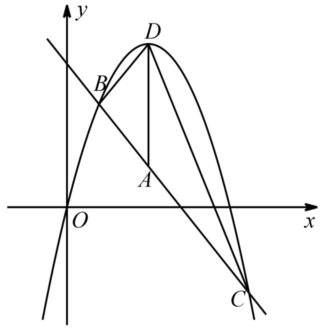
二次函数大综合（九上）

1、（2021 武汉元调 改）如图，经过定点 A 的直线 $y=k(x-2)+1$（$k<0$）交抛物线 $y=-x^2+4x$ 于 B，C 两点（点 C 在点 B 的右侧），D 为抛物线的顶点.



（1）直接写出点 A 的坐标；

（2）如图，若△ACD 的面积是△ABD 面积的两倍，求 k 的值；

解：（1）（2，1）. ……………………………………2 分

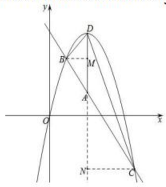
（2）∵$y=-x^2+4x=-(x-2)^2+4$，

∴顶点 D 的坐标是（2，4），∴$AD\perp x$ 轴. ……………………3 分

如图，分别过点 B，C 作直线 AD 的垂线，垂足分别为 M，N，设 B，C 的横坐标分别为 x_1，x_2.

∵$S_{\triangle ACD}=2S_{\triangle ABD}$，∴$CN=2BM$，

∴$x_2-2=2(2-x_1)$，即 $2x_1+x_2=6$. ……………………………5 分



联立 $\begin{cases} y=-x^2+4x, \\ y=kx-2k+1 \end{cases}$，得 $x^2+(k-4)x-2k+1=0$，①

解得 $x_1=\dfrac{4-k-\sqrt{k^2+12}}{2}$，$x_2=\dfrac{4-k+\sqrt{k^2+12}}{2}$.

∴ $2\times\dfrac{4-k-\sqrt{k^2+12}}{2}+\dfrac{4-k+\sqrt{k^2+12}}{2}=6$

化简得 $\sqrt{k^2+12}=-3k$，解得 $k=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. ……………………………7 分

另解：接上解， 由①得 $x_1+x_2=4-k$，

又由 $2x_1+x_2=6$，得 $x_1=2+k$.

∴$(2+k)^2+(k-4)(2+k)-2k+1=0$．解得 $k=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

∵$k<0$，$k=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. ……………………………7 分

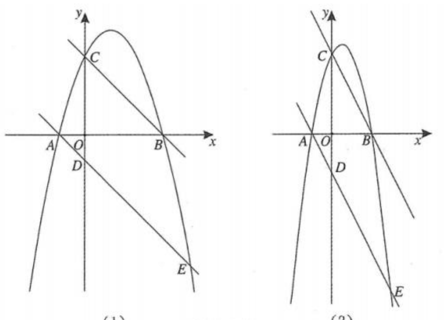
2、（2021 武汉四调）如图，抛物线 $y=-x^2+2x+c$ 分别交 x 轴于 A，B 两点（点 A 在点 B 的左边），交 y 轴正半轴于点 C，过点 A 作 CB 的平行线 AE 交抛物线于另一点 E，交 y 轴于点 D.

（1）如图（1），$c=3$.

①直接写出点 A 的坐标和直线 CB 的解析式；

②直线 AE 上有两点 F，G，横坐标分别为 t，$t+1$，分别过 F，G 两点作 y 轴的平行线交抛物线于 M，N 两点．若以 F，G，M，N 四点为顶点的四边形是平行四边形，求 t 的值.

（2）如图（2），若 $DE=3AD$，求 c 的值.



（1） （第 24 题） （2）

解：（1）①点 A 的坐标为（-1，0），直线 CB 的解析式是 $y=-x+3$. ………………3 分

②∵$AE\parallel CB$，∴设 AE 的解析式为 $y=-x+b$，将点 A 的坐标代入 $y=-x+b$，

得 $0=-(-1)+b$，解得 $b=-1$，∴AE 的解析式为 $y=-x-1$.

∵点 F，G 在直线 $y=-x-1$ 上，∴$F(t，-t-1)$，$G(t+1，-t-2)$，

∴点 $M(t，-t^2+2t+3)$，点 $N(t+1，-t^2+4)$，

∴$FM=|-t^2+3t+4|$， $GN=|-t^2+t+6|$. ……………………………5 分

∵以 F，G，M，N 为顶点的四边形是平行四边形，

∴$FM=GN$，∴$|-t^2+3t+4|=|-t^2+t+6|$，

解得 $t_1=1$，$t_2=1+\sqrt{6}$，$t_3=1-\sqrt{6}$. ……………………………7 分

（2）设 l_{BC}:y=kx+c，$\begin{cases} y=kx+c \\ y=-x^2+2x+c \end{cases}$，$x^2+(k-2)x=0$，$x_C=0$，$x_B=2-k$，又 $x_A+x_B=2$，故 $x_A=k$

