专题复习：二次函数的应用

0、（2021 武汉中考）在“乡村振兴”行动中，某村办企业以 A，B 两种农作物为原料开发了一种有机产品，A 原料的单价是 B 原料单价的 1.5 倍，若用 900 元收购 A 原料会比用 900 元收购 B 原料少 100 kg．生产该产品每盒需要 A 原料 2 kg 和 B 原料 4 kg，每盒还需其他成本 9 元．市场调查发现：该产品每盒的售价是 60 元时，每天可以销售 500 盒；每涨价 1 元，每天少销售 10 盒．

（1）求每盒产品的成本（成本=原料费+其他成本）；

（2）设每盒产品的售价是 x 元（x 是整数），每天的利润是 w 元，求 w 关于 x 的函数解析式（不需要写出自变量的取值范围）；

（3）若每盒产品的售价不超过 a 元（a 是大于 60 的常数，且是整数），直接写出每天的最大利润．

22．解：（1）设 B 原料单价为 m 元，则 A 原料单价为 $1.5m$ 元．

依题意，得 $\frac{900}{m}-\frac{900}{1.5m}=100$.

解得，$m=3$，$1.5m=4.5$.

经检验，$m=3$ 是原方程的根．

∴ 每盒产品的成本为：$4.5\times2+4\times3+9=30$（元）．

答：每盒产品的成本为 30 元．

（2）$w=(x-30)[500-10(x-60)]$

$=-10x^2+1\,400x-33\,000$.

（3）当 $a\geqslant70$ 时，每天的最大利润为 16 000 元；

当 $60<a<70$ 时，每天的最大利润为 $(-10a^2+1\,400a-33\,000)$元．

1、（2019 武汉中考）某商店销售一种商品，经市场调查发现：该商品的周销售量 y（件）是售价 x（元/件）的一次函数，其售价、周销售量、周销售利润 w（元）的三组对应值如表：

售价 x（元/件）	50	60	80
周销售量 y（件）	100	80	40
周销售利润 w（元）	1000	1600	1600

注：周销售利润=周销售量×（售价－进价）

（1）①求 y 关于 x 的函数解析式（不要求写出自变量的取值范围）；

②该商品进价是_______元/件；当售价是_______元/件时，周销售利润最大，最大利润是_______元.

（2）由于某种原因，该商品进价提高了 m 元/件（m>0），物价部门规定该商品售价不得超过 65 元/件，该商店在今后的销售中，周销售量与售价仍然满足（1）中的函数关系。若周销售最大利润是 1400 元，求 m 的值.

（1）①依题意设 $y=kx+b$，

则有 $\begin{cases}50k+b=100\\60k+b=80\end{cases}$

解得：$\begin{cases}k=-2\\b=200\end{cases}$

所以 y 关于 x 的函数解析式为 $y=-2x+200$；

②该商品进价是 $50-1000\div100=40$，

w＝（x－40）（－2x＋200）

$\therefore w=-2x^2+280x-8000=-2(x-70)^2+1800$

，

∴当售价是70元/件时，周销售利润最大，最大利润是1800元；

故答案为：40，70，1800；

或由表中数据对称性可知，x=70 是对称轴

（2）根据题意得，

$w=(x-40-m)(-2x+200)=-2x^2+(280+2m)x-8000-200m$

，

∵对称轴 $x=\frac{140+m}{2}$，

∴①当 $\frac{140+m}{2}<65$ 时（舍），②当 $\frac{140+m}{2}\geqslant65$ 时，$x=65$ 时，w 求最大值 1400，

解得：$m=5$.

2、（2020 武汉中考）某公司分别在 A，B 两城生产同种产品，共 100 件。A 城生产产品的总成本 y（万元）与产品数量 x（件）之间具有函数关系 $y=ax^2+bx$. 当 x=10 时，y=400；当 x=20 时，y=1000. B 城生产产品的每件成本为 70 万元.

