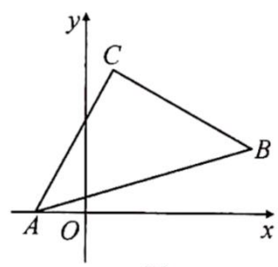


图2

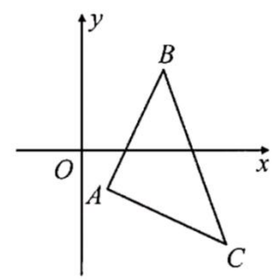
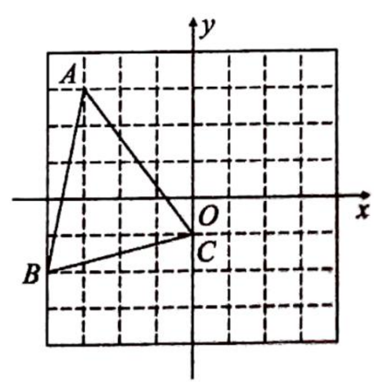


图3

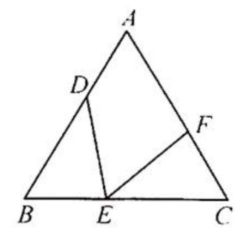
【解析】（4，1）　（4，1）　（1，-1）

例题 4、如图，在带有平面直角坐标系的网格中，△ABC 的顶点都在边长为 1 的小正方形的顶点上.请用无刻度的直尺，运用全等的知识作出△ABC 的高线 BF（保留作图痕迹并说明理由）.

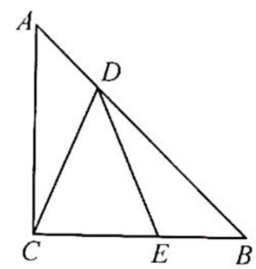


【随堂训练】

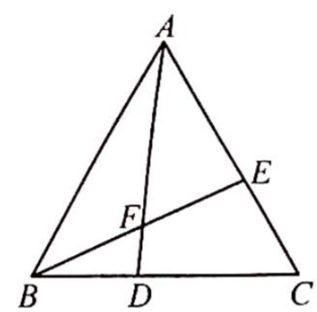
1、如图，△ABC 为等边三角形，D，E，F 分别 AB，BC，AC 上的点，∠DEF=60°，BD=CE. 求证：BE=CF.



2、如图，在等腰 Rt△ABC 中，∠ACB=90°，点 D，E 分别为 AB，BC 上的点，且 CD=DE，∠CDE=45°，求证：BD=BC.

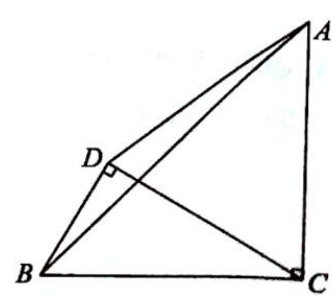


3、如图，△ABC 为等边三角形，D，E 分别是 BC，AC 上的点，BE，AD 交于点 F，∠AFE=60°，求证：AD=BE.



4、如图，△ABC 为等腰直角三角形，∠ACB=90°，CD=4，∠BDC=90°，求△ADC 的面积.

【解析】过 A 作 CD 的垂线段，构造三垂直，答案：8



【课后作业】

1.如图 1，直线$l_1 // l_2 // l_3 // l_4$，相邻两条平行线间的距离都是 1，如果正方形 ABCD 的四个顶点分别在四条直线上，则这个正方形的边长为___________.

2.如图 2，点 A，B，C，D，E 都在同一条直线上，四边形 X，Y，Z 都是正方形，若该图形总面积为 m，正方形 Y 的面积是 n，则图中阴影部分的面积是___________.

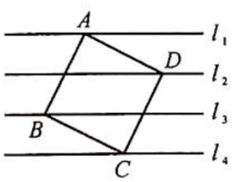


图 1

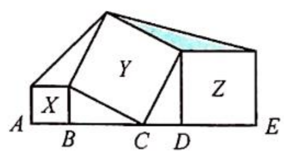


图 2

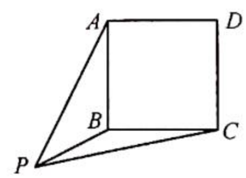


图 3

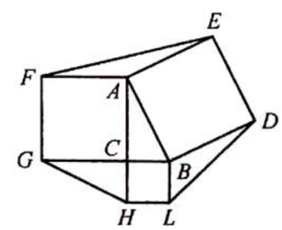


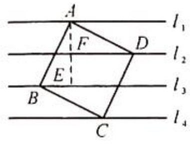
图 4

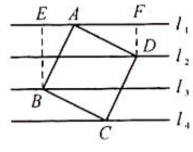
3.如图 3，P 是正方形 ABCD 外一点，PB=10cm，△APB 的面积是 60cm²，△CPB 的面积是 30cm²，则正方形 ABCD 的面积是___________.

4.如图 4，在 Rt△ABC 中，∠ACB=90°，BC=a，AC=b，以其各边为边向外作正方形，得到一个六边形 DEFGHL，求这个六边形的面积.

1. $\sqrt{5}$.

【提示】 如图，构造内弦图或外弦图均可，得△AEB≌△DFA.



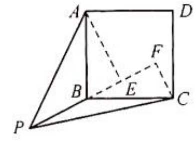


2. $\frac{m-2n}{4}$.

【提示】 由例 1 的解答可得图中的四个三角形的面积是相等的，由勾股定理可得 $S_X+S_Z=S_Y=n$.

3. 180cm².

【提示】 如图，过点 A，C 作直线 PB 的垂线，垂足分别为点 E，F，从而 BF=AE=12cm，BE=CF=6cm，即可求正方形的面积.



4. $2a^2+2b^2+2ab$.

【提示】 由例 1 的解答可得 $S_{\triangle AEF}=S_{\triangle BDL}=S_{\triangle CGH}=S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab$.