设 l_{AE}:y=kx+n，A(k,0)代入 l_{AE}，得 n=$-k^2$，故 l_{AE}:y=kx-k^2，$\begin{cases} y=kx-k^2 \\ y=-x^2+2x+c \end{cases}$，

$x^2+(k-2)x-c-k^2=0$，$x_A+x_E=-k+2$，故 $x_E=2-2k$，

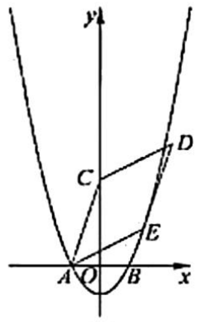
$|x_E|=3|x_A|$，2-2k=-3k，k=-2，B(4,0),代入 $y=kx+c$ 解得 c=8

3、（2021 武汉中考 改）抛物线 $y=x^2-1$ 交 x 轴于 A，B 两点（A 在 B 的左边）.

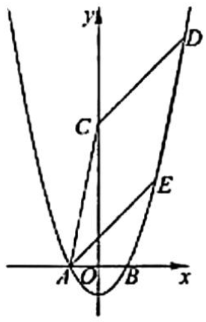
（1）$\square ACDE$ 的顶点 C 在 y 轴的正半轴上，顶点 E 在 y 轴右侧的抛物线上.

①如图（1），若点 C 的坐标是(0，3)，点 E 的横坐标是 $\dfrac{3}{2}$，直接写出点 A，D 的坐标；

②如图（2），若点 D 在抛物线上，且 $\square ACDE$ 的面积是 12，求点 E 的坐标；



(1)



(2)

24.（1）①$A(-1，0)$，$D(\frac{5}{2}，\frac{17}{4})$；

②解：设点 C 坐标为$(0，n)$，点 E 坐标为$(m，m^2-1)$.

∵四边形 $ACDE$ 是平行四边形，

∴将 AC 沿 AE 平移可与 ED 重合，点 D 坐标为$(m+1，m^2-1+n)$.

∵点 D 在抛物线上，∴$m^2-1+n=(m+1)^2-1$.

解得，$n=2m+1$，所以 $C(0，2m+1)$.

连 CE，过点 E 作 x 轴垂线，垂足为 M，过点 C 作 $CN\perp EM$，垂足为 N .

则 $S_{\triangle ACE}=S_{梯形AMNC}-S_{\triangle AME}-S_{\triangle CNE}$.

∵$S_{\square ACDE}=12$，$A(-1，0)$，

∴$6=\frac{1}{2}(m+m+1)(2m+1)-\frac{1}{2}(m+1)(m^2-1)-\frac{1}{2}m[2m+1-(m^2-1)]$.

∴$m^2+3m-10=0$. 解得 $m_1=2$，$m_2=-5$（不合题意，舍去）.

∴点 E 的坐标是(2，3) .

（1）②另解：

AE:y=(m-1)(x-1) （定点式）

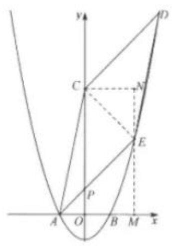
设 AE 交 y 轴于 Q，y_Q=m-1

连接 CE，在△ACE 中，用铅垂法：

[(2m+1)-(m-1)](m+1)=12

【下同】

另解：直线 AE 交 y 轴于点 P，先运用代数法或几何法求出点 P 的坐标．再运用 $S_{\triangle ACE}=S_{\triangle ACP}+S_{\triangle CEP}$，建立方程可得 m 的值.



4、（2018 武汉中考）如图，抛物线 L：$y=-x^2+bx+c$ 经过点 A（0，1），与它的对称轴直线 x=1 交于点 B.

（1）直接写出抛物线 L 的解析式；

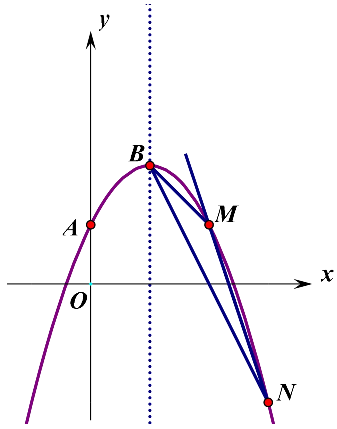
（2）过定点的直线 $y=kx-k+4$（k<0）与抛物线 L 交于点 M、N，若△BMN 的面积等于 1，求 k 的值；