（1）求 a，b 的值；

（2）当 A，B 两城生产这批产品的总成本的和最少时，求 A，B 两城各生产多少件？

（3）从 A 城把该产品运往 C，D 两地的费用分别为 m 万元/件和 3 万元/件；从 B 城把该产品运往 C，D 两地的费用分别为 1 万元/件和 2 万元/件。C 地需要 90 件，D 地需要 10 件，在（2）的条件下，直接写出 A，B 两城总运费的和的最小值（用含有 m 的式子表示）.

解：(1)由题意，得 $\begin{cases}100a+10b=400,\\400a+20b=1\,000,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=1,\\b=30.\end{cases}$

(2)由(1)，得 $y=x^2+30x$，

设 A，B 两城生产这批产品的总成本为 w，

则 $w=x^2+30x+70(100-x)$

$=x^2-40x+7\,000$

$=(x-20)^2+6\,600$，

$\because a=1>0$，

由二次函数的性质可知，当 $x=20$ 时，w 取得最小值，最小值为 6 600 万元，此时 $100-20=80$(件).

故 A 城生产 20 件，B 城生产 80 件.

(3)设从 A 城运往 C 地的产品数量为 n 件，A，B 两城总运费的和为 P，

则从 A 城运往 D 地的产品数量为 $(20-n)$ 件，从 B 城运往 C 地的产品数量为 $(90-n)$ 件，从 B 城运往 D 地的产品数量为 $(10-20+n)$ 件，

由题意，得 $\begin{cases}20-n\geqslant 0,\\10-20+n\geqslant 0,\end{cases}$

解得 $10\leqslant n\leqslant 20$，

$\therefore P=mn+3(20-n)+(90-n)+2(10-20+n)$，

整理，得 $P=(m-2)n+130$，

根据一次函数的性质分以下两种情况：

①当 $0<m\leqslant 2$，$10\leqslant n\leqslant 20$ 时，P 随 n 的增大而减小，

则当 $n=20$ 时，P 取最小值，最小值为 $20(m-2)+130=20m+90$；

②当 $m>2$，$10\leqslant n\leqslant 20$ 时，P 随 n 的增大而增大，

则当 $n=10$ 时，P 取最小值，最小值为 $10(m-2)+130=10m+110$.

故当 $0<m\leqslant 2$ 时，A，B 两城总运费的和为 $(20m+90)$ 万元；当 $m>2$ 时，A，B 两城总运费的和为 $(10m+110)$ 万元.

解后反思 1.二元一次方程组应用，根据题意列出方程，常利用加减消元法来解；2.二次函数的最值计算，常化为顶点式，自变量取对称轴时，函数有最值；3.一次函数的变化趋势，当 $k>0$ 时，y 随 x 的增大而增大，当 $k<0$ 时，y 随 x 的增大而减小.本题中 k 的符号不确定时，要注意分类讨论.

3、某大型商场经营某种品牌商品，该商品的进价为每件 3 元，根据市场调查发现，该商品每周的销售量 y（件）与售价 x（元/件）（x 为正整数）之间满足一次函数关系，下表记录的是某三周的有关数据：

x（元/件）	4	5	6
y（件）	10000	9500	9000

（1）求 y 与 x 的函数关系式（不求自变量的取值范围）；

（2）在销售过程中要求销售单价不低于成本价，且不高于 15 元/件。若某一周该商品的销售量不少于 6000 件，求这一周该商场销售这种商品获得的最大利润及对应的售价分别为多少元？

（3）抗疫期间，该商场这种商品售价不大于 15 元/件时，每销售一件商品便向某慈善机构捐赠 m 元（1≤m≤6），捐赠后发现，该商场每周销售这种商品的利润仍随售价的增大而增大。请直接写出 m 的取值范围.

