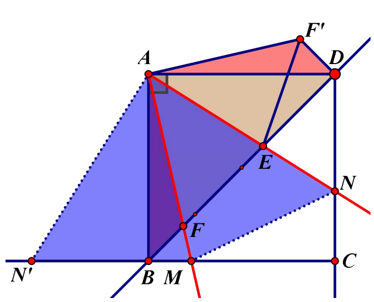
夹半角模型及应用

【知识导航】

1、90° 半角模型内半角

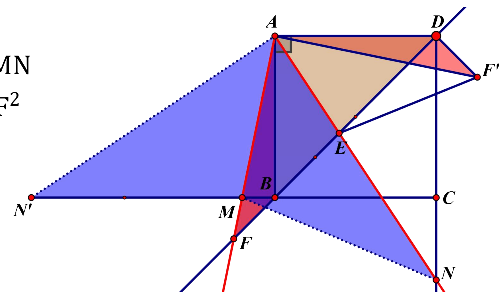


基本结论：

$BM + DN = MN$

$BF^2 + DE^2 = EF^2$

2、90° 半角模型外半角



基本结论：

$DN - BM = MN$

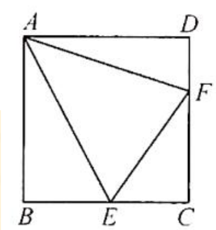
$BF^2 + DE^2 = EF^2$

【典例讲练】

【例 1】 正方形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 BC，CD 上的点，$\angle EAF = 45°$. 求证：

(1) $EF = BE + DF$；

(2) AE 平分 $\angle BEF$，AF 平分 $\angle DFE$.



(1) 延长 CB 到 G，使 GB=DF，连接 AG

∵ AB=AD，∠ABG=∠D=90°

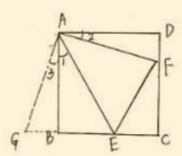
GB=DF

∴ △ABG≌△ADF (SAS)

∴ ∠3=∠2，AG=AF

∵ ∠BAD=90°，∠EAF=45°

∴ ∠1+∠2=45° ∴ ∠GAE=∠1+∠3=45°=∠EAF



∵ AE=AE，∠GAE=∠EAF，AG=AF ∴ △AGE≌△AFE (SAS)

∴ GB+BE=GE ∴ EF=DF+BE 注：EF=GE，GB=DF

(2) 由(1)可知 △GAE≌△FAE，∴ ∠AED=∠AEF ∠AFE=∠G

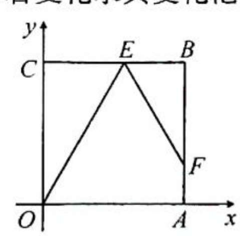
∴ AE平分∠BEF

又∵ △ADF≌△ABG ∴ ∠AFD=G 注：全等三角形之对应角相等.

∴ ∠AFD=∠AFE

∴ AF平分∠DFE

【例 2】 如图，$B(4,4)$，$BC\perp y$ 轴于点 C，$BA\perp x$ 轴于点 A，E 为 BC 上一动点（不与 B，C 重合），F 为 AB 上一动点，且满足 $\angle OEF = \angle AOE$，在运动过程中，$\triangle BEF$ 的周长变吗？若不变求其值；若变化求其变化范围.

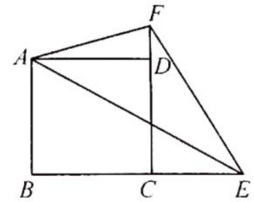


【解析】过 O 作 EF 的垂线段，连 OF，证全等，周长：8，不变。

1. 在例 1 的条件下，若点 E 在 BC 的延长线上，点 F 在 CD 的延长线上，其余条件不变.

(1)问：EF 和 BE，DF 三条线段之间有何数量关系？写出关系式并证明；

(2)问：$\angle AFD$ 与 $\angle AFE$ 之间有何数量关系？写出关系式并证明.