【例】(1) $y=-x^2+2x+1$；

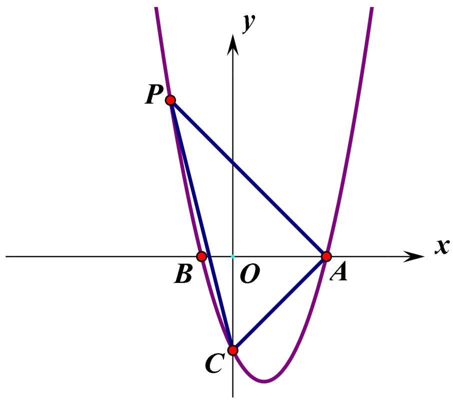
(2) 直线 $y=kx-k+4$ 过定点 $G(1,4)$，则 $BG=2$，

$\because S_{\triangle BMN}=S_{\triangle BGN}-S_{\triangle BMG}=\frac{1}{2}(x_N-x_M)\cdot BG=1$，$\therefore x_N-x_M=1$，

联立 $\begin{cases} y=kx-k+4 \\ y=-x^2+2x+1 \end{cases}$，可得 $x^2+(k-2)x-k+3=0$，$\therefore x_N+x_M=2-k$，$x_N\cdot x_M=3-k$，由 $(x_N-x_M)^2=1$，得 $(x_N+x_M)^2-4x_N\cdot x_M=1$，即 $(2-k)^2-4(3-k)=1$，解得 $k_1=3$（舍去），$k_2=-3$，故 $k=-3$；



5、已知，抛物线 $y=x^2-2x-3$ 与 x 轴交于 A、B 两点，与 y 轴交于 C 点，点 P 在抛物线上且在 x 轴上方，$S_{\triangle PAC}=15$，求 P 点坐标

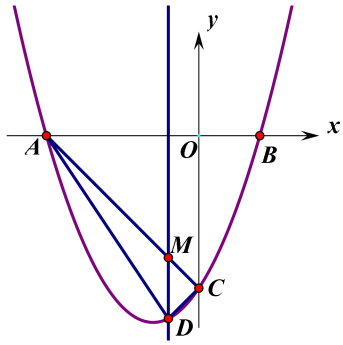


1.过 P 点作 $PE//AC$ 交 x 轴于 E 点，则 $S_{\triangle PAC}=S_{\triangle ACE}=15$.∴A

$=10$，$\therefore E(-7,0)$.又$\because AC$ 的解析式 $y=x-3$，$\therefore PE$：$y=x+7$，

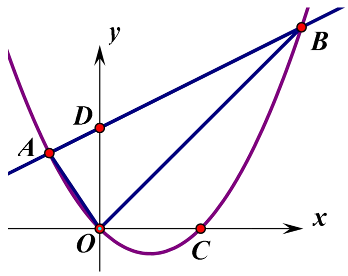
$\begin{cases} y=x+7 \\ y=x^2-2x-3 \end{cases}$，$\therefore P_1(-2,5)$，$P_2(5,12)$.

6、如图，已知抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+mx-2m-2$（$m>0$）与 x 轴交于 A、B 两点，与 y 轴负半轴交于 C 点，$x=-1$ 与抛物线交于第三象限 D 点，$S_{\triangle ACD}=5$，求 m.



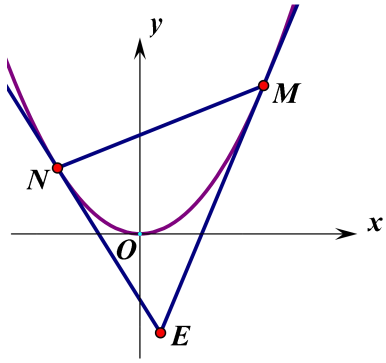
2.令 $y=0$，$x^2+2mx-4m-4=0$，$x_1=2$，$x_2=-2m-2$，$A(-2m-2,0)$，$B(2,0)$，$C(0,-2m-2)$，∴AC 的解析式 $y=-x-2m-2$，$D\left(-1,-3m-\frac{3}{2}\right)$，$M(-1,-2m-1)$，∴$DM=y_M-y_D=-2m-1-\left(-3m-\frac{3}{2}\right)=m+\frac{1}{2}$，∴$\frac{1}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)\times(2m+2)=5$，$m=\frac{3}{2}$.

7、如图，抛物线 $y=ax^2+bx$ 经过点 $A\left(-1,\frac{3}{2}\right)$ 及原点，交 x 轴于另一点 $C(2,0)$，点 $D(0,m)$ 是 y 轴正半轴上一动点，直线 AD 交抛物线于另一点 B，连 AO、BO，若△OAB 的面积为 5，求 m 的值.



