



中考复习 相似形专练（第 23 题）

1、（2020 武汉中考）问题背景：如图 1，已知 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ ，求证： $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ ；

尝试应用：如图 2，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 中， $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$ ， $\angle ABC = \angle ADE = 30^\circ$ ， AC 与 DE 相交于点 F ，

点 D 在 BC 边上， $\frac{AD}{BD} = \sqrt{3}$ ，求 $\frac{DF}{CF}$ 的值。

拓展创新：如图 3， D 是 $\triangle ABC$ 内一点， $\angle BAD = \angle CBD = 30^\circ$ ， $\angle BDC = 90^\circ$ ， $AB = 4$ ， $AC = 2\sqrt{3}$ ，直接写出 AD 的长。

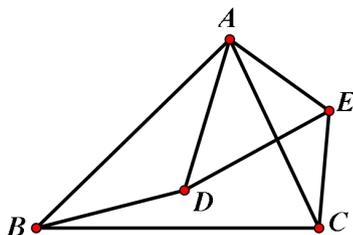


图 1

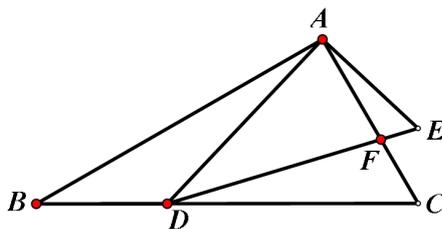


图 2

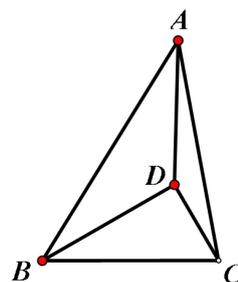


图 3

【例】(1) $\because \triangle ABC \sim \triangle ADE, \therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}, \angle BAC = \angle DAE,$
 $\therefore \angle BAD = \angle CAE, \therefore \triangle ABD \sim \triangle ACE;$
 (2) 连 CE ，由 (1) 中结论知 $\triangle ABD \sim \triangle ACE, \therefore \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE} =$
 $\sqrt{3}$ ，设 $CE = a$ ，则 $AE = \sqrt{3}a, AD = 3a$ ，易证 $\triangle ADF \sim \triangle ECF,$
 $\therefore \frac{DF}{CF} = \frac{AD}{CE} = \frac{3a}{a} = 3;$

(3) 作 $\angle DAE = \angle BAC$ 交 BD 的延长线于点 E ，连 CE, \because
 $\angle ADE = \angle BAD + \angle ABD$ ，又 $\angle BAD = \angle CBD, \therefore \angle ADE =$
 $\angle ABC, \therefore \triangle ABC \sim \triangle ADE$ ，由 (1) 中结论知 $\triangle ABD \sim$
 $\triangle ACE$ ，设 $DC = a$ ，则 $BD = \sqrt{3}a, BC = 2a, \frac{BD}{CE} = \frac{AB}{AC}, CE =$
 $\frac{3}{2}a, \therefore DE = \frac{\sqrt{5}}{2}a, \therefore \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}, \therefore AD = \sqrt{5}.$



2、（2019 武汉中考）在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC=90^\circ$ ， $\frac{AB}{BC}=n$ ，M 是 BC 上一点，连接 AM

