

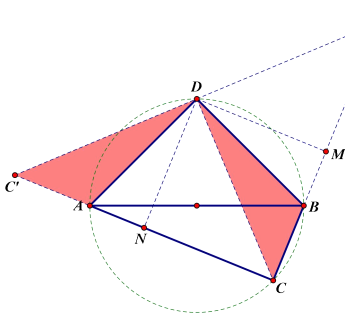


对角互补模型及应用

【知识导航】

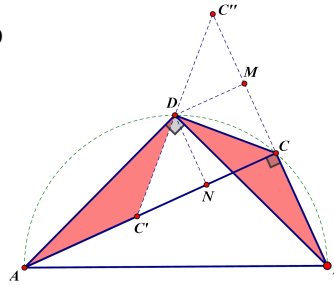
一、对角互补（双直角）

1、双直角异侧型



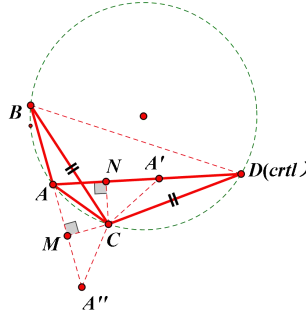
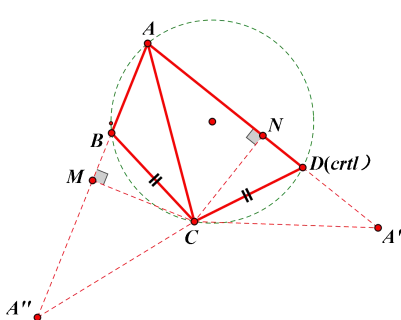
基本结论：
 $CB+CA=2DN=2DM=\sqrt{2}CD$
 $CA-CB=2AN=2BM$
 边相等 \rightarrow 角平分
 角平分 \rightarrow 边相等
 基本方法：
 辅助线 1：作双垂线
 辅助线 2：旋转

2、双直角同侧型



基本结论：
 $AC-BC=2CN=2CM=\sqrt{2}CD$
 $AC+BC=2AN=2BM$
 边相等 \rightarrow 角平分
 角平分 \rightarrow 边相等
 基本方法：
 辅助线 1：作双垂线
 辅助线 2：旋转

二、对角互补（任意角）



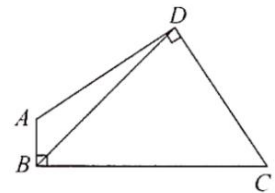
左图 基本结论：
 $AB+AD=2AM=2AN$
 $AD-AB=2DN=2BM$
 边相等 \rightarrow 角平分
 角平分 \rightarrow 边相等
 基本方法：
 辅助线 1：作双垂线
 辅助线 2：旋转

以上模型，八年级学生，可以忽略“圆”的存在，九年级学生，可以从“四点共圆”的角度解读此模型。

【典例讲练】

例题 1、如图，在四边形 ABCD 中， $\angle ABC=\angle ADC=90^\circ$ ，BD 平分 $\angle ABC$ 。

- 求证：（1） $AD=CD$ ；
 （2） $AB+BC=\sqrt{2}BD$ ；
 （3） $S_{\text{四边形}ABCD}=\frac{1}{2}BD^2$



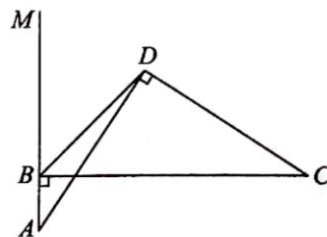


例题 2、如图， $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ ，BD 是 $\angle ABC$ 的邻补角 $\angle MBC$ 的平分线。

求证：(1) $AD = CD$ ；

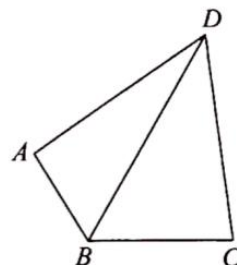
(2) $BC - AB = \sqrt{2} BD$ ；

(3) $S_{\triangle BDC} - S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}BD^2$