3.$y=\frac{1}{2}x^2-x$.设 AB 的解析式 $y=kx+b$，过$\left(-1,\frac{3}{2}\right)$，$-k+b=\frac{3}{2}$，∴$b=k+\frac{3}{2}$，∴$y=kx+k+\frac{3}{2}$，与 $y=\frac{1}{2}x^2-x$ 联立，∴$\frac{1}{2}x^2-(k+1)x-k-\frac{3}{2}=0$，$-1+x_B=2k+2$，∴$x_B=2k+3$，$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}m(2k+4)=5$，∴$\left(k+\frac{3}{2}\right)(k+2)=5$，$2k^2+7k-4=0$，$k_1=\frac{1}{2}$，$k_2=-4$，∴$m>0$，∴$m=2$.

8、（2019 武汉改）已知抛物线 $y=x^2$，M、N 在抛物线上，点 M 在点 N 右边，直线 ME、NE 与抛物线只有唯一公共点，ME、NE 均与 y 轴不平行.若△MNE 的面积为 2，设 M、N 两点的横坐标分别为 m、n，求 m 与 n 的数量关系.



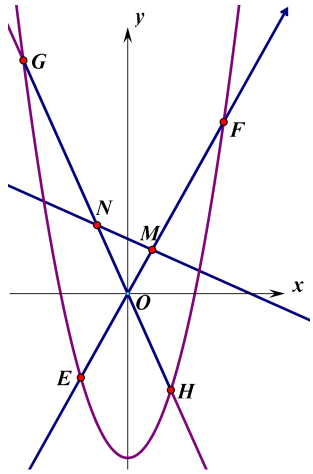
【例】联立 $\begin{cases} y=k_1(x-m)+m^2 \\ y=x^2 \end{cases}$，$\therefore x^2-k_1x+k_1m-m^2=0$，$\Delta=k_1^2-4k_1m+4m^2=0$，$\therefore (k_1-2m)^2=0$，即 $k_1=2m$，$\therefore ME: y=2mx-m^2$，

同理：$NE: y=2nx-n^2$，$\therefore E(\frac{m+n}{2}, mn)$，

设 MN 的中点为 Q，则 $Q\left(\frac{m+n}{2},\frac{m^2+n^2}{2}\right)$，由铅垂法可知，$S=\frac{1}{2}\left(\frac{m^2+n^2}{2}-mn\right)(m-n)=2$，

$\frac{1}{4}(m-n)^3=2$，故 $m-n$=2

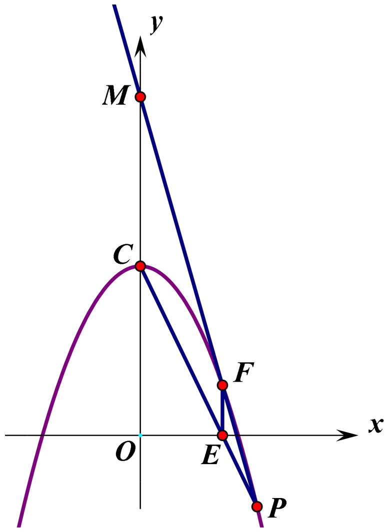
9、（2020 武汉）抛物线 $C: y=x^2-6$，直线 y = kx（k≠0，k 为常数）与抛物线交于 E，F 两点，M 为线段 EF 的中点；直线 $y=-\frac{4}{k}x$ 与抛物线交于 G，H 两点，N 为线段 GH 的中点，求证：直线 MN 经过一个定点.



1.① $\begin{cases} y=kx \\ y=x^2-6 \end{cases}$，$x_E+x_F=k$，$M(\frac{k}{2},\frac{k^2}{2})$；② $\begin{cases} y=-\frac{4}{k}x \\ y=x^2-6 \end{cases}$，$N(-\frac{2}{k},\frac{8}{k^2})\Rightarrow$ MN 解析式：$y=ax+b\Rightarrow y=\frac{k^2-4}{k}x+2$，$x=0$，$y=2$，定点 $(0,2)$.

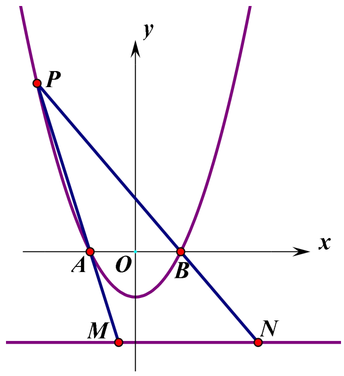
10、如图，抛物线，$y=-x^2+3$ 与 y 轴交于点 C，点 P 在抛物线上，PC 交 x 轴于 E 点，EF∥y 轴交抛物线于 F 点，PF 交 y 轴于 M 点，求点 M 的坐标

2.设 $P(m,-m^2+3)$，PC 的解析式为：$y=kx+3$，$k=-m$，$y=-mx+3$，设 PM 的解析式为：$y=ax+b$，联立 $\begin{cases}y=ax+b\\y=-x^2+3\end{cases}$，$x^2+ax+b-3=0$，$x_P\cdot x_F=b-3$，$m\cdot\frac{3}{m}=b-3$，∴$b=6$，∴$M(0,6)$.