(1) 如图 1，若 $n=1$ ，N 是 AB 延长线上一点，CN 与 AM 垂直，求证：BM=BN

(2) 过点 B 作 $BP \perp AM$ ，P 为垂足，连接 CP 并延长交 AB 于点 Q

① 如图 2，若 $n=1$ ，求证： $\frac{CP}{PQ} = \frac{BM}{BQ}$

② 如图 3，若 M 是 BC 的中点，直接写出 $\tan \angle BPQ$ 的值（用含 n 的式子表示）

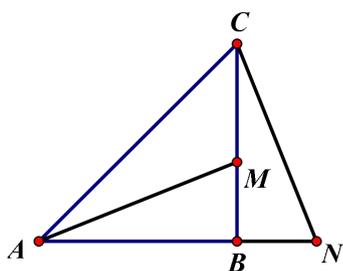


图 1

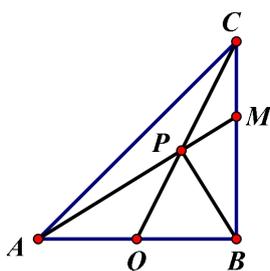


图 2

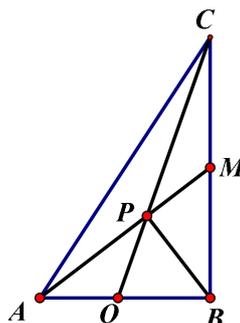


图 3

【例】(1) 易证 $\triangle ABM \cong \triangle CBN$ ， $\therefore BM=CN$ 。

(2) 过点 C 作 $CE \parallel AB$ ，延长 BP 交 CE 于点 E。 $\therefore \triangle PQB \sim \triangle PCE$ ， $\therefore \frac{CP}{PQ} = \frac{BQ}{CE}$ ，易证 $\triangle ABM \cong \triangle BCE$ ， $\therefore BM=CE$ ， \therefore

$$\frac{CP}{PQ} = \frac{BQ}{BM}$$

(3) 过点 C 作 $CE \parallel AB$ ，延长 BP 交 CE 于点 E，过点 C 作 $CF \perp BE$ 。 $\therefore \triangle ABM \sim \triangle BCE$ ， $\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{BM}{CE}$ ， $\therefore CE = \frac{1}{n} \cdot \frac{BM}{AB} =$

$$\frac{PM}{PB} = \frac{PB}{PA}$$

可知： $CF = 2PM = 2k$ ， $BP = FP = 2nk$ ， $\therefore \tan \angle BPQ = \tan$

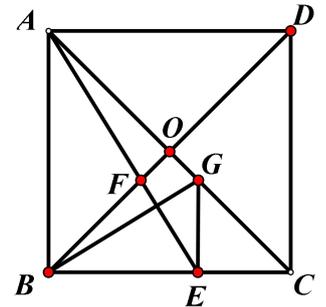
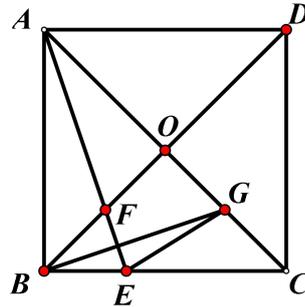
$$\angle CPF = \frac{CF}{PF} = \frac{1}{n}$$



3、（2019 武汉四调）如图，正方形 ABCD 的对角线交于点 O，点 E 在边 BC 上， $BE = \frac{1}{n} BC$ ，AE 交 OB 于点 F，

过点 B 作 AE 的垂线 BG 交 OC 于点 G，连接 GE

- (1) 求证：OF=OG
- (2) 用含有 n 的代数式表示 $\tan \angle OBG$ 的值
- (3) 若 $\angle GEC = 90^\circ$ ，直接写出 n 的值



【例】(1) 证 $\text{Rt}\triangle AOF \cong \text{Rt}\triangle BOG$ ， $\therefore OF = OG$ ；
 (2) 连 FG， $\because OF = OG$ ， $\therefore \angle OGF = 45^\circ = \angle OCB$ ， $\therefore FG \parallel BC \parallel AD$ ， $\therefore \frac{AG}{GC} = \frac{AF}{FE} = \frac{AD}{BE}$ ， $\because BE = \frac{1}{n} BC = \frac{1}{n} AD$ ， $AG = nGC$ ，
 设 $GC = k$ ，则 $AG = nk$ ， $AC = (n+1)k$ ， $\therefore OC = OB = \frac{(n+1)k}{2}$ ， $OG = \frac{(n-1)k}{2}$ ， $\therefore \tan \angle OBG = \frac{OG}{BG} = \frac{n-1}{n+1}$ ；
 (3) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 。

另解：BF 在 AD//BE 的 x 形中求解。



4、如图 1，在正方形 ABCD 中，AB=6，M 为对角线 BD 上任意一点，（不与 B、D 重合），连接 CM，过点 M 作 MN⊥CM，交线段 AB 于点 N