（1）$y=-500x+12000$；（2）这一周该商场销售这种商品获得的最大利润为54000元，售价为12元；（3）$3\le m\le 6$

【解析】

（1）设y与x的函数关系式为：，

$y=kx+b\,(k\ne 0)$

把$x=4$，$y=10000$和$x=5$，$y=9500$代入得，

$\begin{cases}4k+b=10000\\5k+b=9500\end{cases}$，

解得，$\begin{cases}k=-500\\b=12000\end{cases}$，

$\therefore y=-500x+12000$；

（2）根据“在销售过程中要求销售单价不低于成本价，且不高于15元/件．若某一周该商品的销售量不少于6000件，”得，

$\begin{cases}x\ge 3\\x\le 15\\-500x+12000\ge 6000\end{cases}$，

解得，$3\le x\le 12$，

设利润为w元，根据题意得，

$w=(x-3)\,y=(x-3)\,(-500x+12000)$

$=-500x^2+13500x-36000=$

$-500(x-13.5)^2+55125$

$\because -500<0$，

$\therefore$当$x<13.5$时，w随x的增大而增大，

$\because 3\le x\le 12$，且x为正整数

$\therefore$当$x=12$时，w取最大值为：

$-500\times(12-13.5)^2+55125=54000$，

答：这一周该商场销售这种商品获得的最大利润为54000元，售价为12元；

（3）根据题意得，

$w=(x-3-m)\,(-500x+12000)=$

$-500x^2+(13500+500m)\,x-36000$

$-12000m$

，

$\therefore$对称轴为

$x=-\dfrac{13500+500m}{-1000}=13.5+0.5m$，

$\because -500<0$，

$\therefore$当$x\le 13.5+0.5m$时，w随x的增大而增大，

$\because$该商场这种商品售价不大于15元/件时，捐赠后发现，该商场每周销售这种商品的利润仍随售价的增大而增大．

$\therefore 15\le 13.5+0.5m$，

解得，$m\ge 3$，

$\because 1\le m\le 6$，

$\therefore 3\le m\le 6$．

4、鄂北公司以 10 元/千克的价格收购一批产品进行销售，为了得到日销售量 y（千克）与销售价格 x（元/千克）之间的关系，经过市场调查获得部分数据如表：

销售价格 x（元/千克）	10	15	20	25	30
日销售量 y（千克）	300	225	150	75	0

（1）请你根据表中的数据确定 y 与 x 之间的函数表达式；
（2）鄂北公司应该如何确定这批产品的销售价格，才能使日销售利润 W_1（元）最大？
（3）若鄂北公司每销售 1 千克这种产品需支出 a 元（a>0）的相关费用，当 20≤x≤25 时，鄂北公司的日获利 W_2（元）的最大值为 1215 元，求 a 的值.

(1)假设p与x成一次函数关系，设函数关系式为$p=kx+b$，

则$\begin{cases}10k+b=300\\30k+b=0\end{cases}$，

解得：$k=-15$，$b=450$，

$\therefore p=-15x+450$，

检验：当$x=15$，$p=225$；当$x=20$，$p=150$；当$x=25$，$p=75$，符合一次函数解析式；

(2)设日销售利润

$w=p(x-10)=(-15x+450)(x-10)$

即$w=-15x^2+600x-4500$，

$\therefore$当$x=-\dfrac{600}{2\times(-15)}=20$时，$w$有最大值1500元，

故这批农产品的销售价格定为20元，才能使日销售利润最大；

(3)日获利

$Q=p(x-10-a)$

$=(-15x+450)(x-10-a)$

，

即

$w=-15x^2+(600+15a)x$

$-(450a+4500)$

，

对称轴为$x=-\dfrac{15a+600}{2\times(-15)}=20+\dfrac{1}{2}a$，

①若$a\geqslant 10$，则当$x=25$时，Q有最大值，

即$q=1125-75a<1215$(不合题意）；

②若$0<a<10$，则当$x=20+\dfrac{1}{2}a$时，Q有最大值，

将$x=20+\dfrac{1}{2}a$代入，可得

$Q=\dfrac{15}{4}a^2-150a+1500$，

当$Q=1215$时，

$\dfrac{15}{4}a^2-150a+1500=1215$，

解得$a_1=2$，$a_2=38$(舍去），

5、（2020 武汉模拟题）某企业设计了一款工艺品，每件的成本是 50 元，为了合理定价，投放市场进行试销，据市场调查，销售单价是 100 元时，每天的销售量是 50 件，而销售单价每降低 1 元，每天就可多售出 5 件，但要求销售单价不得低于成本.