11、（2020 五调改）已知如图，抛物线 $y=x^2-1$ 与 x 轴交于 A、B 两点，直线 l：$y=-2$，点 P 在抛物线上，连 PA、PB 交直线 l 于 M、N 两点，若 M、N 两点的横坐标为 m、n，求 m、n 之间的数量关系

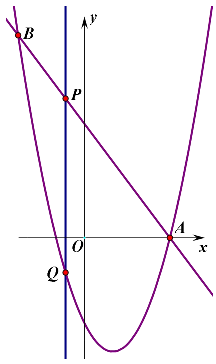
3.设 PA 的解析式，$y=kx+k$，$\begin{cases}y=kx+k\\y=x^2-1\end{cases}\Rightarrow x^2-kx-k-1=0$，$x_P=k+1$，同理，设 PB 的解析式 $y=k_1x-k_1\Rightarrow x^2-k_1x-1+k_1=0$，$x_P=k_1-1\Rightarrow k+1=k_1-1\Rightarrow k=k_1-2$，又∵$m=-\frac{2+k}{k}$，$n=\frac{k}{k+2}\Rightarrow mn=-1$.



另解：设 P(p，p^2-1），求 PA/PB 解析式即可。

12、如图，已知抛物线 $y=(x-1)^2-4$ 与 x 轴交于 A 点，直线 $y=-\frac{4}{3}x+b$ 经过 A 点，交抛物线于另一点 B，点 P 在线段 AB 上，PQ∥y 轴交抛物线于点 Q，若 PA=PQ，求点 P 的横坐标

1.设 $P(t,-\frac{4}{3}x+4)$，则 $Q(t,t^2-2t-3)$．易求：$PQ=-t^2+\frac{2}{3}t+7$，$PA=\frac{5}{3}(3-t)$．∵$PA=PQ$，∴$3t^2-7t-6=0$，∴$x_P=-\frac{2}{3}$．



13、（2016 武汉中考）抛物线 $y=ax^2+c$ 与 x 轴交于 A，B 两点，顶点为 C，点 P 在抛物线上，且位于 x 轴下方．

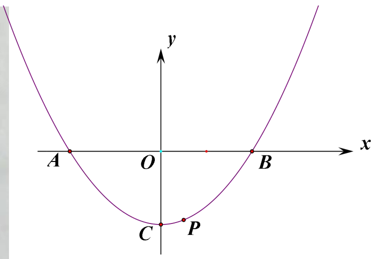
（1）如图 1，若 $P(1,-3)$，$B(4,0)$．

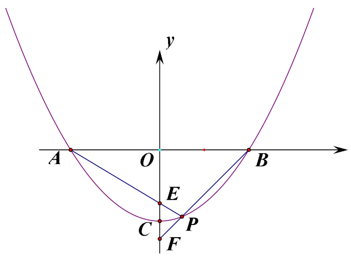
①求该抛物线的解析式；

②若 D 是抛物线上一点，满足 $\angle DPO=\angle POB$，求点 D 的坐标；

（2）如图 2，已知直线 PA，PB 与 y 轴分别交于 E，F 两点．当点 P 运动时，$\frac{OE+OF}{OC}$ 是否为定值?若是，试求出该定值；若不是，请说明理由．

【例】设 $PA:y=kx+b$ 与 $y=ax^2+c$ 联立，$PB:y=mx+n$ 与 $y=ax^2+c$ 联立，$\begin{cases}y=kx+b\\y=ax^2+c\end{cases}\Rightarrow ax^2-kx+c-b=0$，$x_A\cdot x_P=\frac{c-b}{a}$，同理 $x_B\cdot x_P=\frac{c-n}{a}$，∴$c-b=n-c\Rightarrow b+n=2c$，∴$\frac{OE+OF}{OC}=\frac{-(b+n)}{-c}=2$．





（1）①将 $P(1,-3)$，$B(4,0)$ 代入 $y=ax^2+c$，得 $\begin{cases}16a+c=0,\\a+c=-3.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{5},\\c=-\frac{16}{5}.\end{cases}$

抛物线的解析式为 $y=\frac{1}{5}x^2-\frac{16}{5}$；②如图 1，

当点 D 在 OP 左侧时，由 $\angle DPO=\angle POB$，得 $DP\parallel OB$，D 与 P 关于 y 轴对称，$P(1,-3)$，得 $D(-1,-3)$；当点 D 在 OP 右侧时，延长 PD 交 x 轴于点 G．作 $PH\perp OB$ 于点 H，则 $OH=1$，$PH=3$．