(1) 求证：MN=MC

(2) 若 DM:DB=2:5，求证：AN=4BN

(3) 如图 2，连接 NC 交 BD 于点 G，若 BG:MG=3:5，求 NG·CG 的值

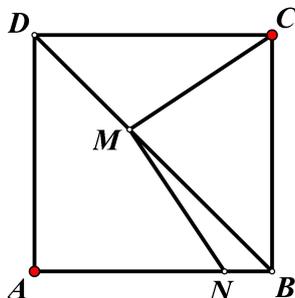


图 1

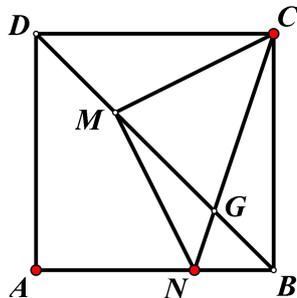


图 2

1.(1)略；

(2)过 M 作 $MF \perp AB$ 于 F, $ME \perp BC$ 于 E, $\therefore FM \parallel AD, EM \parallel CD$, $\therefore \frac{AF}{AB} = \frac{CE}{BC} = \frac{DM}{BD} = \frac{2}{5}$, 设 $AB = 5k, AF = CE = 2k$, 由 $\triangle MFN \cong \triangle MEC$, $\therefore FN = EC = 2k$, $\therefore AN = 4k, BN = k$, $\therefore AN = 4BN$;

(3)把 $\triangle DMC$ 绕 C 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle BHC$, 连 GH, $\triangle DMC \cong \triangle BHC$, $\therefore \angle BCD = 90^\circ$, $\therefore MC = HC, DM = BH$, $\therefore \angle CDM = \angle CBH = 45^\circ$, $\therefore \angle MBH = 90^\circ, \angle MCH = 90^\circ$, $\therefore MC = MN, MC \perp MN$, $\therefore \angle MNC = 45^\circ$, $\therefore \angle NCH = 45^\circ$, $\therefore \triangle MCG \cong \triangle HCG$, $\therefore MG = HG$, \therefore 设 $BG = 3a$, 则 $MG = GH = 5a, BH = \sqrt{GH^2 - GB^2} = 4a$, 则 $MD = 4a, BD = 6\sqrt{2}$, $\therefore DM + MG + BG = 12a = 6\sqrt{2}$, $\therefore a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\therefore BG = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \therefore MG = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, $\therefore \angle MGC = \angle NGB, \angle MCG = \angle GBN = 45^\circ$, $\therefore \triangle MGC \sim \triangle NGB$, $\therefore \frac{CG}{GB} = \frac{MG}{NG}$, $\therefore CG \cdot NG = BG \cdot MG = \frac{15}{2}$.



5、（2018 武汉中考）在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC=90^\circ$

(1) 如图 1，分别过 A、C 两点作经过点 B 的直线的垂线，垂足分别为 M、N，求证： $\triangle ABM \sim \triangle BCN$

(2) 如图 2，P 是边 BC 上一点， $\angle BAP = \angle C$ ， $\tan \angle PAC = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，求 $\tan C$ 的值

(3) 如图 3，D 是边 CA 延长线上一点， $AE=AB$ ， $\angle DEB=90^\circ$ ， $\sin \angle BAC = \frac{3}{5}$ ， $\frac{AD}{AC} = \frac{2}{5}$ ，直接写出 $\tan \angle CEB$ 的值

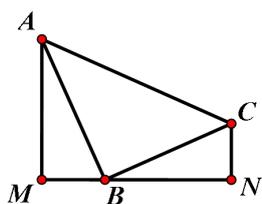


图 1

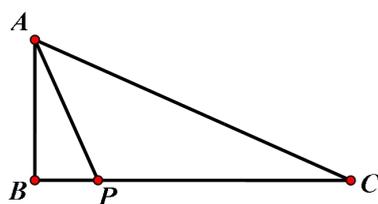


图 2

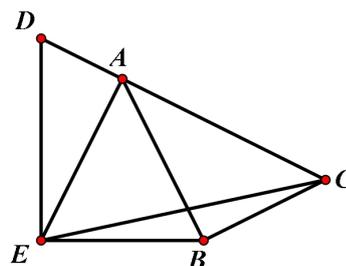


图 3

【例】(1) $\angle ABM + \angle CBN = 90^\circ$, $\therefore \angle BAM = \angle CBN$, $\because \angle AMB = \angle BNC$, $\therefore \triangle ABM \sim \triangle BCN$.

