



### 中考复习 相似形专练（第 23 题）

1、（2020 武汉中考）问题背景：如图 1，已知  $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ ，求证：  $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ ；

尝试应用：如图 2，在  $\triangle ABC$  和  $\triangle ADE$  中，  $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$ ，  $\angle ABC = \angle ADE = 30^\circ$ ，  $AC$  与  $DE$  相交于点  $F$ ，

点  $D$  在  $BC$  边上，  $\frac{AD}{BD} = \sqrt{3}$ ，求  $\frac{DF}{CF}$  的值。

拓展创新：如图 3，  $D$  是  $\triangle ABC$  内一点，  $\angle BAD = \angle CBD = 30^\circ$ ，  $\angle BDC = 90^\circ$ ，  $AB = 4$ ，  $AC = 2\sqrt{3}$ ，直接写出  $AD$  的长。

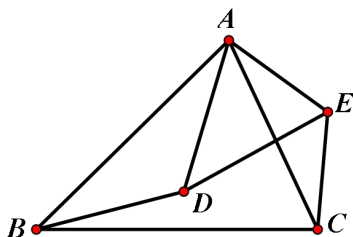


图 1

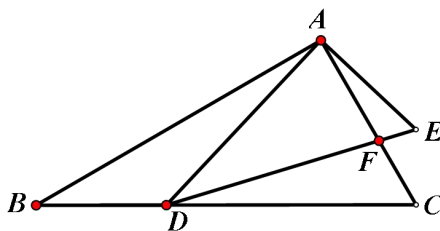


图 2

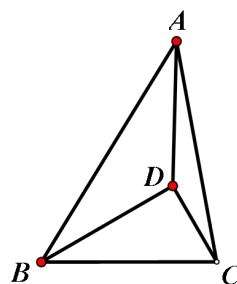


图 3

【例】(1)  $\because \triangle ABC \sim \triangle ADE, \therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}, \angle BAC = \angle DAE,$   
 $\therefore \angle BAD = \angle CAE, \therefore \triangle ABD \sim \triangle ACE;$   
 (2) 连  $CE$ , 由 (1) 中结论知  $\triangle ABD \sim \triangle ACE, \therefore \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE} =$   
 $\sqrt{3}$ , 设  $CE = a$ , 则  $AE = \sqrt{3}a, AD = 3a$ , 易证  $\triangle ADF \sim \triangle ECF,$   
 $\therefore \frac{DF}{CF} = \frac{AD}{CE} = \frac{3a}{a} = 3;$

(3) 作  $\angle DAE = \angle BAC$  交  $BD$  的延长线于点  $E$ , 连  $CE, \because$   
 $\angle ADE = \angle BAD + \angle ABD$ , 又  $\angle BAD = \angle CBD, \therefore \angle ADE =$   
 $\angle ABC, \therefore \triangle ABC \sim \triangle ADE$ , 由 (1) 中结论知  $\triangle ABD \sim$   
 $\triangle ACE$ , 设  $DC = a$ , 则  $BD = \sqrt{3}a, BC = 2a, \frac{BD}{CE} = \frac{AB}{AC}, CE =$   
 $\frac{3}{2}a, \therefore DE = \frac{\sqrt{5}}{2}a, \therefore \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}, \therefore AD = \sqrt{5}.$



2、（2019 武汉中考）在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC=90^\circ$ ， $\frac{AB}{BC}=n$ ，M 是 BC 上一点，连接 AM

- (1) 如图 1，若  $n=1$ ，N 是 AB 延长线上一点，CN 与 AM 垂直，求证：BM=BN  
 (2) 过点 B 作  $BP \perp AM$ ，P 为垂足，连接 CP 并延长交 AB 于点 Q