∵$\angle DPO=\angle POB$，∴$PG=OG$，设 $OG=x$，则 $PG=x$，$HG=x-1$．在 Rt△PGH 中，由 $x^2=(x-1)^2+3^2$，得 $x=5$．

∴点 $G(5,0)$．∴直线 PG 的解析式为 $y=\frac{3}{4}x-\frac{15}{4}$，

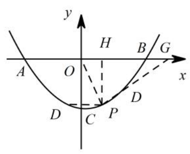
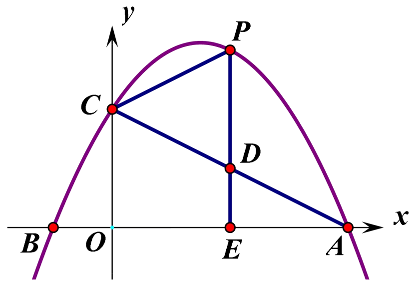


图1

解方程组 $\begin{cases}y=\frac{3}{4}x-\frac{15}{4},\\y=\frac{1}{5}x^2-\frac{16}{5},\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_1=1,\\y_1=-3,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=\frac{11}{4},\\y_2=-\frac{27}{16}.\end{cases}$ ∵$P(1,-3)$，∴$D\left(\frac{11}{4},-\frac{27}{16}\right)$．∴

点 D 的坐标为 $(-1,-3)$ 或 $\left(\frac{11}{4},-\frac{27}{16}\right)$．

14、如图，抛物线 $y=ax^2+\frac{3}{2}x+c$ 与 x 轴交于 A（4，0）、B 两点（点 A 在点 B 的右侧），与 y 轴交于点 C，抛物线的对称轴是直线 $x=\frac{3}{2}$ ，P 为第一象限内抛物线上一点，过点 P 作 PE⊥x 轴于 E，交 AC 于 D，当线段 CP=CD 时，求点 P 的坐标；

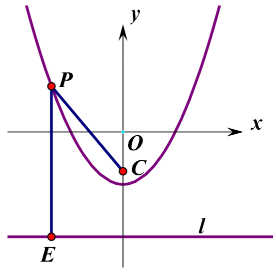


1.易知 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$，∴$C(0,2)$，直线 AC 的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x+2$，设 $P(m,-\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+2)$，则 $D(m,-\frac{1}{2}m+2)$，∴$PD=-\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+2-(-\frac{1}{2}m+2)=-\frac{1}{2}m^2+2m$，作 $CG\perp PD$ 于 G，则 $GE=CO=2$，∵$CP=CD$，∴$PG=GD=2-(-\frac{1}{2}m+2)=\frac{1}{2}m$，∴$PD=2GD=m$，∴$-\frac{1}{2}m^2+2m=m$，解得 $m=0$ 或 $m=2$，∴$P(2,3)$.

15、（2020 五调改）如图，经过（1，0）和（2，3）两点的抛物线 $y=ax^2+c$ 交 x 轴于 A、B 两点，P 是抛物线上一动点，平行于 x 轴的直线 l 经过点 $(0,-2)$.

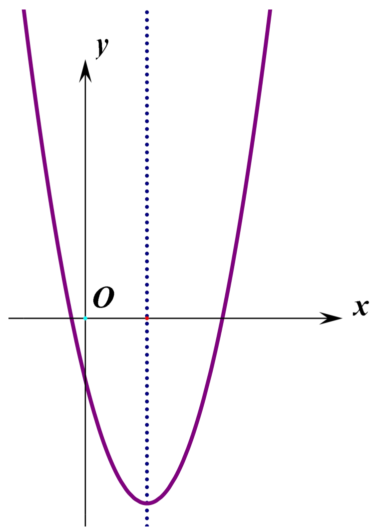
（1）求抛物线的解析式；

（2）若 y 轴上有点 $C\left(0,-\frac{3}{4}\right)$，PE⊥l 于 E，求 PE − PC 的值.



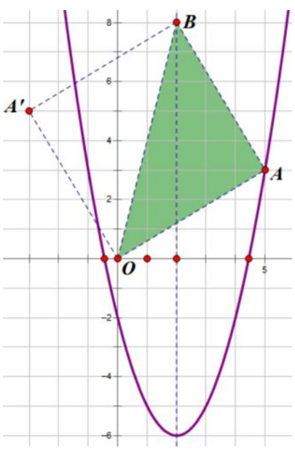
2.（1）$y=x^2-1$；（2）设 $P(m,m^2-1)$，则 $PC=\sqrt{m^2+(m^2-1+\frac{3}{4})^2}=m^2+\frac{1}{4}$，$PE=m^2+1$，故 $PE-PC=\frac{3}{4}$.