(2) 过点 P 作 $PF \perp AP$ 交 AC 于 F, 在 $\text{Rt} \triangle AFP$ 中, $\tan \angle PAC = \frac{PF}{AP} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, 同(1)的方法得, $\triangle ABP \sim \triangle PAF$, $\therefore \frac{AB}{AP} = \frac{BP}{PF} = \frac{AP}{AF} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 设 $AB = \sqrt{5}a$, $PQ = 2a$, $BP = \sqrt{5}b$, $FQ = 2b$ ($a > 0, b > 0$), $\therefore \triangle ABP \sim \triangle CQF$, $\therefore \frac{CQ}{AB} = \frac{FQ}{BP}$, $\therefore CQ = \frac{AB \cdot FQ}{BP} = 2a$, $\therefore BC = BP + PQ + CQ = \sqrt{5}b + 2a + 2a = 4a + \sqrt{5}b$, $\therefore \triangle ABP \sim \triangle CBA$, $\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{BP}{AB}$, $\therefore BC = \frac{AB^2}{BP} = \frac{5a^2}{\sqrt{5}b} = \frac{\sqrt{5}a^2}{b}$, $\therefore 4a + \sqrt{5}b = \frac{\sqrt{5}a^2}{b}$, $\therefore a = \sqrt{5}b$, $\tan \angle PAB = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

(3) 过点 A 作 $AG \perp BE$ 于 G, 过点 C 作 $CH \perp BE$ 交 EB 的延长线于 H, $\because \angle DEB = 90^\circ$, $\therefore CH \parallel AG \parallel DE$, $\therefore \frac{GH}{EG} = \frac{AC}{AD} = \frac{5}{2}$, 同(1)的方法得, $\triangle ABG \sim \triangle BCH$, $\therefore \frac{BG}{CH} = \frac{AG}{BH} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{3}$, 设 $BG = 4m$, $CH = 3m$, $AG = 4n$, $BH = 3n$, $\because AB = AE$, $AG \perp BE$, $\therefore EG = BG = 4m$, $\therefore GH = BG + BH = 4m + 3n$, $\frac{4m + 3n}{4m} = \frac{5}{2}$, $\therefore n = 2m$, $\therefore EH = EG + GH = 4m + 4m + 3n = 8m + 3n = 8m + 6m = 14m$, 在 $\text{Rt} \triangle CEH$ 中, $\tan \angle BEC = \frac{CH}{EH} = \frac{3}{14}$.



6、(2018·武汉四调)如图 1，在四边形 ABCD 中， $AB \parallel CD$ ，对角线 AC、BD 相交于点 P， $CD^2 = DP \cdot DB$

(1) 求证： $\angle BAC = \angle CBD$

(2) 如图 2，E、F 分别为边 AD、BC 上的点， $PE \parallel DC$ ， $EF \perp BC$

① 求证： $\angle PFC = \angle CPD$

② 若 $BP=2$ ， $PD=1$ ，锐角 $\angle BCD$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，直接写出 BF 的长

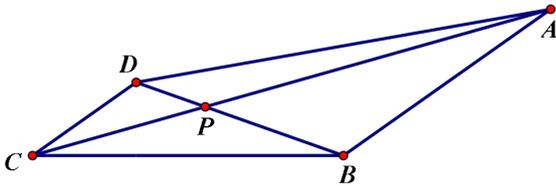


图 1

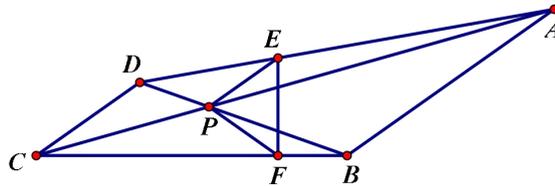


图 2

1.(1)略；

(2)① 延长 EP 交 BC 于 M，由 $CD \parallel EP \parallel AB$ ，得 $\frac{EP}{AB} = \frac{DP}{DB} =$

$\frac{CP}{CA} = \frac{MP}{AB}$ ， $\therefore EP = MP$ ， $\therefore \angle PFC = \angle CPD$ ；

② $\frac{2}{3}\sqrt{2}$.



