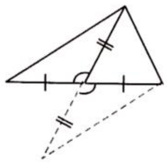
全等三角形 拓展提升

【知识梳理】

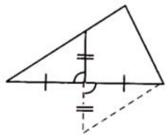
对于全等三角形中一些较难的证明题，需要结合已知条件（如角的平分线、三角形的中线、等腰三角形等），添加合适的辅助线来构造全等三角形，把分散的条件集中起来，再进行等量代换，为证明结论提供条件。

1.倍长中线

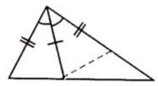
三角形中涉及中点时，可将三角形的中线或经过中点的线倍长，从而构造全等三角形，如图。



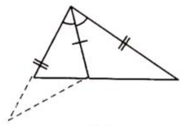
倍长中线



倍长经过中点的线



截长



补短

2.截长补短

在某条线段上截取一条线段与特定线段相等，或是将某条线段延长，使之与特定线段相等，从而构造全等三角形，如上右图。这种作法适合于证明不在同一条直线上的线段的和、差、倍、分关系。

3.构造轴对称

角平分线是角的对称轴，在证明全等的过程中不仅提供了两个相等的角，还有一条公共边.过角平分线上的点向角两边作垂线（如图 1），或过角平分线上的点作角平分线的垂线（如图 2），或在角的两边上截取相等的线段（如图 3），都能构造出全等三角形.

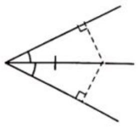


图 1

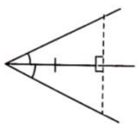


图 2

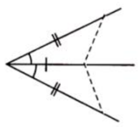
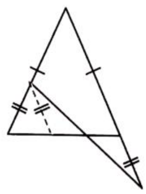


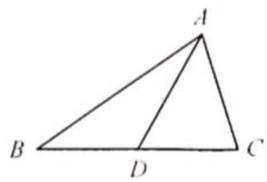
图 3



4.作平行线

当三角形中有等角或等边时，可通过作平行线将相等的角转换到另一个三角形中，如**上右图**，从而得到新的等腰三角形或相等的角，可以为证明全等提供条件.

【例题讲解】

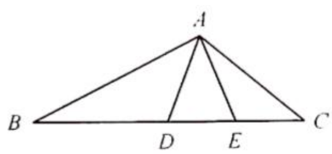


例 1、如图，在△ABC 中，AB=5，AC=3，则中线 AD 的取值范围是____________.

分析：倍长中线，可将 AB，AC，AD 放到一个三角形中，利用三边关系解答。

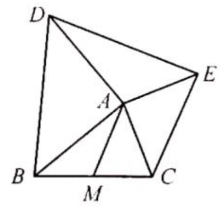
例 2、如图，在△ABC 中，BD=DC=AC，E 是 DC 的中点，求证：AD 平分∠BAE.

分析：求证角相等，可将其放在两个三角形中证全等。E 为中点，倍长中线即可构造出所需的全等三角形。



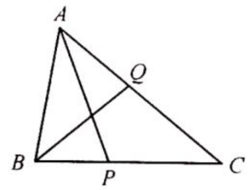
例 3、如图，以△ABC 的两边 AB，AC 为腰分别向外作等腰 Rt△ABD 和等腰 Rt△ACE，∠BAD=∠CAE=90°，M 是 BC 的中点，连接 AM，DE.试探究 AM 与 DE 的位置关系及数量关系.

分析：猜想两线段成倍数关系，位置关系为垂直，从而倍长中线 AM，证明与 AM，DE 有关的两个三角形全等即可.



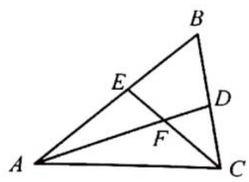
例 4、如图，在△ABC 中，∠BAC=60°，∠ACB=40°，点 P，Q 分别在边 BC，CA 上，并且 AP，BQ 分别是∠BAC，∠ABC 的平分线，求证：BQ+AQ=AB+BP

分析：易证 BQ=CQ，从而 AC=BQ+AQ，可利用补短法将 AB 延长，延长的部分等于线段 BP 的长，证明三角形全等即可.



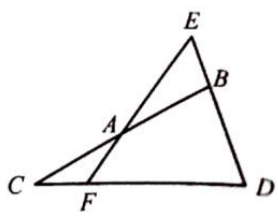
例 5 在△ABC 中，∠B=60°，AD，CE 分别是∠BAC，∠BCA 的平分线，AD，CE 相交于点 F.请你判断并写出 FE 与 FD 之间的数量关系。

分析：已知角平分线，易想到角平分线上的点到角两边的距离相等，从而可作辅助线构造全等三角形.



例 6、如图，在△DEF 中，DE=DF，过 EF 上一点 A 作直线与 DE 交于点 B，与 DF 的延长线交于点 C，且 BE=CF.求证：AB=AC.

分析：过一腰上的点作另一腰的平行线，得等腰三角形，从而为证明三角形全等提供条件.