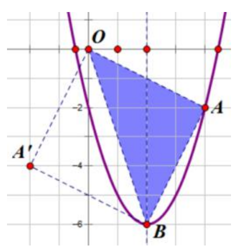
16、（2020 武汉）已知抛物线 $y=x^2-4x-2$，点 A 在对称轴右侧的抛物线上，点 B 在对称轴上，△OAB 是以 OB 为斜边的等腰直角三角形，求 A 点坐标.



2.①$A(m,m^2-4m-2)$，A 点在 x 轴上方时，$\triangle AOF\cong\triangle BAE$，$BE=AF=m^2-4m-2$，∴$m^2-4m-2+2=m$，$m=5$，∴$A(5,3)$.

②点 A 在 x 轴下方时，同理可得 $A(4,-2)$.





17、抛物线 $y=ax^2+c$ 经过点(0,-1),交 x 轴于 A(-1,0),B 两点，点 P 是第一象限内抛物线上一动点.

(1)直接写出抛物线的解析式；

(2)如图 1，已知直线ι的解析式为 $y=x-2$,过点 P 作直线ι的垂线，垂足为 H，当 PH= $\frac{7}{2}\sqrt{2}$时，求点 P 的坐标；

(3)如图 2，当∠APB=45° 时，求点 P 的坐标.

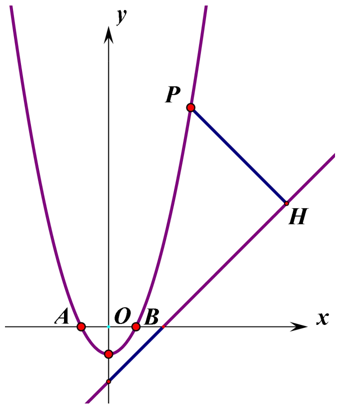


图 1

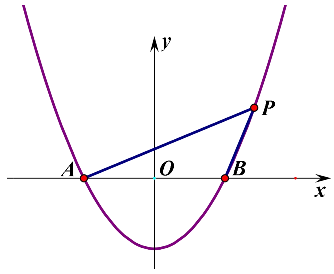


图 2

【详解】将$(0,-1)$，$A(-1,0)$ 代入解析式得，$\begin{cases}c=-1\\a+c=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=1\\c=-1\end{cases}$

抛物线的解析式为 $y=x^2-1$．

（2）设直线l 交x 轴y 轴于点E，F，∴点E 的坐标$(2,0)$，点F 的坐标$(0,-2)$，

$\therefore OE=OF=2$，$\therefore \angle FEO=\angle EFO=45^\circ$．

作$PC//y$ 轴交直线l 于点C，又$PH\perp l$，垂足为H，

$\therefore \angle HCP=\angle CPH=45^\circ$，$\therefore PC=\sqrt{2}PH=\sqrt{2}\times\frac{7}{2}\sqrt{2}=7$，

