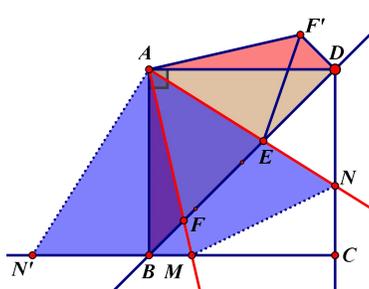




## 夹半角模型及应用

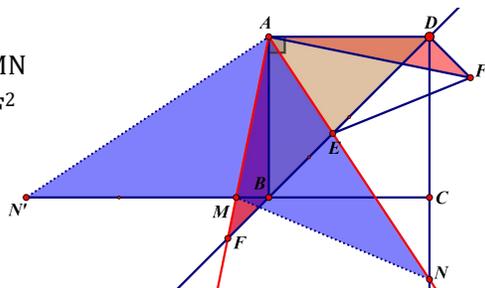
### 【知识导航】

#### 1、90° 半角模型内半角



基本结论：  
 $BM + DN = MN$   
 $BF^2 + DE^2 = EF^2$

#### 2、90° 半角模型外半角

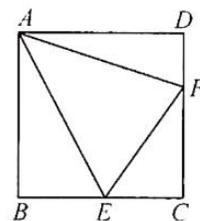


基本结论：  
 $DN - BM = MN$   
 $BF^2 + DE^2 = EF^2$

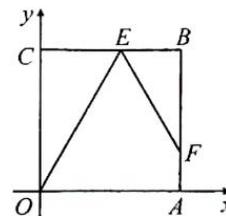
### 【典例讲练】

**【例 1】** 正方形  $ABCD$  中,  $E, F$  分别是  $BC, CD$  上的点,  $\angle EAF = 45^\circ$ . 求证:

- (1)  $EF = BE + DF$ ;
- (2)  $AE$  平分  $\angle BEF$ ,  $AF$  平分  $\angle DFE$ .



**【例 2】** 如图,  $B(4,4)$ ,  $BC \perp y$  轴于点  $C$ ,  $BA \perp x$  轴于点  $A$ ,  $E$  为  $BC$  上一动点(不与  $B, C$  重合),  $F$  为  $AB$  上一动点, 且满足  $\angle OFE = \angle AOE$ , 在运动过程中,  $\triangle BEF$  的周长变吗? 若不变求其值; 若变化求其变化范围.

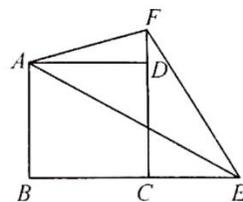




1. 在例 1 的条件下,若点  $E$  在  $BC$  的延长线上,点  $F$  在  $CD$  的延长线上,其余条件不变.

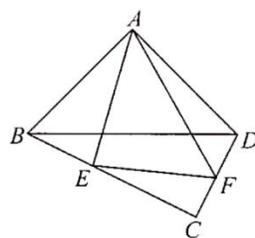
(1)问: $EF$  和  $BE,DF$  三条线段之间有何数量关系? 写出关系式并证明;

(2)问: $\angle AFD$  与  $\angle AFE$  之间有何数量关系? 写出关系式并证明.

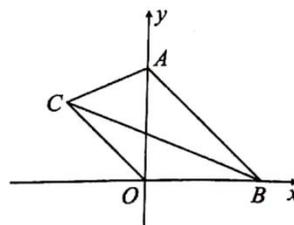


2. 如图,四边形  $ABCD$  中, $AB=AD, \angle BAD = \angle C = 90^\circ, E, F$  分别为  $BC, CD$  上的点, $\angle EAF = 45^\circ$ .

问: $EF, BE, DF$  之间有何数量关系? 写出关系式并证明.

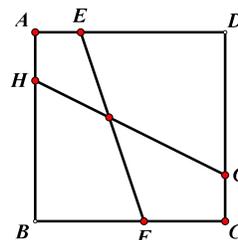


3. 如图,在平面直角坐标系中,点  $A(0,2), B(2,0)$ ,点  $C$  在  $\angle ABO$  的平分线上, $\angle ACO = 67.5^\circ$ ,求  $\angle AOC$  的度数.