7、(2016 武汉中考) 在 $\triangle ABC$ 中，P 为边 AB 上一点

(1) 如图 1，若 $\angle ACP = \angle B$ ，求证： $AC^2 = AP \cdot AB$

(2) 若 M 为 CP 的中点， $AC = 2$

① 如图 2，若 $\angle PBM = \angle ACP$ ， $AB = 3$ ，求 BP 的长

② 如图 3，若 $\angle ABC = 45^\circ$ ， $\angle A = \angle BMP = 60^\circ$ ，直接写出 BP 的长

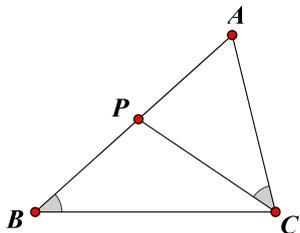


图 1

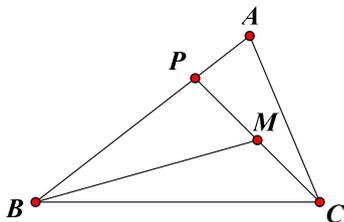


图 2

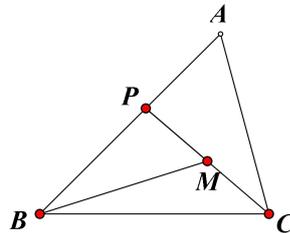


图 3

【例】(1) $\because \angle ACP = \angle B, \angle BAC = \angle CAP, \therefore \triangle ACP \sim \triangle ABC, \therefore AC : AB = AP : AC, \therefore AC^2 = AP \cdot AB;$

(2) ① 取 AP 中点 G，连 MG。设 $AG = x$ ，则 $PG = x, BG = 3 - x$ 。易证 $\triangle APC \sim \triangle GMB, \frac{AP}{GM} = \frac{AC}{BG}$ ，取 $\frac{2x}{1} = \frac{2}{3-x}$

$$\therefore -2x^2 + 6x = 2, \therefore x^2 - 3x + 1 = 0, \therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}. \because AB = 3,$$

$$\therefore AP = 3 + \sqrt{5} (\text{舍}), \text{或 } 3 - \sqrt{5}, \therefore BP = \sqrt{5}.$$

② 如图：作 $CQ \perp AB$ 于点 Q，作 $CP_0 = CP$ 交 AB 于点 P_0 。 \because

$AC = 2, \therefore AQ = 1, CQ = BQ = \sqrt{3}$ ，设 $P_0Q = PQ = 1 - x, BP = \sqrt{3} - 1 + x, \because \angle BPM = \angle CP_0A, \angle BMP = \angle CAP_0, \therefore$

$$\triangle AP_0C \sim \triangle MPB, \therefore \frac{AP_0}{MP} = \frac{P_0C}{BP}, \therefore MP \cdot P_0C = \frac{1}{2} P_0C^2 =$$

$$\frac{(\sqrt{3})^2 + (1-x)^2}{2} = AP_0 \cdot BP = x(\sqrt{3} - 1 + x), \text{解得 } x = \sqrt{7} -$$

$$\sqrt{3}, \therefore BP = \sqrt{3} - 1 + \sqrt{7} - \sqrt{3} = \sqrt{7} - 1.$$

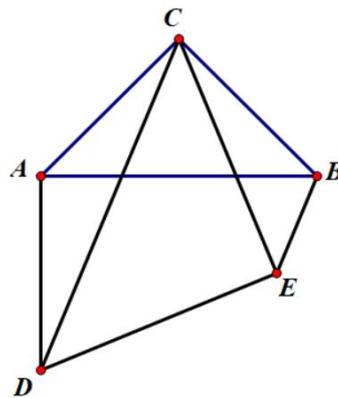
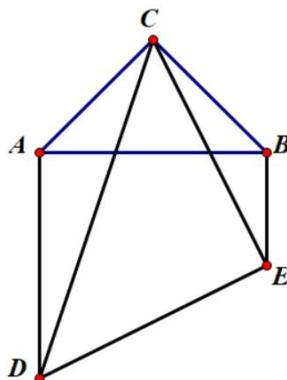


8、（新观察 2021 四调模拟卷 2）在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $AC=BC=2$ ， D 是 AB 下方一点，且 $AD \perp AB$ ，以 CD 为斜边作等腰直角 $\triangle CDE$ ，连接 BE