① 如图 2，若  $n=1$ ，求证： $\frac{CP}{PQ} = \frac{BM}{BQ}$

② 如图 3，若 M 是 BC 的中点，直接写出  $\tan \angle BPQ$  的值（用含 n 的式子表示）

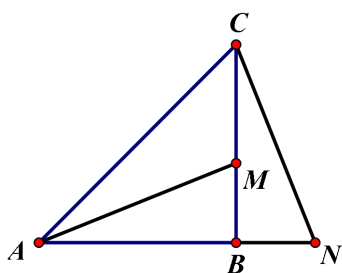


图 1

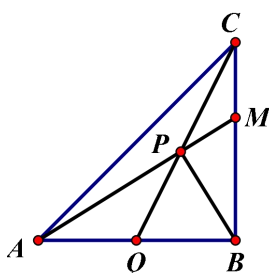


图 2

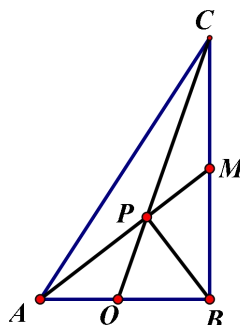


图 3

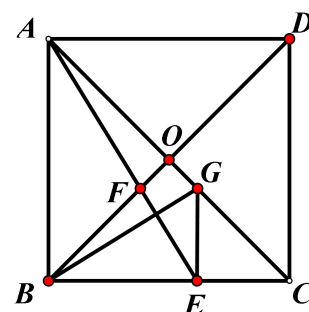
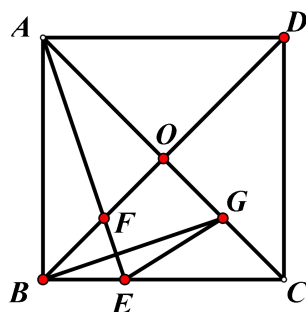
**【例】**(1) 易证 $\triangle ABM \cong \triangle CBN$ ， $\therefore BM=CN$ .  
 (2) 过点 C 作  $CE \parallel AB$ ，延长 BP 交 CE 于点 E.  $\because \triangle PQB \sim \triangle PCE$ ， $\therefore \frac{CP}{PQ} = \frac{BQ}{CE}$ ，易证 $\triangle ABM \cong \triangle BCE$ ， $\therefore BM=CE$ ， $\therefore \frac{CP}{PQ} = \frac{BQ}{BM}$ .  
 (3) 过点 C 作  $CE \parallel AB$ ，延长 BP 交 CE 于点 E，过点 C 作  $CF \perp BE$ .  $\because \triangle ABM \sim \triangle BCE$ ， $\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{BM}{CE}$ ， $\therefore CE = \frac{1}{n} \cdot \frac{BM}{AB} = \frac{PM}{PB} = \frac{PB}{PA}$ ， $\therefore$  设  $PM=k$ ， $BP=2nk$ ， $AP=4n^2k$ ，由中位线定理可知： $CF=2PM=2k$ ， $BP=FP=2nk$ ， $\therefore \tan \angle BPQ = \tan \angle CPF = \frac{CF}{PF} = \frac{1}{n}$ .



3、（2019 武汉四调）如图，正方形 ABCD 的对角线交于点 O，点 E 在边 BC 上， $BE = \frac{1}{n} BC$ ，AE 交 OB 于点 F，

过点 B 作 AE 的垂线 BG 交 OC 于点 G，连接 GE

- (1) 求证：OF=OG
- (2) 用含有 n 的代数式表示  $\tan \angle OBG$  的值
- (3) 若  $\angle GEC = 90^\circ$ ，直接写出 n 的值



【例】(1) 证  $\text{Rt}\triangle AOF \cong \text{Rt}\triangle BOG$ ， $\therefore OF = OG$ ；  
 (2) 连 FG， $\because OF = OG$ ， $\therefore \angle OGF = 45^\circ = \angle OCB$ ， $\therefore FG \parallel BC \parallel AD$ ， $\therefore \frac{AG}{GC} = \frac{AF}{FE} = \frac{AD}{BE}$ ， $\because BE = \frac{1}{n} BC = \frac{1}{n} AD$ ， $AG = nGC$ ，  
 设  $GC = k$ ，则  $AG = nk$ ， $AC = (n+1)k$ ， $\therefore OC = OB = \frac{(n+1)k}{2}$ ， $OG = \frac{(n-1)k}{2}$ ， $\therefore \tan \angle OBG = \frac{OG}{BG} = \frac{n-1}{n+1}$ ；  
 (3)  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 。

另解：BF 在 AD//BE 的 x 形中求解。



4、如图 1，在正方形 ABCD 中，AB=6，M 为对角线 BD 上任意一点，（不与 B、D 重合），连接 CM，过点 M 作 MN⊥CM，交线段 AB 于点 N