(1) $EF=BE-DF$，证明见解析；

(2) $\angle AFD+\angle AFE=180^\circ$，证明见解析

【解析】

(1) EF和BE、DF三条线段之间的数量关系是$EF=BE-DF$，证明如下：

正方形$ABCD$中，

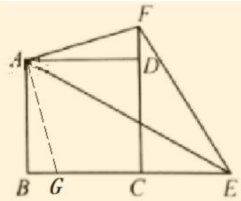
$AB=AD=BC=CD$，

$\angle BAD=\angle ABC=\angle BCD=\angle ADC=90^\circ$

，

$\therefore \angle ADF=\angle ECF=90^\circ$，

在BE上截取$BG=DF$，连接AG，如图：



在$\triangle ADF$和$\triangle ABG$中，

$\because \begin{cases} AD=AB \\ \angle ADF=\angle ABG=90^\circ \\ DF=BG \end{cases}$，

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle ABG(SAS)$，

$\therefore AF=AG$，$\angle DAF=\angle BAG$，

$\therefore \angle DAF+\angle DAG=\angle BAG+\angle DAG$

即$\angle GAF=\angle BAD=90^\circ$，

$\because \angle EAF=45^\circ$，

$\therefore \angle GAE=\angle EAF=45^\circ$，

在$\triangle GAE$和$\triangle FAE$中，

$\because \begin{cases} AG=AF \\ \angle GAE=\angle FAE \\ AE=AE \end{cases}$，

$\therefore \triangle GAE \cong \triangle FAE(SAS)$，

$\therefore EG=EF$，

$\therefore EF=EG=BE-BG=BG-DF$

；

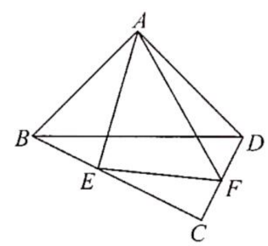
(2) $\angle AFD$与$\angle AFE$之间的数量关系为$\angle AFD+\angle AFE=180^\circ$，证明如下：

由(1)知：$\triangle ADF \cong \triangle ABG$，$\triangle GAE \cong \triangle FAE$，

$\therefore \angle AFD=\angle AGB$，$\angle AFE=AGE$

$\therefore \angle AFD+\angle AFE=\angle AGB+\angle AGE=180^\circ$

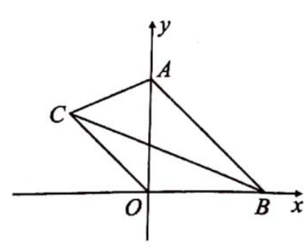
2. 如图，四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$\angle BAD=\angle C=90^\circ$，$E$，$F$ 分别为 BC，CD 上的点，$\angle EAF=45^\circ$. 问：EF，BE，DF 之间有何数量关系？写出关系式并证明.



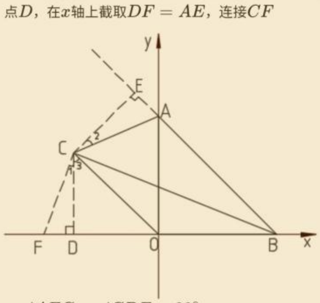
$EF=BE+DF$.

证明：延长 CD 至点 G，使 $DG=BE$. 由$\angle BAD=\angle C=90^\circ$得$\angle ABC+\angle ADC=180^\circ$，$\therefore \angle ADG=\angle ABE$，$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADG$(SAS)，$\therefore AE=AG$，$\angle BAE=\angle DAG$，$\therefore \angle GAE=\angle DAG+\angle DAE=\angle BAE+\angle DAE=\angle BAD=90^\circ=2\angle EAF$，$\therefore \angle GAF=\angle EAF$，$\therefore \triangle AGF \cong \triangle AEF$(SAS)，$\therefore EF=GF=DG+DF=BE+DF$.

3. 如图，在平面直角坐标系中，点 $A(0,2)$，$B(2,0)$，点 C 在$\angle ABO$ 的平分线上，$\angle ACO=67.5^\circ$，求$\angle AOC$ 的度数.



过点C分别作$CE\perp AB$交AB于点E，作$CD\perp x$轴于点D，在x轴上截取$DF=AE$，连接CF



$\therefore \angle AEC=\angle CDF=90^\circ$

$\because BC$平分$\angle ABO$

$\therefore CD=CE$

在$\triangle ACE$和$\triangle FCD$中，

$\begin{cases} CE=CD \\ \angle AEC=\angle CDF=90^\circ \\ AE=DF \end{cases}$

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle FCD(SAS)$

$\therefore AC=CF$，$\angle 1=\angle 2$

$\because \angle CDB+\angle CEB+\angle ECD+\angle EBD=360^\circ$，$\angle CDB=\angle CEB=90^\circ$