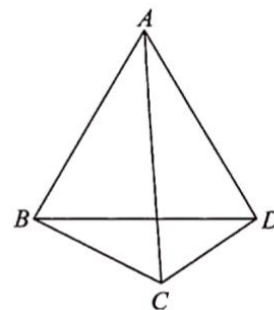


【同类变式】

1、如图，在四边形 ABCD 中， $\angle ABC = 2\angle ADC = 120^\circ$ ，BD 平分 $\angle ABC$ 。求证：(1) $AD = CD$ ；(2) $AB + BC = BD$ 。



2、如图，在四边形 ABCD 中， $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ ，BD 平分 $\angle ABC$ 。求证： $AD = CD$ 。





3、如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = \angle ACB$ ，点D，E分别是BC，AC上的点，AD，BE相交于点P， $\angle EBC = \angle BAD$ 。

(1) 求证： $\angle DPE + \angle C = 180^\circ$ ；

(2) 作 $AF \parallel BC$ 交DE的延长线于点F，若 $PE = CE$ ，求证： $\angle ADF = \angle F$ 。

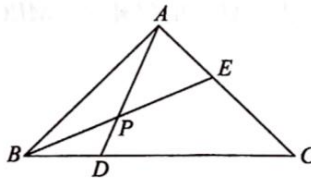


图1

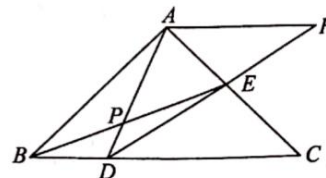
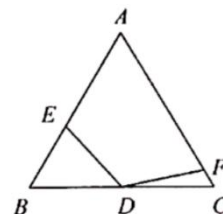


图2

4、如图，等边 $\triangle ABC$ 的边长为1，D是BC的中点，点E，F分别位于AB，AC边上，且 $\angle EDF = 120^\circ$ ，那么 $AE + AF$ 的长是否为定值？如果是，求出该值；如果不是，请说明理由。





【课后作业】

1. 如图 1, 正方形 $ABCD$ 和 $OPQR$ 的边长都为 2, 如果点 O 正好是正方形 $ABCD$ 的中心, 而正方形 $OPQR$ 可以绕着点 O 旋转, 那么它们重叠部分的面积为()

- A. 4 B. 2 C. 1 D. $\frac{1}{2}$

2. 如图 2, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD=DC$, $\angle ADC = \angle ABC = 90^\circ$, $DE \perp AB$ 于点 E , 若四边形 $ABCD$ 的面积为 8, 则 DE 的长为()

- A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. 3 D. $3\sqrt{2}$

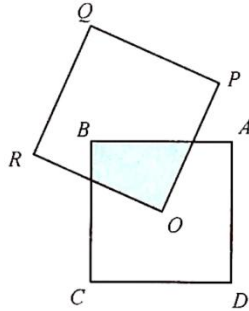


图 1

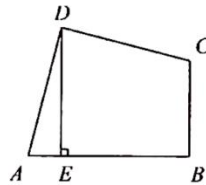


图 2

3. 如图 3, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle D = \angle B = 90^\circ$, $DC = AD$, 若这个四边形的面积为 12, 则 $BC + AB =$ _____.

4. 如图 4, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAC = 90^\circ$, 直角 $\angle EPF$ 的顶点 P 是 BC 的中点, 两边 PE, PF 分别交 AB, AC 于点 E, F , 若 $FC = 3, BE = 4$, 则 $\triangle EFP$ 的面积为 _____.

5. 如图 5, 四边形 $ABCD$ 被对角线 BD 分为等腰 $Rt\triangle ABD$ 和 $Rt\triangle CBD$, 其中 $\angle BAD$ 和 $\angle BCD$ 都是直角, 另一条对角线 AC 的长度为 2, 则四边形 $ABCD$ 的面积为 _____.

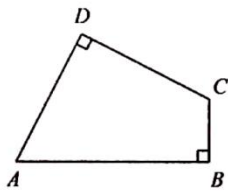


图 3

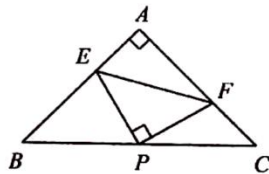


图 4

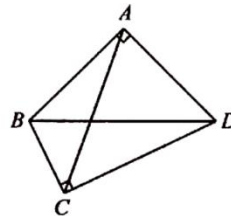


图 5