（1）求出每天的销售利润 y（元）与销售单价 x（元）之间的函数关系式；

（2）求出销售单价为多少元时，每天的销售利润最大？最大利润是多少？

（3）如果该企业要使每天的销售利润不低于 4000 元，且每天的总成本不超过 7000 元，那么销售单价应控制在什么范围内？（每天的总成本=每件的成本×每天的销售量）

(1) $y=(x-50)[50+5(100-x)]$

$=(x-50)(-5x+550)$

$=-5x^2+800x-27500$

$\therefore y=-5x^2+800x$

$-27500\,(50\leqslant x\leqslant 100)$

；

(2) $y=-5x^2+800x-27500$

$=-5(x-80)^2+4500$

$\because a=-5<0$，

$\therefore$抛物线开口向下.

$\because 50\leqslant x\leqslant 100$，对称轴是直线$x=80$，

$\therefore$当$x=80$时，$y_{最大值}=4500$；

（3）当$y=4000$时，

$-5(x-80)^2+4500=4000$，

解得$x_1=70$，$x_2=90$.

$\therefore$当$70\leqslant x\leqslant 90$时，每天的销售利润不低于4000元.

由每天的总成本不超过7000元，得

$50(-5x+550)\leqslant 7000$，

解得$x\geqslant 82$.

$\therefore 82\leqslant x\leqslant 90$，

$\because 50\leqslant x\leqslant 100$，

$\therefore$销售单价应该控制在82元至90元之间.

6、某地政府计划为农户购买农机设备提供补贴.其中购买I型、II型设备农民所投资的金额与政府补贴的额度存在下表所示的函数对应关系.

型号 / 金额	I型设备		II型设备		
投资金额 x（万元）	x	5	x	2	4
补贴金额 y（万元）	$y_1=kx$（$k\neq0$）	2	$y_2=ax^2+bx$（$k\neq0$）	2.8	4

（1）分别求 y_1 和 y_2 的函数解析式；

（2）有一农户共投资 10 万元购买I型、II型两种设备，两种设备的投资均为整数万元，要想获得最大补贴金额，应该如何购买？能获得的最大补贴金额为多少？

（1）设购买Ⅰ型设备补贴的金额的解析式为：$y_1=kx$，购买Ⅱ型设备补贴的金额的解析式为$y_2=ax^2+bx$，

由题意，得：$2=5k$，或$\begin{cases}4a+2b=2.8\\16a+4b=4\end{cases}$，

解得：$k=\frac{2}{5}$，$\begin{cases}a=-\frac{1}{5}\\b=\frac{9}{5}\end{cases}$，

$\therefore y_1$的解析式为：$y_1=\frac{2}{5}x$，y_2的函数解析式为：$y_2=-\frac{1}{5}x^2+\frac{9}{5}x$.

（2）设投资Ⅱ型设备a万元，Ⅰ型设备$(10-a)$万元，补贴金额为W万元：

所以

$$W=y_1+y_2=\frac{2}{5}(10-a)+\left(-\frac{1}{5}a^2+\frac{9}{5}a\right)=-\frac{1}{5}\left(a-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{129}{20}$$

所以当$a=3$或4时，W的最大值$=\frac{32}{5}$，所以投资Ⅰ型设备7万元，Ⅱ型设备3万元；或投资Ⅰ型设备6万元，Ⅱ型设备4万元，获得最大补贴金额，最大补贴金额为$\frac{32}{5}$万元.

7、某农户种植了优质水果蓝莓，今年正式上市销售。在销售的 30 天中，第一天卖出 20 千克，为了扩大销量，采取了降价措施，以后每天比前一天多卖出 4 千克，第 x 天的售价为 y 元/千克，y 关于 x 的函数解析式为 $y=\begin{cases} mx-76m & (1\le x<20) \\ n & (20\le x\le 30)\end{cases}$（x 为正整数），且第 12 天的售价为 32 元/千克，第 26 天的售价为 25 元/千克。已知种植销售蓝莓的成本是 18 元/千克，每天的利润是 W 元（利润=销售收入−成本）。