$\therefore \angle ECD+\angle EBD=180^\circ$

$\because A(0,2)$，$B(2,0)$

$\therefore OA=OB=2$

$\therefore \angle ABO=\angle OAB=45^\circ$

$\therefore \angle ECD=180^\circ-\angle EBD=135^\circ$

$\because \angle ACO=67.5^\circ$

$\therefore \angle 2+\angle 3=\angle ECD-\angle ACO=67.5^\circ$

$\therefore \angle 1+\angle 3=67.5^\circ$

即$\angle FCO=\angle ACO=67.5^\circ$

在$\triangle FCO$和$\triangle ACO$中，

$\begin{cases} FC=AC \\ \angle FCO=\angle ACO \\ CO=CO \end{cases}$

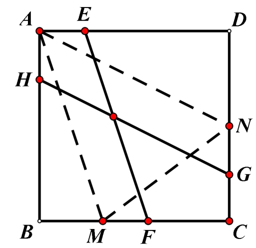
$\therefore \triangle FCO \cong \triangle ACO(SAS)$

$\therefore \angle AOC=\angle FOC$

又$\because \angle AOC+\angle FOC=90^\circ$

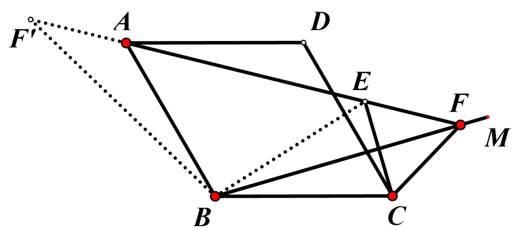
$\therefore \angle AOC=45^\circ$

1、如图，正方形 ABCD 中，EF 与 HG 的夹角为 45°，边长 AB=4，HG=$2\sqrt{5}$，求 EF 的长



答案：$\frac{4}{3}\sqrt{10}$

2、如图，在菱形 ABCD 中，∠ABC=120°，在∠ABC 内作射线 BM，作点 C 关于 BM 的对称点 E，连接 AE 并延长交 BM 于点 F，连接 CE、CF，若 AE=5，CE=2，求 BF 的值



答案：$\mathrm{BF}=\frac{5+2+2}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}$

3、如图 1，△ABC 中，CA=CB，∠ACB=120°，AB=3，点 E、F 在直线 AB 上，且∠ECF=60°

（1）求 AC 边的长

（2）如图 1，点 E、F 在线段 AB 上时，若 EF=AF，求证：BE=EF

（3）如图 2，点 F 在 AB 上，点 E 在 AB 的延长线上时，若 AF=m，BE=n，则 n=__________.（用含 m 的式子表示）

答案：（1）$\sqrt{3}$ （2）略 （3）$\frac{3-2m}{m-2}$

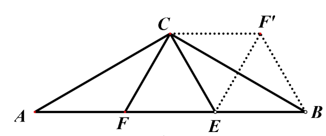


图1

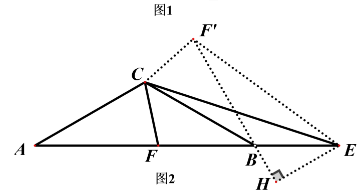


图2

【课后作业】

1. 如图 1，E 是正方形 $ABCD$ 边 CD 上一动点，BE 的垂直平分线交对角线 AC 于点 G，垂足为点 H，连接 BG 并延长，交 AD 于点 F，连接 GE，EF，若 $AC=2\sqrt{2}$，则 $\triangle DEF$ 的周长为__________.

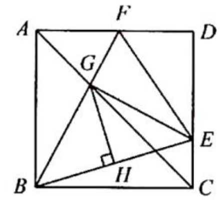


图 1

2. 在梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$（$BC>AD$），$\angle D=90^\circ$，$BC=CD=12$，点 E 在边 CD 上，$\angle ABE=45^\circ$，若 $AE=10$，求 CE 的长.

3. 如图 2，已知等边 $\triangle ABC$ 的边长为 1，D 是 $\triangle ABC$ 外一点，且 $\angle BDC=120^\circ$，$BD=CD$，点 M，N 分别在 AB，AC 上，且 $\angle MDN=60^\circ$，连接 MN，求 $\triangle AMN$ 的周长.

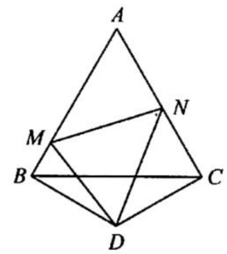


图 2

4. 如图 3，在正方形 $ABCD$ 中，连接 BD，E，F 分别是边 BC，CD 上的点，$\triangle CEF$ 的周长是正方形 $ABCD$ 周长的一半，AE，AF 分别与 BD 交于点 M，N，试判断线段 BM，DN，MN 之间的数量关系，并证明.