(1) 求证：MN=MC

(2) 若 DM:DB=2:5，求证：AN=4BN

(3) 如图 2，连接 NC 交 BD 于点 G，若 BG:MG=3:5，求 NG·CG 的值

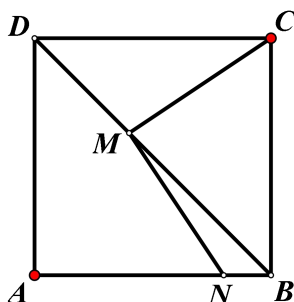


图 1

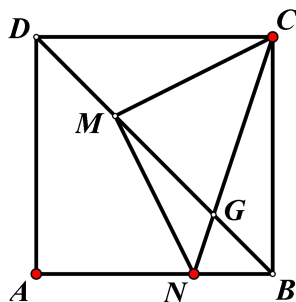


图 2

1.(1)略；

(2)过 M 作  $MF \perp AB$  于 F,  $ME \perp BC$  于 E,  $\therefore FM \parallel AD, EM \parallel CD$ ,  $\therefore \frac{AF}{AB} = \frac{CE}{BC} = \frac{DM}{BD} = \frac{2}{5}$ , 设  $AB = 5k, AF = CE = 2k$ , 由  $\triangle MFN \cong \triangle MEC$ ,  $\therefore FN = EC = 2k$ ,  $\therefore AN = 4k, BN = k$ ,  $\therefore AN = 4BN$ ;

(3)把  $\triangle DMC$  绕 C 逆时针旋转  $90^\circ$  得到  $\triangle BHC$ , 连 GH,  $\triangle DMC \cong \triangle BHC$ ,  $\therefore \angle BCD = 90^\circ$ ,  $\therefore MC = HC, DM = BH$ ,  $\therefore \angle CDM = \angle CBH = 45^\circ$ ,  $\therefore \angle MBH = 90^\circ, \angle MCH = 90^\circ$ ,  $\therefore MC = MN, MC \perp MN$ ,  $\therefore \angle MNC = 45^\circ$ ,  $\therefore \angle NCH = 45^\circ$ ,  $\therefore \triangle MCG \cong \triangle HCG$ ,  $\therefore MG = HG$ ,  $\therefore$  设  $BG = 3a$ , 则  $MG = GH = 5a, BH = \sqrt{GH^2 - GB^2} = 4a$ , 则  $MD = 4a, BD = 6\sqrt{2}$ ,  $\therefore DM + MG + BG = 12a = 6\sqrt{2}$ ,  $\therefore a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\therefore BG = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \therefore MG = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ ,  $\therefore \angle MGC = \angle NGB, \angle MCG = \angle GBN = 45^\circ$ ,  $\therefore \triangle MGC \sim \triangle NGB$ ,  $\therefore \frac{CG}{GB} = \frac{MG}{NG}$ ,  $\therefore CG \cdot NG = BG \cdot MG = \frac{15}{2}$ .



5、（2018 武汉中考）在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC=90^\circ$

(1) 如图 1，分别过 A、C 两点作经过点 B 的直线的垂线，垂足分别为 M、N，求证： $\triangle ABM \sim \triangle BCN$

(2) 如图 2，P 是边 BC 上一点， $\angle BAP = \angle C$ ， $\tan \angle PAC = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，求  $\tan C$  的值

(3) 如图 3，D 是边 CA 延长线上一点， $AE=AB$ ， $\angle DEB=90^\circ$ ， $\sin \angle BAC = \frac{3}{5}$ ， $\frac{AD}{AC} = \frac{2}{5}$ ，直接写出  $\tan \angle CEB$  的值

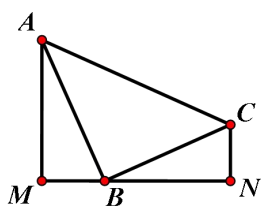


图 1

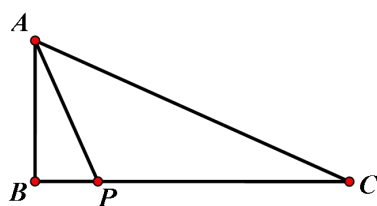


图 2

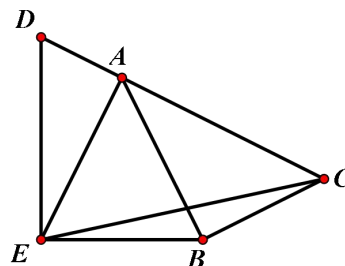


图 3

**【例】**(1)  $\angle ABM + \angle CBN = 90^\circ$ ， $\therefore \angle BAM = \angle CBN$ ， $\because \angle AMB = \angle BNC$ ， $\therefore \triangle ABM \sim \triangle BCN$ 。