【进阶训练】

1、如图 1，在△ABC 中，点 D 为 BC 的中点，E、F 分别在边 AB、AC 上，且 DE⊥DF，试比较 BE+CF 与 EF 的大小.

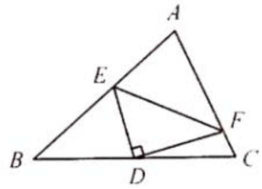


图 1

2、如图 2，AD 是△ABC 的中线，BE 交 AC 于点 E，交 AD 于点 F，且 AE=EF.求证：AC=BF.

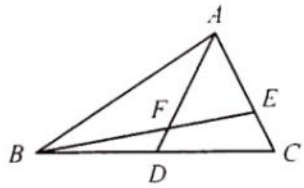


图 2

3、如图 3，在△ABC 中，AD 平分∠BAC，AB=AC-BD，求∠B 与∠C 的关系.

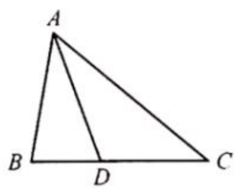


图 3

4、如图 4，在正方形 ABCD 中，M，N 分别是边 BC，CD 上的点，∠MAN=45°求证：MB+ND=MN.

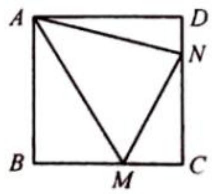


图 4

5、（1）如图 5，在△ABC 中，∠BAC=45°，AB=BC，AD 平分∠BAC，AD⊥CD，垂足为点 D. AD 与 BC 交于点 E.求证：AE=2CD；

（2）如图 6，在△ABC 中，∠BAC=45°，AB=BC，点 D 在 AC 上，∠EDC= $\frac{1}{2}$∠BAC，DE⊥CE，垂足为点 E，DE 与 BC 交于点 F.求证：DF=2CE.

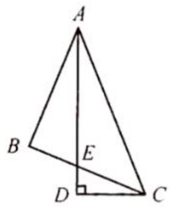


图 5

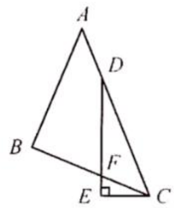


图 6

6、如图 7，在△ABC 中，AB=AC，点 D 在边 AB 上，点 E 在 AC 的延长线上，连接 DE，交 BC 于点 G，若 GE=GD，求证：CE=BD.

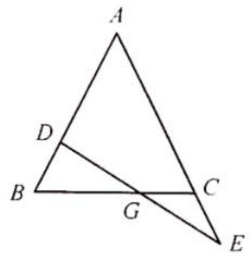


图 7

7、如图 8，△ABC 为等边三角形，点 D 在边 AC 上，点 E 在边 AB 上，且 AD=BE，F 为线段 DE 的中点，求证：EC=2AF.

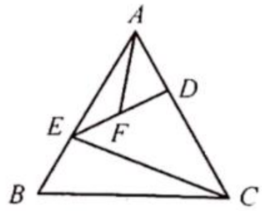


图 8

8、如图 9，在等腰△ABC 中，AB=AC，∠BAC=120°，△CDE 是等边三角形，连接 BE，P 是 BE 的中点，连接 AP，PD，AD. 求证：AP⊥PD 且 AD=2AP.

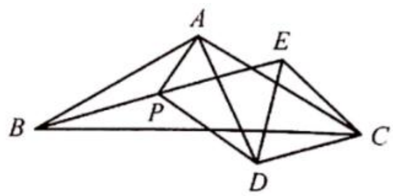


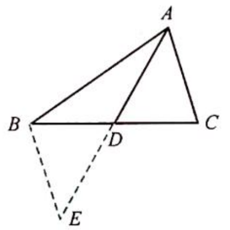
图 9

第 6 章 全等三角形

【例题讲解】

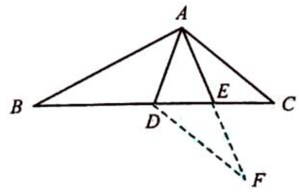
例 1 $1<AD<4$.

【提示】 如图，延长 AD 至点 E，使得 $DE=AD$，连接 BE，易证 $\triangle ADC\cong\triangle EDB$，所以 $EB=AC$，$AE=2AD$，从而 $AB-AC<2AD<AB+AC$.



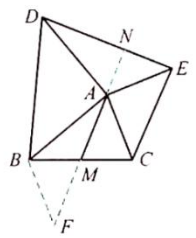
例 2 略.

【提示】 如图，延长 AE 至点 F，使得 $EF=AE$，连接 DF，易证 $\triangle AEC\cong\triangle FED$，从而 $FD=AC=BD$. 而 $\angle ADB=\angle DAC+\angle C=\angle ADC+\angle CDF=\angle ADC$，所以 $\triangle ADB\cong\triangle ADF$，即得证.



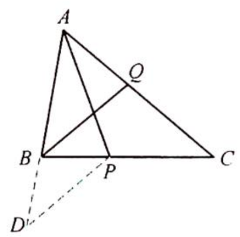
例 3 $DE=2AM$，$DE\perp AM$.

