二次函数大综合（九下）

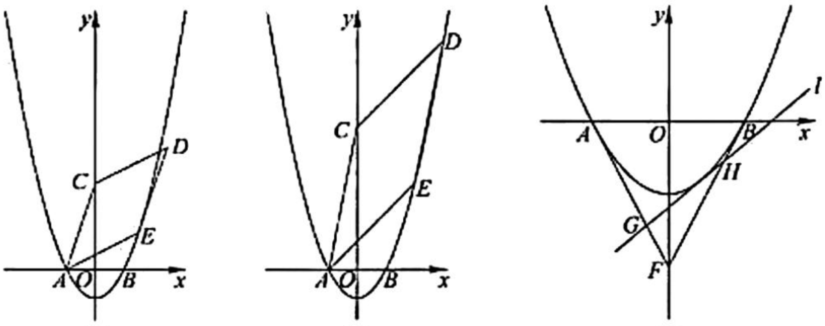
1、（2021 武汉中考）抛物线 $y=x^2-1$ 交 x 轴于 A，B 两点（A 在 B 的左边）.

（1）$\square ACDE$ 的顶点 C 在 y 轴的正半轴上，顶点 E 在 y 轴右侧的抛物线上.

①如图（1），若点 C 的坐标是$(0,3)$，点 E 的横坐标是 $\frac{3}{2}$，直接写出点 A，D 的坐标；

②如图（2），若点 D 在抛物线上，且$\square ACDE$ 的面积是 12，求点 E 的坐标；

（2）如图（3），F 是原点 O 关于抛物线顶点的对称点，不平行 y 轴的直线 l 分别交线段 AF，BF（不含端点）于 G，H 两点，若直线 l 与抛物线只有一个公共点，求证 $FG+FH$ 的值是定值.



（1）　　（2）　　（3）

24.（1）①$A(-1,0)$，$D(\frac{5}{2},\frac{17}{4})$；

②解：设点 C 坐标为$(0,n)$，点 E 坐标为(m,m^2-1) .

∵四边形 $ACDE$ 是平行四边形，

∴将 AC 沿 AE 平移可与 ED 重合，点 D 坐标为$(m+1,m^2-1+n)$.

∵点 D 在抛物线上，∴$m^2-1+n=(m+1)^2-1$.

解得，$n=2m+1$，所以 $C(0,2m+1)$.

连 CE，过点 E 作 x 轴垂线，垂足为 M，过点 C 作 $CN\perp EM$，垂足为 N .

则 $S_{\triangle ACE}=S_{梯形AMNC}-S_{\triangle AME}-S_{\triangle CNE}$.

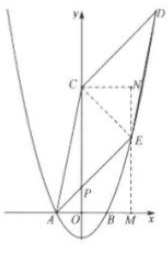
∵$S_{\square ACDE}=12$，$A(-1,0)$，

∴$6=\frac{1}{2}(m+m+1)(2m+1)-\frac{1}{2}(m+1)(m^2-1)-\frac{1}{2}m[2m+1-(m^2-1)]$.

∴$m^2+3m-10=0$. 解得 $m_1=2$，$m_2=-5$（不合题意，舍去）.

∴点 E 的坐标是$(2,3)$.

另解： 直线 AE 交 y 轴于点 P，先运用代数法或几何法求出点 P 的坐标．再运用 $S_{\triangle ACE}=S_{\triangle ACP}+S_{\triangle CEP}$，建立方程可得 m 的值.



（1）②另解：

AE:y=(m-1)(x+1)　（定点式）

设 AE 交 y 轴于 Q，y_Q=m-1

连接 CE，在△ACE 中，用铅垂法：

[(2m+1)-(m-1)](m+1)=12

【下同】

法一： 证明：依题意，得 $B(1,0)$，$F(0,-2)$

设直线 BF 解析式为 $y=kx+b$，则 $\begin{cases}k+b=0,\\b=-2\end{cases}$.　　解得 $\begin{cases}k=2,\\b=-2\end{cases}$.

∴直线 BF 的解析式为 $y=2x-2$.

同理，直线 AF 的解析式为 $y=-2x-2$.

设直线 l 的解析式为 $y=tx+n$.

联立 $\begin{cases}y=tx+n,\\y=x^2-1\end{cases}$，消去 y 得 $x^2-tx-n-1=0$.

∵直线 l 与抛物线只有一个公共点，

∴$\triangle=(-t)^2-4(-n-1)=0$，$n=-\frac{t^2}{4}-1$.

联立 $\begin{cases}y=2x-2,\\y=tx-\frac{t^2}{4}-1\end{cases}$，且 $t\neq 2$，解得，$x_H=\frac{t+2}{4}$

同理，得 $x_G=\frac{t-2}{4}$.