(1) 如图 1，若 $BE \perp AB$

- ① 求证： $\triangle ACD \sim \triangle BEC$
- ② 求 BE 的长

(2) 如图 2，若 $BE \parallel CD$ ，求 AD 的长



解析

(1) ① $\because AD \perp AB, BE \perp AB$
 $\therefore AD \parallel BE$
 $\therefore \angle ADE + \angle DEB = 180^\circ$
 $\therefore \angle ADC + 45^\circ + 90^\circ + \angle CEB = 180^\circ$
 $\therefore \angle CEB = 45^\circ - \angle ADC$
 又 $\angle CAB = 45^\circ$
 $\therefore \angle DCA = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ - \angle ADC = 45^\circ - \angle ADC$

解析
 $\therefore \angle DCA = \angle CEB$
 又 $\angle DAC = \angle CBE = 135^\circ$
 $\therefore \triangle ACD \sim \triangle BEC$
 ② 令 $CE = a$ ，则 $CD = \sqrt{2}a$ ($CD = \frac{CE}{\sin 45^\circ} = \frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}a$)
 又 $\triangle ACD \sim \triangle BEC$
 $\therefore \frac{AC}{BE} = \frac{CD}{CE}$
 $\frac{2}{BE} = \frac{\sqrt{2}a}{a}$
 $BE = \sqrt{2}$
 $\therefore BE$ 的长为 $\sqrt{2}$
 (2) 如图，过点 B 作 $BM \perp BE$ 交 CE 于点 M ，作 $BN \perp CE$ 于点 N
 $\because BE \parallel CD$
 $\therefore \angle BEC = \angle DCE = 45^\circ$
 $\therefore BM \perp BE$
 $\therefore \angle EMB = \angle BEC = 45^\circ$
 $\therefore BM = BE, \angle CMB = \angle DAC = 135^\circ$
 $\therefore \angle ADL + \angle ACD = \angle ACD + \angle BCM = 45^\circ$
 $\therefore \angle ADL = \angle MCB$
 $\therefore \triangle ADL \sim \triangle MCB$
 $\therefore \frac{DL}{CB} = \frac{AL}{MB}$
 $\therefore BM = BE = 2, CM = 4$

解析
 则 $ME = \sqrt{2}x$
 $\therefore CE = \sqrt{2}x + y$
 $CD = \sqrt{2}(\sqrt{2}x + y) = 2x + \sqrt{2}y$
 $\therefore \frac{2x + \sqrt{2}y}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$
 $\therefore 2x^2 + \sqrt{2}xy + y^2 = 4$ ①
 又 $BN \perp CE$
 $\therefore BN = MN = NE = \frac{1}{2}ME = \frac{\sqrt{2}}{2}x$
 在 $Rt\triangle CNB$ 中有 $CN^2 + NB^2 = BC^2$
 $\therefore (y + \frac{\sqrt{2}}{2}x)^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2}x)^2 = 2^2$
 $y^2 + \sqrt{2}xy + x^2 = 4$ ②
 解得 $x = y$
 $\therefore CM = BM$
 $\therefore AD = AC = 2$
 $\therefore AD$ 的长为 2

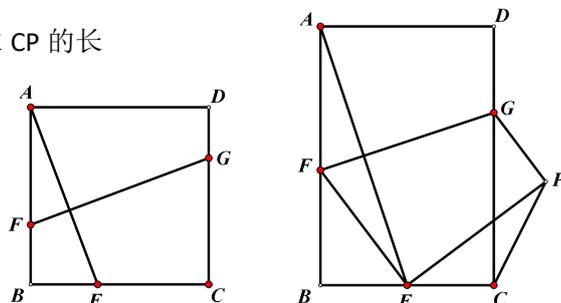


9、（新观察 2021 四调模拟卷 3）（1）问题探究：如图 1，在正方形 ABCD 中，点 E、F、G 分别是 BC、AB、CD 上的点，且 $FG \perp AE$ ，求证：FG=AE

（2）类比应用：如图 2，在矩形 ABCD 中， $AB=nBC$ ， $FG \perp AE$ ，将矩形 ABCD 沿 FG 折叠，使点 A 落在 E 点处，得到梯形 FEFG

① 若点 E 为 BC 的中点，试探究 FG 与 AF 的数量关系；

② 拓展延伸：连接 CP，当 $n=\frac{3}{2}$ 时， $GF=2\sqrt{10}$ ， $\tan \angle CGP=\frac{3}{4}$ ，求 CP 的长