(2) 过点 P 作  $PF \perp AP$  交 AC 于 F，在  $\text{Rt}\triangle AFP$  中， $\tan \angle PAC = \frac{PF}{AP} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ，同(1)的方法得， $\triangle ABP \sim \triangle PAF$ ， $\therefore \frac{AB}{PA} = \frac{BP}{AF} = \frac{AP}{PF} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ，设  $AB = \sqrt{5}a$ ， $PQ = 2a$ ， $BP = \sqrt{5}b$ ， $FQ = 2b$  ( $a > 0, b > 0$ )， $\therefore \triangle ABP \sim \triangle CQF$ ， $\therefore \frac{CQ}{AB} = \frac{FQ}{BP}$ ， $\therefore CQ = \frac{AB \cdot FQ}{BP} = 2a$ ， $\therefore BC = BP + PQ + CQ = \sqrt{5}b + 2a + 2a = 4a + \sqrt{5}b$ ， $\therefore \triangle ABP \sim \triangle CBA$ ， $\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{BP}{AB}$ ， $\therefore BC = \frac{AB^2}{BP} = \frac{5a^2}{\sqrt{5}b} = \frac{\sqrt{5}a^2}{b}$ ， $\therefore 4a + \sqrt{5}b = \frac{\sqrt{5}a^2}{b}$ ， $\therefore a = \sqrt{5}b$ ， $\tan \angle PAB = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 。

(3) 过点 A 作  $AG \perp BE$  于 G，过点 C 作  $CH \perp BE$  交 EB 的延长线于 H， $\because \angle DEB = 90^\circ$ ， $\therefore CH \parallel AG \parallel DE$ ， $\therefore \frac{GH}{EG} = \frac{AC}{AD} = \frac{5}{2}$ ，同(1)的方法得， $\triangle ABG \sim \triangle BCH$ ， $\therefore \frac{BG}{CH} = \frac{AG}{BH} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{3}$ ，设  $BG = 4m$ ， $CH = 3m$ ， $AG = 4n$ ， $BH = 3n$ ， $\because AB = AE$ ， $AG \perp BE$ ， $\therefore EG = BG = 4m$ ， $\therefore GH = BG + BH = 4m + 3n$ ， $\frac{4m + 3n}{4m} = \frac{5}{2}$ ， $\therefore n = 2m$ ， $\therefore EH = EG + GH = 4m + 4m + 3n = 8m + 3n = 8m + 6m = 14m$ ，在  $\text{Rt}\triangle CEH$  中， $\tan \angle BEC = \frac{CH}{EH} = \frac{3}{14}$ 。



6、(2018·武汉四调)如图 1，在四边形 ABCD 中， $AB \parallel CD$ ，对角线 AC、BD 相交于点 P， $CD^2 = DP \cdot DB$

(1) 求证： $\angle BAC = \angle CBD$

(2) 如图 2，E、F 分别为边 AD、BC 上的点， $PE \parallel DC$ ， $EF \perp BC$

① 求证： $\angle PFC = \angle CPD$

② 若  $BP=2$ ， $PD=1$ ，锐角  $\angle BCD$  的正弦值为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，直接写出 BF 的长

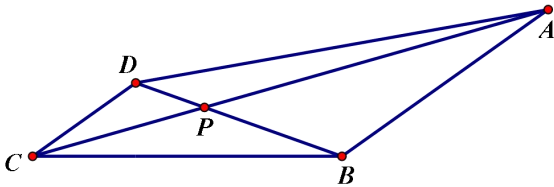


图 1

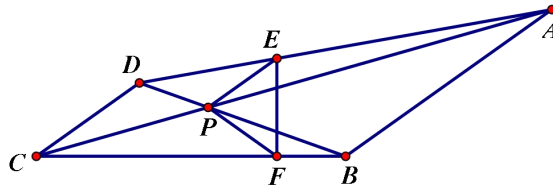


图 2

1.(1)略；

(2)① 延长 EP 交 BC 于 M，由  $CD \parallel EP \parallel AB$ ，得  $\frac{EP}{AB} = \frac{DP}{DB} =$

$\frac{CP}{CA} = \frac{MP}{AB}$ ， $\therefore EP = MP$ ， $\therefore \angle PFC = \angle CPD$ ；

②  $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ .



7、(2016 武汉中考) 在 $\triangle ABC$ 中，P 为边 AB 上一点

(1) 如图 1，若 $\angle ACP = \angle B$ ，求证： $AC^2 = AP \cdot AB$

(2) 若 M 为 CP 的中点， $AC = 2$

① 如图 2，若 $\angle PBM = \angle ACP$ ， $AB = 3$ ，求 BP 的长

② 如图 3，若 $\angle ABC = 45^\circ$ ， $\angle A = \angle BMP = 60^\circ$ ，直接写出 BP 的长

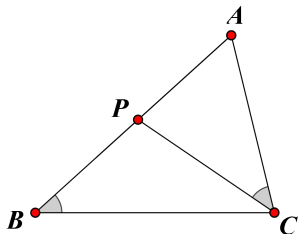


图 1

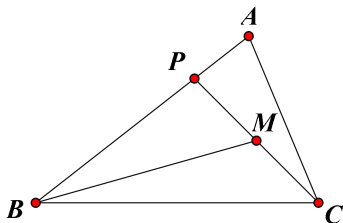


图 2

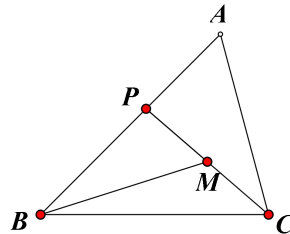


图 3

【例】(1)  $\because \angle ACP = \angle B, \angle BAC = \angle CAP, \therefore \triangle ACP \sim \triangle ABC, \therefore AC : AB = AP : AC, \therefore AC^2 = AP \cdot AB;$

(2) ① 取 AP 中点 G, 连 MG. 设  $AG = x$ , 则  $PG = x, BG = 3 - x$ . 易证  $\triangle APC \sim \triangle GMB, \frac{AP}{GM} = \frac{AC}{BG}$ , 取  $\frac{2x}{1} = \frac{2}{3-x}$

$$\therefore -2x^2 + 6x = 2, \therefore x^2 - 3x + 1 = 0, \therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}. \because AB = 3,$$

$$\therefore AP = 3 + \sqrt{5} (\text{舍}), \text{或 } 3 - \sqrt{5}, \therefore BP = \sqrt{5}.$$

② 如图: 作  $CQ \perp AB$  于点 Q, 作  $CP_0 = CP$  交 AB 于点  $P_0$ .  $\because$

$AC = 2, \therefore AQ = 1, CQ = BQ = \sqrt{3}$ , 设  $P_0Q = PQ = 1 - x, BP = \sqrt{3} - 1 + x, \because \angle BPM = \angle CP_0A, \angle BMP = \angle CAP_0, \therefore$

$$\triangle AP_0C \sim \triangle MPB, \therefore \frac{AP_0}{MP} = \frac{P_0C}{BP}, \therefore MP \cdot P_0C = \frac{1}{2} P_0C^2 =$$

$$\frac{(\sqrt{3})^2 + (1-x)^2}{2} = AP_0 \cdot BP = x(\sqrt{3} - 1 + x), \text{解得 } x = \sqrt{7} -$$

$$\sqrt{3}, \therefore BP = \sqrt{3} - 1 + \sqrt{7} - \sqrt{3} = \sqrt{7} - 1.$$



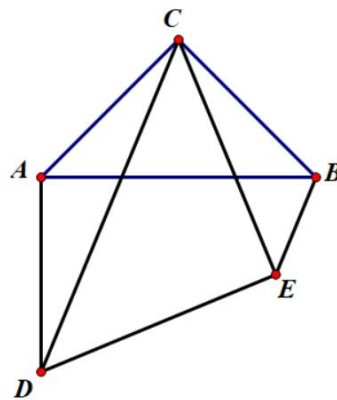
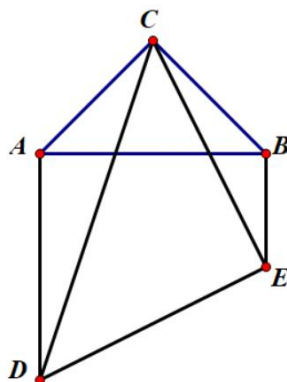