（1）m=________，n=________；

（2）求销售蓝莓第几天时，当天的利润最大？最大利润是多少？

（3）在销售蓝莓的 30 天中，当天利润不低于 870 元的共有多少天？

(1)因为第12天的售价为32元/千克，第26天的售价为25元/千克代入得:

$\begin{cases} 32=12m-76m \\ n=25\end{cases}$，解得$\begin{cases} n=25 \\ m=-\frac{1}{2}\end{cases}$，

故答案为：25，$-\frac{1}{2}$；

(2)由题意得第x天的销售量为

$20+4(x-1)=4x+16$，

当$1\leqslant x<20$时，

$W=(4x+16)\left(-\frac{1}{2}x+38-18\right)$

$=-2x^2+72x+320=-2(x-18)^2+968$

$\therefore x=18$时，$W_{最大}=968$，

当$20\leqslant x\leqslant 30$时，

$W=(4x+16)(25-18)=28x+112$，

$\because 28>0$，

$\therefore W$随x的增大而增大，

$\therefore x=30$时，$W_{最大}=952$，

$\because 968>952$，

$\therefore x=18$时，$W_{最大}=968$；

(3)当$1\leqslant x<20$时，令

$-2x^2+72x+320=870$

解得$x_1=25, x_2=11$

$\because$抛物线$W=-2x^2+72x+320$的开口向下，

$\therefore 11\leqslant x\leqslant 25$时，$W\geqslant 870$

$\therefore 11\leqslant x<20$

$\because x$为正整数，

$\therefore$有九天利润不低于870元；

当$20\leqslant x\leqslant 30$时，令$28x+112\geqslant 870$解得

$x\geqslant 27\frac{1}{14}$

$\therefore 27\frac{1}{14}\leqslant x\leqslant 30$

$\because x$为正整数，

$\therefore$有三天利润不低于870元，

综上所述，当天利润不低于870元的共有12天.

8、（2021 武汉四调）某商场用 12 000 元购进大、小书包各 200 个，每个小书包比大书包的进价少 20 元．在销售过程中发现，小书包每天的销量 y_1（单位：个）与其销售单价 x（单位：元）有如下关系：$y_1=-x+76$，大书包每天的销量 y_2（单位：个）与其销售单价 z（单位：元）有如下关系：$y_2=-z+80$，其中 x，z 均为整数．商场按照每个小书包和每个大书包的利润率相同的标准确定销售单价，并且销售单价均高于进价

（利润率$=\dfrac{\text{销售单价-进价}}{\text{进价}}$）．

（1）求两种书包的进价；

（2）当小书包的销售单价为多少元时，两种书包每天销售的总利润相同；

（3）当这两种书包每天销售的总利润的和最大时，直接写出此时小书包的销售单价．

解：（1）设每个大书包的进价为 m 元，则每个小书包的进价为$(m-20)$元．

依题意，得 $200(m-20)+200m=12\ 000$． ………………………………………2 分

解得，$m=40$，则 $m-20=20$．

答：每个大书包的进价为 40 元，每个小书包的进价为 20 元． ……………………………3 分

（2）因为每个大、小书包的利润率相同，所以$\dfrac{x-20}{20}=\dfrac{z-40}{40}$，化简，得 $z=2x$． ………4 分

小书包每天的销售利润为：$(-x+76)(x-20)$，

大书包每天的销售利润为：$(-z+80)(z-40)$．

依题意，得$(-x+76)(x-20)=(-z+80)(z-40)$． ……………………………………6 分

化简，得 $x^2-48x+560=0$，

解得，$x_1=28$，$x_2=20$（舍去）．

所以 $x=28$．

答：当小书包的销售单价为 28 元时，两种书包每天销售的总利润相同． ……………7 分

（3）34 元． ………………………………………………10 分

【解析】由题意可列出每天销售的总利润 W=(x-20)(-x+76)+(z-40)(-z+80)，由（2）得：z=2x，代入上式，可得：$W=-5x^2+336x-4720$，对称轴：x=33.6，又因为 x 为整数，则 W(33)=923＜W(34)=924，故小书包的销售单价为 34 元