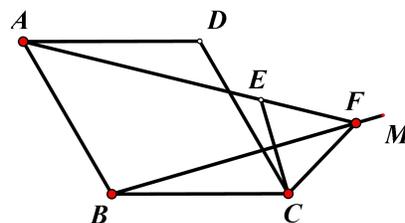




1、如图，正方形 ABCD 中，EF 与 HG 的夹角为  $45^\circ$ ，边长  $AB=4$ ， $HG=2\sqrt{5}$ ，求 EF 的长



2、如图，在菱形 ABCD 中， $\angle ABC=120^\circ$ ，在  $\angle ABC$  内作射线 BM，作点 C 关于 BM 的对称点 E，连接 AE 并延长交 BM 于点 F，连接 CE、CF，若  $AE=5$ ， $CE=2$ ，求 BF 的值

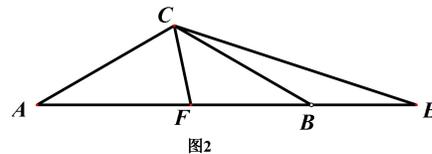
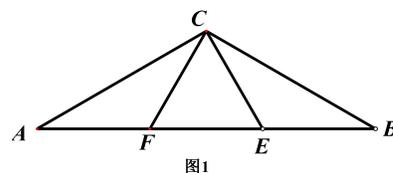


3、如图 1， $\triangle ABC$  中， $CA=CB$ ， $\angle ACB=120^\circ$ ， $AB=3$ ，点 E、F 在直线 AB 上，且  $\angle ECF=60^\circ$

(1) 求 AC 边的长

(2) 如图 1，点 E、F 在线段 AB 上时，若  $EF=AF$ ，求证： $BE=EF$

(3) 如图 2，点 F 在 AB 上，点 E 在 AB 的延长线上时，若  $AF=m$ ， $BE=n$ ，则  $n=_____$ 。(用含 m 的式子表示)





【课后作业】

1. 如图 1,  $E$  是正方形  $ABCD$  边  $CD$  上一动点,  $BE$  的垂直平分线交对角线  $AC$  于点  $G$ , 垂足为点  $H$ , 连接  $BG$  并延长, 交  $AD$  于点  $F$ , 连接  $GE, EF$ , 若  $AC=2\sqrt{2}$ , 则  $\triangle DEF$  的周长为\_\_\_\_\_.

2. 在梯形  $ABCD$  中,  $AD \parallel BC$  ( $BC > AD$ ),  $\angle D = 90^\circ$ ,  $BC = CD = 12$ , 点  $E$  在边  $CD$  上,  $\angle ABE = 45^\circ$ , 若  $AE = 10$ , 求  $CE$  的长.

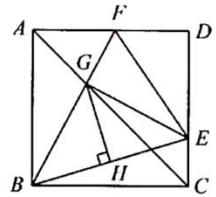


图 1

3. 如图 2, 已知等边  $\triangle ABC$  的边长为 1,  $D$  是  $\triangle ABC$  外一点, 且  $\angle BDC = 120^\circ$ ,  $BD = CD$ , 点  $M, N$  分别在  $AB, AC$  上, 且  $\angle MDN = 60^\circ$ , 连接  $MN$ , 求  $\triangle AMN$  的周长.

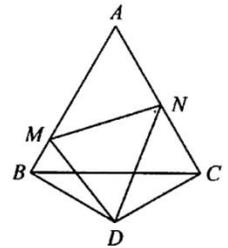


图 2

4. 如图 3, 在正方形  $ABCD$  中, 连接  $BD$ ,  $E, F$  分别是边  $BC, CD$  上的点,  $\triangle CEF$  的周长是正方形  $ABCD$  周长的一半,  $AE, AF$  分别与  $BD$  交于点  $M, N$ , 试判断线段  $BM, DN, MN$  之间的数量关系, 并证明.

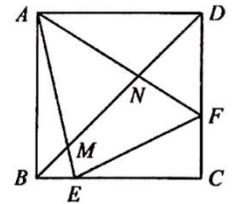


图 3

5. 如图 4, 在正方形  $ABCD$  内部有两点  $E, F$ , 满足  $\angle EAF = \angle ECF = 45^\circ$ , 连接  $BE, EF, FD$ . 若  $AB = 1$ , 求  $S_{\triangle ABE} + S_{\triangle ADF} + S_{\triangle EFC}$  的值.

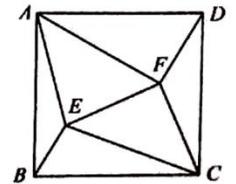


图 4