8、（新观察 2021 四调模拟卷 2）在  $\triangle ABC$  中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $AC=BC=2$ ， $D$  是  $AB$  下方一点，且  $AD \perp AB$ ，以  $CD$  为斜边作等腰直角  $\triangle CDE$ ，连接  $BE$

(1) 如图 1，若  $BE \perp AB$

- ① 求证： $\triangle ACD \sim \triangle BEC$
- ② 求  $BE$  的长

(2) 如图 2，若  $BE \parallel CD$ ，求  $AD$  的长



解析

(1) ①  $\because AD \perp AB, BE \perp AB$   
 $\therefore AD \parallel BE$   
 $\therefore \angle ADE + \angle DEB = 180^\circ$   
 $\therefore \angle ADC + 45^\circ + 90^\circ + \angle CEB = 180^\circ$   
 $\therefore \angle CEB = 45^\circ - \angle ADC$   
 又  $\angle CAB = 45^\circ$   
 $\therefore \angle DCA = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ - \angle ADC = 45^\circ - \angle ADC$

解析  
 $\therefore \angle DCA = \angle CEB$   
 又  $\angle DAC = \angle CBE = 135^\circ$   
 $\therefore \triangle ACD \sim \triangle BEC$   
 ② 令  $CE = a$ ，则  $CD = \sqrt{2}a$  ( $CD = \frac{CE}{\sin 45^\circ} = \frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}a$ )  
 又  $\triangle ACD \sim \triangle BEC$   
 $\therefore \frac{AC}{BE} = \frac{CD}{CE}$   
 $\frac{2}{BE} = \frac{\sqrt{2}a}{a}$   
 $BE = \sqrt{2}$   
 $\therefore BE$  的长为  $\sqrt{2}$   
 (2) 如图，过点  $B$  作  $BM \perp BE$  交  $CE$  于点  $M$ ，作  $BN \perp CE$  于点  $N$   
 $\therefore BE \parallel CD$   
 $\therefore \angle BEC = \angle DCE = 45^\circ$   
 $\therefore BM \perp BE$   
 $\therefore \angle EMB = \angle BEC = 45^\circ$   
 $\therefore BM = BE, \angle CMB = \angle DAC = 135^\circ$   
 $\therefore \angle ADL + \angle ACD = \angle ACD + \angle BCM = 45^\circ$   
 $\therefore \angle ADL = \angle MCB$   
 $\therefore \triangle ADL \sim \triangle MCB$   
 $\therefore \frac{DL}{CB} = \frac{AL}{MB}$   
 $\therefore BM = BE = 2, CM = 4$

解析  
 则  $ME = \sqrt{2}x$   
 $\therefore CE = \sqrt{2}x + y$   
 $CD = \sqrt{2}(\sqrt{2}x + y) = 2x + \sqrt{2}y$   
 $\therefore \frac{2x + \sqrt{2}y}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$   
 $\therefore 2x^2 + \sqrt{2}xy + y^2 = 4$  ①  
 又  $BN \perp CE$   
 $\therefore BN = MN = NE = \frac{1}{2}ME = \frac{\sqrt{2}}{2}x$   
 在  $Rt\triangle CNB$  中有  $CN^2 + NB^2 = BC^2$   
 $\therefore (y + \frac{\sqrt{2}}{2}x)^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2}x)^2 = 2^2$   
 $y^2 + \sqrt{2}xy + x^2 = 4$  ②  
 解得  $x = y$   
 $\therefore CM = BM$   
 $\therefore AD = AC = 2$   
 $\therefore AD$  的长为 2



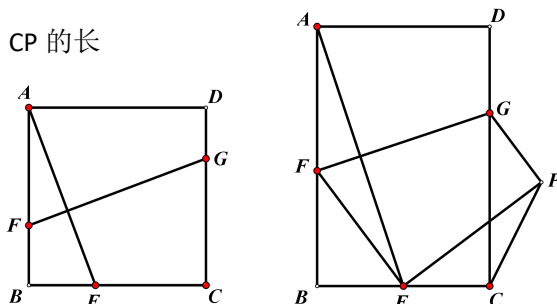


9、（新观察 2021 四调模拟卷 3）（1）问题探究：如图 1，在正方形 ABCD 中，点 E、F、G 分别是 BC、AB、CD 上的点，且  $FG \perp AE$ ，求证：FG=AE