设点P 点坐标为（a，a^2-1），则C点坐标为（a，$a-2$）

$\therefore PC=a^2-1-(a-2)=7$．

$\therefore a_1=3$，$a_2=-2$（舍去），∴点P 的坐标$(3,8)$．

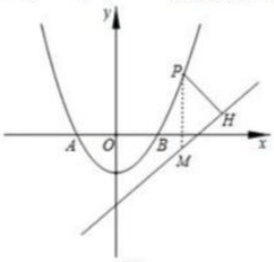


图1

（3）作$PM\perp AB$ 于M，$BQ\perp BP$ 交AP 于Q，$QN\perp AB$ 于N，

设$P(m,m^2-1)(m>1)$，由$B(1,0)$，得$BM=m-1$，$PM=m^2-1$，

在$Rt\Delta PBQ$ 中$\angle APB=45^\circ$，所以$PB=QB$，可证$\Delta PBM\cong\Delta BQN$，

$\therefore QN=BM=m-1$，$BN=PM=m^2-1$，$\therefore Q(2-m^2,m-1)$，

设直线AP 的解析式为$y=kx+b$，

$\begin{cases}0=-k+b\\m^2-1=mk+b\end{cases}$，$\therefore k=m-1$，$b=m-1$，

设直线AP 的解析式为$y=(m-1)x+m-1$．

将点$Q(2-m^2,m-1)$ 的坐标代入直线AP 的解析式为$y=(m-1)x+m-1$，

可得：$m-1=(m-1)(2-m^2)+m-1$，$\therefore(m-1)(2-m^2)=0$，

$\therefore m_1=1$（舍去），$m_2=-\sqrt{2}$（舍去），$m_3=\sqrt{2}$，

$\therefore m=\sqrt{2}$．

∴P点坐标为$(\sqrt{2},1)$．

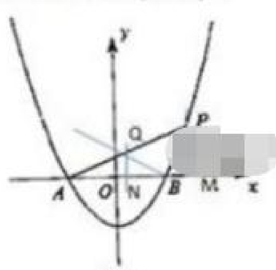


图2

（3）如图2，在y轴上取点D（0，1），则△ABD为等腰直角三角形，

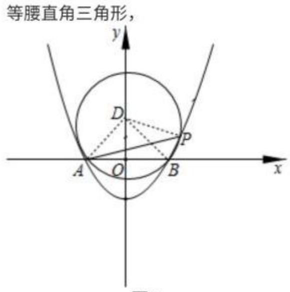


图2

∵$AO=BO=1$，∠$ADB=90°$，

∴ $AD=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，

以点D为圆心、AD长为半径画圆，则点P在优弧AB上时总有∠$APB=45°$，

连结PD，设P点坐标为（m，m^2-1），

∴$PD=\sqrt{m^2+(m^2-2)^2}=\sqrt{2}$，

∴$m^2+(m^2-2)^2=2$，

解得：$m_1=\sqrt{2}$，$m_2=-\sqrt{2}$（舍去），$m_3=1$（舍去），$m_4=-1$（舍去），

∴P（$\sqrt{2}$，1）．

18、如图，已知点 P 在抛物线 $y=\frac{1}{8}x^2$ 上，$F(0,2)$ 在 y 轴上，直线 $l:y=-2$ 与 y 轴交于点 H，$PM\perp l$ 于点 M.

（1）如图 1，若点 P 的横坐标为 6，则 $PF=$ ________，$PM=$ ________；

（2）当 $\angle FPM=60^\circ$ 时，求 P 点的坐标；

（3）如图 2，若点 T 为抛物线上任意一点（原点 O 除外），直线 TO 交 l 于点 G，过点 G 作 $GN\perp l$，交抛物线于点 N，求证：直线 TN 一定经过点 $F(0,2)$.

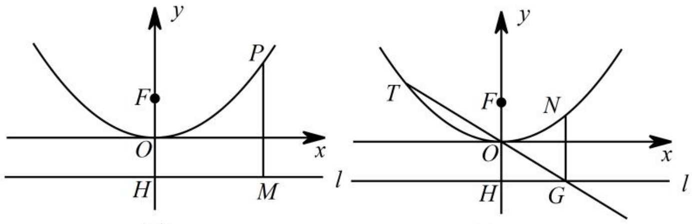


图1 图2

（1）$\frac{13}{2}$；$\frac{13}{2}$

（2）如图 1 中，作 $FH\perp PM$ 于点 H，

设 P 点坐标为 $\left(m,\frac{1}{8}m^2\right)$，则 $PF=\sqrt{m^2+\left(\frac{1}{8}m^2-2\right)^2}=2+\frac{1}{8}m^2$，

因为 $PM=2+\frac{1}{8}m^2$，所以 $PF=PM$，因为 $\angle FPM=60^\circ$，所以 $\triangle PFM$ 是等边三角形，因为 $FP=FM$，$FH\perp PM$，所以 $PH=HM=4$，所以点 P 的纵坐标为 6，

当 $y=6$ 时，$6=\frac{1}{8}x^2$，所以 $x=\pm4\sqrt{3}$，所以点 P 坐标为 $\left(-4\sqrt{3},6\right)$ 或 $\left(4\sqrt{3},6\right)$.

（3）如图 2 中，设点 $T\left(n,\frac{1}{8}n^2\right)$，所以直线 TO 解析式为 $y=\frac{n}{8}x$，

因为直线 $y=-2$ 平行 x 轴，令 $y=-2$，则 $x=-\frac{16}{n}$，

所以直线 TO 与 l 交于 $G\left(-\frac{16}{n},-2\right)$，因为 $NG\perp l$，$l\parallel x$ 轴，

所以 N 点的横坐标为 $-\frac{16}{n}$，因为点 N 在抛物线上，

所以 $N\left(-\frac{16}{n},\frac{32}{n^2}\right)$，设直线 TN 解析式为 $y=kx+b$，

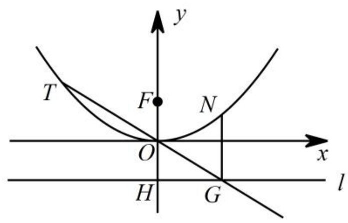


图2

所以 $\begin{cases}nk+b=\frac{1}{8}n^2,\\-\frac{16}{n}\cdot k+b=\frac{32}{n^2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\frac{n^2-16}{8n},\\b=2,\end{cases}$

所以直线 TN 解析式为 $y=\frac{n^2-16}{8n}x+2$，所以直线 TN 一定经过点 $F(0,2)$.