∵A，B 两点关于 y 轴对称，∴$\angle AFO=\angle BFO$.

∴$FG+FH=\frac{-x_G}{\sin\angle AFO}+\frac{x_H}{\sin\angle BFO}=\frac{1}{\sin\angle AFO}(x_H-x_G)=\sqrt{5}$.

∴$FG+FH$ 的值为$\sqrt{5}$.

2、如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 A、B，与 y 轴交于点 C，直线 $y=x+4$ 经过 A、C 两点.

（1）求抛物线的解析式；

（2）在第二象限的抛物线上有一动点 P，过点 P 的直线 $y=kx$ 交 AC 于点 E，若 PE:OE=3:8，求 k 的值.

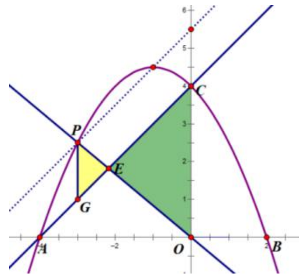
1.(1)$y=-\frac{1}{2}x^2-x+4$；

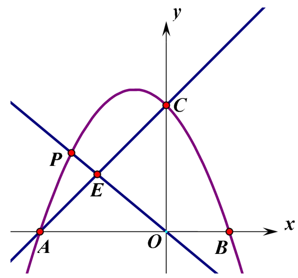
(2)$y=-\frac{1}{2}x^2-x+4$，过 P 点作 $PF/\!/OC$ 交 AC 于点 F，

$\because PF/\!/OC$，$\therefore\triangle PEF\backsim\triangle OEC$，$\therefore\frac{PE}{OE}=\frac{PF}{OC}$.又$\because\frac{PE}{OE}=\frac{3}{8}$，$OC=4$，

$\therefore PF=\frac{3}{2}$，设点 $F(x,x+4)$，$\therefore(-\frac{1}{2}x^2-x+4)-(x+4)=\frac{3}{2}$，

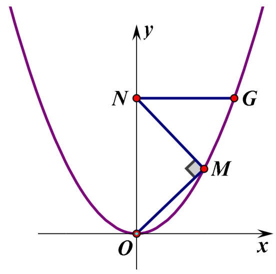
化简得：$x^2+4x+3=0$，解得：$x_1=-1$，$x_2=-3$.即 P 点坐标是$(-1,\frac{9}{2})$或$(-3,\frac{5}{2})$.又$\because$点 P 在直线 $y=kx$ 上，$\therefore k=-\frac{9}{2}$或 $k=-\frac{5}{6}$.





3、已知抛物线 $y=ax^2$，M 为抛物线上一动点，N 在 y 轴上，∠OMN=90°，G 在抛物线上，且 NG⊥y 轴，求证：MN=NG.

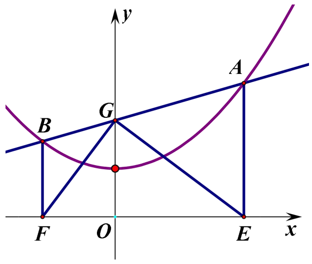
1.过点 M 作 $MK\perp y$ 轴于 K，$\therefore\angle OMN=90^\circ$，易证 $KM^2=OK\cdot KN$，设点 $M(m,am^2)$，则有 $m^2=am^2\cdot KN$，$\therefore KN=\frac{1}{a}$，$\therefore N(0,am^2+\frac{1}{a})$. $\because NG\perp y$ 轴，$\therefore y_G=y_N=am^2+\frac{1}{a}$，$\therefore ax_G^2=am^2+\frac{1}{a}$，$\therefore x_G=\sqrt{m^2+\frac{1}{a^2}}$，$\therefore NG=\sqrt{m^2+\frac{1}{a^2}}$.又$\because M(m,am^2)$，$N(0,am^2+\frac{1}{a})$，$\therefore MN=\sqrt{m^2+\frac{1}{a^2}}$，$\therefore MN=NG$.



4、如图，过(0,2)的直线与抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2+1$ 交于 A、B 两点，过 A、B 两点作 x 轴的垂线，交 x 轴于 E、F，

（1）求 OE・OF 的值

（2）若 AB 交 y 轴于 G，求证：FG⊥EG.



1(1)设 AB 的解析式为 $y=kx+2$，$\begin{cases} y=kx+2 \\ y=\frac{1}{4}x^2+1 \end{cases}$，$\therefore \frac{1}{4}x^2-kx-1=0$，$x_1x_2=-4$，$\therefore OE\cdot OF=-x_1x_2=4$.