【提示】 如图，延长 AM 至点 F，使得 $MF=AM$，连接 BF，从而可证 $\triangle ABF\cong\triangle DAE$(SAS)，所以 $DE=AF=2AM$. 延长 MA 交 DE 于点 N，借助四边形 $BFND$ 的内角和可求得 $\angle DNF=90°$.



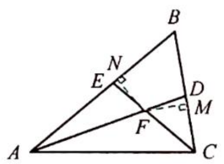
例 4 略.

【提示】 延长 AB 至点 D，使得 $BD=BP$，连接 DP，从而 $\angle D=\frac{1}{2}\angle ABC=40°=\angle C$，故可得 $\triangle ADP\cong\triangle ACP$，即得证.



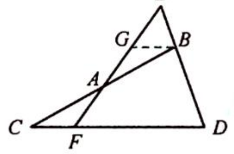
例 5 $FE=FD$.

【提示】 如图，过点 F 分别作 BC，BA 的垂线，垂足分别为 M，N，从而 $FM=FN$，$\angle MFN=120°$. 而 $\angle DFC=\angle EFA=\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle BCA)=60°$，所以 $\angle DFE=120°$，故 $\angle MFD=\angle NFE$，所以 $\triangle MFD\cong\triangle NFE$，即得证.



例 6 略.

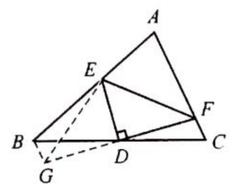
【提示】 过点 B 作 $BG\parallel DF$，交 EF 于点 G，则 $\angle EGB=\angle EFD=\angle E$，即 $BG=BE=CF$，从而 $\triangle AGB\cong\triangle AFC$，即得证.



【进阶训练】

1. $BE+CF>EF$.

【提示】 如图，延长 FD 至点 G，使得 $DG=FD$，连接 BG，EG，易证 $BG=CF$，$EG=EF$，从而将线段 BE，CF，EF 转移到 $\triangle BEG$ 中，利用三边关系即可解答.



2. 略.

【提示】 倍长 AD(如图 1)或 FD(如图 2)均可，将 AC 和 BF 放到一个三角形中，证等腰三角形即可.

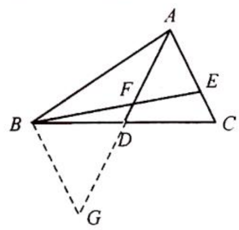


图 1

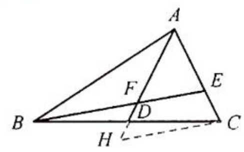
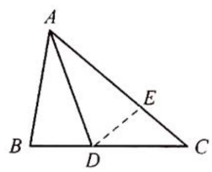


图 2

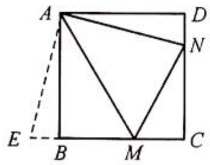
3. $\angle B=2\angle C$.

【提示】 如图，在 AC 上截取 $AE=AB$，构造全等三角形和等腰三角形，利用三角形内角和外角的关系解答.



4.略.

【提示】 延长 MB 至点 E，使得 $BE=DN$，连接 AE，先证 $\triangle ABE\cong\triangle ADN$，再证 $\triangle AME\cong\triangle AMN$ 即可.



5.略.

【提示】 (1)如图 1，延长 AB，CD，交于点 G，易证 $DG=DC=\frac{1}{2}CG$，结合求证的结论，只需证 $\triangle GBC\cong\triangle EBA$ 即可；(2)由(1)的解答过程可提供思路，如图 2，延长 CE 至点 G，使得 $EG=CE$，连接 DG，然后直接用(1)中所证的结论即可得.

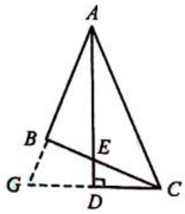


图 1

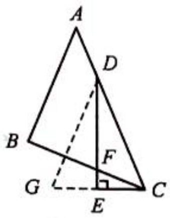


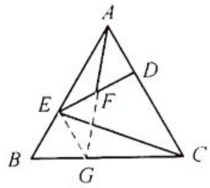
图 2

6.略.

【提示】 参照例 6 即可.

7.略.

【提示】 如图，过点 E 作 $EG\parallel AC$，交 BC 于点 G，连接 FG，则 $EG=EB=AD$，可得 A，F，G 三点共线，且 $AF=GF$，从而只需证 $\triangle ABG\cong\triangle CBE$ 即可.



8.略.

【提示】 延长 DP 至点 F，使得 $PF=DP$，连接 AF，BF，则 $BF=ED=CD$，$BF\parallel DE$. 延长 BA，DE，交于点 G，则 $\angle GAC=\angle GDC=60°$，所以 $\angle ACD=\angle G=\angle ABF$，从而 $\triangle ACD\cong\triangle ABF$(SAS)，故可得 $AD=AF$，$\angle DAF=120°$，即得证.