（1）证明：如图，过点 G 作 $GH \perp AB$ 于 H，则 $\angle AHG = \angle FHG = 90^\circ$ ，

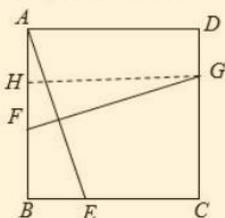


图 1

∵ 在正方形 ABCD 中，
 $\therefore \angle HAD = \angle D = \angle B = 90^\circ$ ， $AD = AB$ ，
 ∴ 四边形 AHGD 为矩形，
 $\therefore AD = HG$ ，
 $\therefore AB = HG$ ，
 $\therefore FG \perp AE$ ，
 $\therefore \angle FQA = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle AFQ + \angle BAE = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle FHG = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle AFQ + \angle FGH = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle BAE = \angle FGH$ ，
 ∴ 在 $\triangle ABE$ 与 $\triangle GHF$ 中

$$\begin{cases} \angle BAE = \angle HGF \\ AB = HG \\ \angle B = \angle FHG \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle GHF$ (ASA)，

$\therefore FG = AE$ ；

（2）① ∵ 点 E 为 BC 的中点，

$$\therefore BE = CE = \frac{1}{2} BC$$

∴ 折叠，

∴ 设 $AF = EF = x$ ，

$$\therefore FB = AB - AF = nBC - x$$

在 $Rt\triangle BFE$ 中， $BF^2 + BE^2 = EF^2$ ，

$$\therefore (nBC - x)^2 + (\frac{1}{2}BC)^2 = x^2$$

$$\text{解得：} x = \frac{4n^2 + 1}{8n} \cdot BC = AF$$

又 $\because AE^2 = AB^2 + BE^2$ ，

$$\therefore AE^2 = (n^2 + \frac{1}{4})BC^2$$

如图，过点 G 作 $GH \perp AB$ 于 H

，则 $\angle AHG = \angle FHG = 90^\circ$ ，

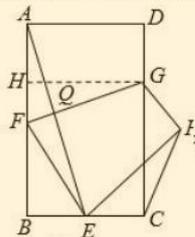


图 2

∴ 在矩形 ABCD 中，

$\therefore \angle HAD = \angle BCD = \angle B = 90^\circ$ ，

∴ 四边形 AHGD 为矩形，

$\therefore BC = HG$ ，

$\therefore \angle FHG = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle AFQ + \angle FGH = 90^\circ$ ，

$\therefore FG \perp AE$ ，

$\therefore \angle FQA = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle AFQ + \angle BAE = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BAE = \angle FGH$ ，

又 $\because \angle FHG = \angle D = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABE \sim \triangle GHF$ ，

$$\therefore \frac{AE}{FG} = \frac{AB}{GH} = \frac{AB}{BC} = n$$

$\therefore AE = nFG$ ，

$$\therefore n^2 FG^2 = AE^2$$

$$\therefore n^2 FG^2 = (n^2 + \frac{1}{4})BC^2$$

$$\therefore FG^2 = \frac{4n^2 + 1}{4n^2} \cdot BC^2$$

$$\text{又} \because AF = \frac{4n^2 + 1}{8n} \cdot BC$$

$$\therefore AF^2 = \frac{(4n^2 + 1)^2}{64n^2} \cdot BC^2$$

$$\therefore \frac{AF^2}{FG^2} = \frac{4n^2 + 1}{16}$$

$$\therefore \frac{AF}{FG} = \frac{\sqrt{4n^2 + 1}}{4}$$

② 如图，过点 P 作 $PM \perp BC$ 于点 M

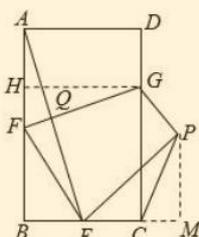


图 2

$$\therefore GF = 2\sqrt{10}, n = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \text{由} \textcircled{1} \text{得} AE = \frac{3}{2}FG = 3\sqrt{10}$$