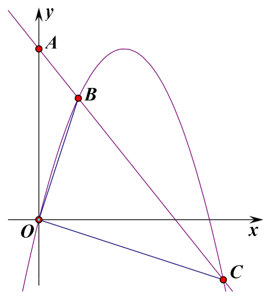
(2)证 $FG^2+EG^2=EF^2$.

【补充解析】（2）常用方法小结：☑**逆用射影定理**、逆用勾股定理、逆用斜边中线、逆用三垂直

5、已知抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 的对称轴为 x=2，且经过原点，直线 $y=kx+4$ 交抛物线于 B、C 两点，交 y 轴于 A 点.

（1）若 $\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle BOC}}=\frac{1}{3}$，求 k 的值；

（2）若以 BC 为直径的圆经过原点，求 k.



1.(1)由 $\begin{cases} y=-x^2+4x, \\ y=kx+4 \end{cases}$ 得 $x^2+(k-4)x+4=0$. $\therefore x_1x_2=4$，$\frac{|x_1|}{|x_2|}=\frac{1}{4}$，得 $\begin{cases} x_1=1, \\ x_2=4, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=-4. \end{cases}$

$x_1+x_2=-k+4$，得 $k_1=9$，$k_2=-1$.

(3)过点 B，C 作 y 轴的垂线分别交于 M，N 点，$B(x_1,kx_1+4)$，$C(x_2,kx_2+4)$. $\triangle OMB\backsim\triangle CNO$，得 $\frac{x_1}{-y_2}=\frac{y_1}{x_2}$，即 $x_1x_2+y_1y_2=0$. $\because$ $x_1{}^2+(k-4)x+4=0$，$\therefore x_1+x_2=-k+4$，$x_1\cdot x_2=4$. 即 $x_1x_2+(kx_1+4)(kx_2+4)=0$，得 $k=-\frac{5}{4}$.

6、如图，抛物线 $y = x^2 + bx + 3$ 与 x 轴正半轴交于 A、B 两点，（A 点在 B 点左边），与 y 轴正半轴交于 C 点，对称轴为 $x = 2$；

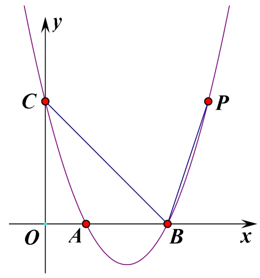
（1）求抛物线的解析式；

（2）将直线 BC 绕点 B 顺时针旋转 α 角，且 tan α =2，旋转后的直线交抛物线于 P 点，求 P 点的坐标；

1.(1)$y=x^2-4x+3$;

(2)设旋转后的直线 $y=kx+b$ 交抛物线于 P,过 C 点作 $CE\perp BC$ 交 BP 的延长线于 E 点,∴$CE=6\sqrt{2}$,∴$E(6,9)$,∴$BP:y=3x-9$,

$\begin{cases} y=3x-9 \\ y=x^2-4x+3 \end{cases}$,∴$P(4,3)$

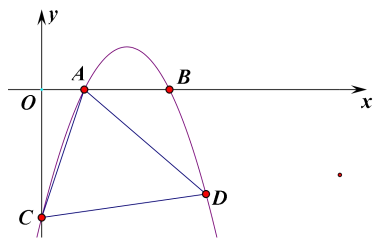


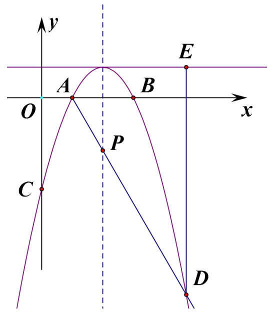
7、已知抛物线 $y = ax^2 + bx + 3a$ 与 x 轴交于 A（1，0），B（x_1，0）两点，与 y 轴交于点 C（0, − 3），过点 A 的直线交对称轴于点 P（位于 x 轴的下方），交抛物线于另一点 D.

（1）求抛物线的解析式；

（2）如图 1，连接 AC、AD，若 tan∠ACD=2，求点 D 的横坐标；

（3）如图 2，过点 D 作直线 y=1 的垂线，垂足为点 E，若 PD=$\sqrt{2}$PE，求点 P 的坐标.





【例】(1)$y=-x^2+4x-3$.

(2)作 $AG\perp AC$ 交 CD 的延长线于 G,作 $GH\perp x$ 轴于 H.

∵$\triangle AOC\backsim\triangle GHA$,∴$AH=6,GH=2$,∴$G(7,-2)$,∴直线 $CD:y=\frac{1}{7}x-3$.

联立 $\begin{cases} y=\frac{1}{7}x-3 \\ y=-x^2+4x-3 \end{cases}$,∴$x^2-\frac{27}{7}x=0,x_1=0,x_2=\frac{27}{7}$,∴点 D 的横坐标为 $\frac{27}{7}$.