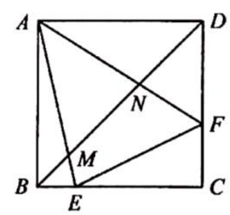


图 3

5. 如图 4，在正方形 $ABCD$ 内部有两点 E，F，满足 $\angle EAF=\angle ECF=45^\circ$，连接 BE，EF，FD. 若 $AB=1$，求 $S_{\triangle ABE}+S_{\triangle ADF}+S_{\triangle EFC}$ 的值.

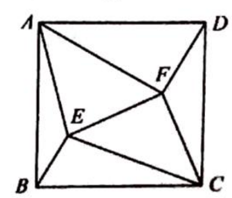
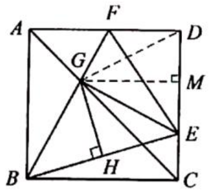


图 4

【课后作业】参考答案

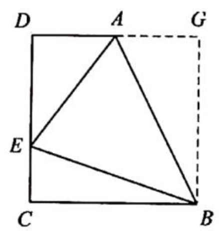
1. 4.

【提示】 如图，连接 DG，作 $GM \perp CD$ 于点 M，因为 $GD = BG = GE$，所以 $\angle EGM = \angle DGM$，从而 $\angle HGM = \frac{1}{2}\angle BGD = \angle BGC$，所以 $\angle GBE = \angle BGH = \angle MGC = 45°$，故 $EF = AF + CE$.



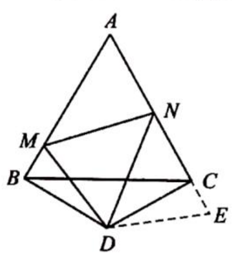
2. 4 或 6.

【提示】 如图，过点 B 作 $BG \perp AD$ 交 DA 的延长线于点 G，所以四边形 $BCDG$ 为正方形，所以 $AE = AG + CE$. 设 $CE = x$，则 $AG = 10 - x$，$AD = 12 - (10 - x)$，$DE = 12 - x$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中，$AE^2 = AD^2 + DE^2$，代入解得 $x_1 = 4$，$x_2 = 6$.



3. $\triangle AMN$ 周长为 2.

【提示】 如图，延长 AC 至点 E，使 $CE = BM$，连接 DE. 先证 $\triangle BMD \cong \triangle CED$，再证 $\triangle MDN \cong \triangle EDN$ 即可.



4. $BM^2 + DN^2 = MN^2$.

【提示】 由 $\triangle CEF$ 的周长是正方形 $ABCD$ 周长的一半，易想到正方形角含半角模型，从而通过旋转构造辅助线解决问题（如图 1）. 证明 $\triangle AEF \cong \triangle AGF$，得 $\angle MAN = \frac{1}{2}\angle BAD = 45°$ 后，再由“等腰三角形角含半角模型”（如图 2）即可证得.

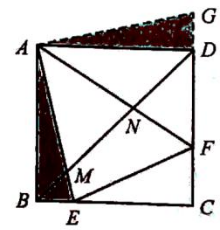


图 1

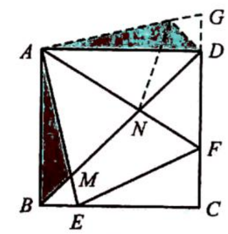


图 2

5. $\frac{1}{2}$.

【提示】 如图，旋转 $\triangle ADF$ 至 $\triangle ABG$，旋转 $\triangle CDF$ 至 $\triangle CBH$，连接 GE，EH，则 $GB = DF = BH$. 易证 $\triangle AEG \cong \triangle AEF$，$\triangle CEH \cong \triangle CEF$，所以 $EG = EF = EH$，从而 $\triangle BEG \cong \triangle BEH$，所以 $S_{\triangle ABE} + S_{\triangle ADF} + S_{\triangle EFC} = S_{四边形AGBE} + S_{\triangle EFC} = S_{\triangle AGE} + S_{\triangle EBG} + S_{\triangle EFC} = S_{\triangle AEF} + S_{\triangle EBH} + S_{\triangle EFC} = S_{四边形BECH} + S_{\triangle AEF} = S_{\triangle AEF} + S_{\triangle DFC} + S_{\triangle BEC} = \frac{1}{2}$.