$\therefore \angle EPG = \angle GCE = 90^\circ$ ， $\angle EOC = \angle GOP$ ，

$\therefore \angle CGP = \angle OEC$ ，

$\therefore \angle FEP = \angle B = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle OEC + \angle BEF = 90^\circ$ ， $\angle BFE + \angle BEF = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BFE = \angle OEC$ ，

$\therefore \angle BFE = \angle CGP$ ，

$$\text{又} \because \tan \angle CGP = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \tan \angle BFE = \frac{BE}{BF} = \frac{3}{4}$$

∴ 设 $BE = 3x$ ， $BF = 4x$ ，

则 $EF = AF = 5x$ ， $AB = 9x$ ，

$$\therefore (9x)^2 + (3x)^2 = (3\sqrt{10})^2$$

解得： $x = 1$ ，

$$\therefore BE = 3, BF = 4, AB = 9$$

$$\therefore BC = \frac{2}{3}AB = 6$$

$$\therefore CE = 3, PE = AD = 6$$

$\therefore \angle FEP = \angle FAD = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle BEF \sim \triangle MPE$ ，

$$\therefore \frac{EF}{PE} = \frac{BF}{ME} = \frac{BE}{MP}$$

$$\therefore \frac{5}{6} = \frac{4}{ME} = \frac{3}{MP}$$

$$\therefore ME = \frac{24}{5}, MP = \frac{18}{5}$$

$$\therefore CM = \frac{24}{5} - 3 = \frac{9}{5}$$

$$\therefore CP = \sqrt{CM^2 + PM^2} = \frac{9}{5}\sqrt{5}$$

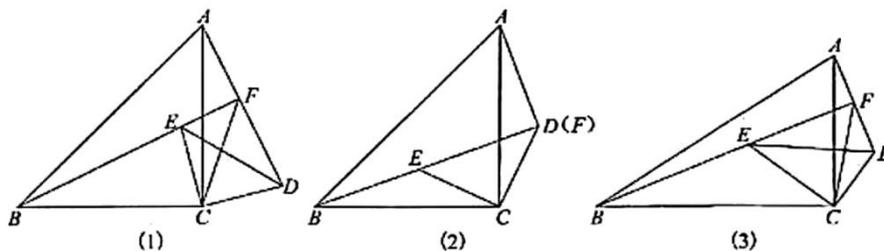


10、(2021 武汉中考) **问题提出** 如图 (1)，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEC$ 中， $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$ ， $BC = AC$ ， $EC = DC$ ，点 E 在 $\triangle ABC$ 内部，直线 AD 与 BE 交于点 F ，线段 AF ， BF ， CF 之间存在怎样的数量关系？

问题探究 (1) 先将问题特殊化. 如图 (2)，当点 D ， F 重合时，直接写出一个等式，表示 AF ， BF ， CF 之间的数量关系；

(2) 再探究一般情形. 如图 (1)，当点 D ， F 不重合时，证明 (1) 中的结论仍然成立.

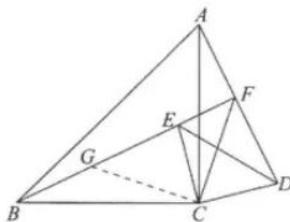
问题拓展 如图 (3)，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEC$ 中， $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$ ， $BC = kAC$ ， $EC = kDC$ (k 是常数)，点 E 在 $\triangle ABC$ 内部，直线 AD 与 BE 交于点 F ，直接写出一个等式，表示线段 AF ， BF ， CF 之间的数量关系.



问题探究 (1) $BF - AF = \sqrt{2} CF$.

(2) 证明：过点 C 作 $CG \perp CF$ 交 BE 于点 G ，则 $\angle FCG = \angle ACB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BCG = \angle ACF$.
 $\because \angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle BCE = \angle ACD$.
 又 $\because AC = BC$ ， $DC = EC$ ，
 $\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE$
 $\therefore \angle CAF = \angle CBG$.
 $\therefore \triangle ACF \cong \triangle BCG$.
 $\therefore AF = BG$ ， $CF = CG$ ， $\therefore \triangle CGF$ 是等腰直角三角形.
 $\therefore GF = \sqrt{2} CF$.



$\therefore BF - AF = BF - BG = GF = \sqrt{2} CF$.

另解：过点 C 作 $\angle BFD$ 两边的垂线也可以求证.

问题拓展 $BF - k \cdot AF = \sqrt{1+k^2} CF$.