（2）类比应用：如图 2，在矩形 ABCD 中， $AB=nBC$ ， $FG \perp AE$ ，将矩形 ABCD 沿 FG 折叠，使点 A 落在 E 点处，得到梯形 FEFG

① 若点 E 为 BC 的中点，试探究 FG 与 AF 的数量关系；

② 拓展延伸：连接 CP，当  $n=\frac{3}{2}$  时， $GF=2\sqrt{10}$ ， $\tan \angle CGP=\frac{3}{4}$ ，求 CP 的长



（1）证明：如图，过点 G 作  $GH \perp AB$  于 H，则  $\angle AHG = \angle FHG = 90^\circ$ ，

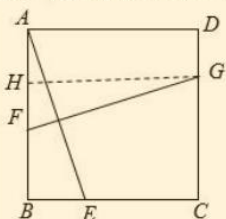


图 1

∵ 在正方形 ABCD 中，  
 $\therefore \angle HAD = \angle D = \angle B = 90^\circ$ ， $AD = AB$ ，  
 ∴ 四边形 AHGD 为矩形，  
 $\therefore AD = HG$ ，  
 $\therefore AB = HG$ ，  
 $\therefore FG \perp AE$ ，  
 $\therefore \angle FQA = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle AFQ + \angle BAE = 90^\circ$ ，  
 $\therefore \angle FHG = 90^\circ$ ，  
 $\therefore \angle AFQ + \angle FGH = 90^\circ$ ，  
 $\therefore \angle BAE = \angle FGH$ ，  
 ∴ 在  $\triangle ABE$  与  $\triangle GHF$  中  
 $\begin{cases} \angle BAE = \angle HGF \\ AB = HG \\ \angle B = \angle FHG \end{cases}$   
 $\therefore \triangle ABE \cong \triangle GHF$  (ASA)，  
 $\therefore FG = AE$ ；

（2）① ∵ 点 E 为 BC 的中点，  
 $\therefore BE = CE = \frac{1}{2} BC$ ，  
 ∴ 折叠，  
 ∴ 设  $AF = EF = x$ ，  
 $\therefore FB = AB - AF = nBC - x$ ，

在  $Rt\triangle BFE$  中， $BF^2 + BE^2 = EF^2$ ，  
 $\therefore (nBC - x)^2 + (\frac{1}{2} BC)^2 = x^2$ ，  
 解得： $x = \frac{4n^2 + 1}{8n} \cdot BC = AF$ ，  
 又  $\because AE^2 = AB^2 + BE^2$ ，  
 $\therefore AE^2 = (n^2 + \frac{1}{4}) BC^2$ ，  
 如图，过点 G 作  $GH \perp AB$  于 H，

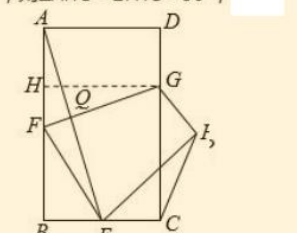


图 2

∴ 在矩形 ABCD 中，  
 $\therefore \angle HAD = \angle BCD = \angle B = 90^\circ$ ，  
 ∴ 四边形 AHGD 为矩形，  
 $\therefore BC = HG$ ，  
 $\therefore \angle FHG = 90^\circ$ ，  
 $\therefore \angle AFQ + \angle FGH = 90^\circ$ ，  
 $\therefore FG \perp AE$ ，  
 $\therefore \angle FQA = 90^\circ$ ，  
 $\therefore \angle AFQ + \angle BAE = 90^\circ$ ，  
 $\therefore \angle BAE = \angle FGH$ ，  
 又  $\because \angle FHG = \angle D = 90^\circ$ ，  
 $\therefore \triangle ABE \sim \triangle GHF$ ，  
 $\therefore \frac{AE}{FG} = \frac{AB}{GH} = \frac{AB}{BC} = n$ ，  
 $\therefore AE = nFG$ ，  
 $\therefore n^2 FG^2 = AE^2$ ，  
 $\therefore n^2 FG^2 = (n^2 + \frac{1}{4}) BC^2$ ，

$$\therefore FG^2 = \frac{4n^2 + 1}{4n^2} \cdot BC^2$$

$$\text{又} \because AF = \frac{4n^2 + 1}{8n} \cdot BC$$

$$\therefore AF^2 = \frac{(4n^2 + 1)^2}{64n^2} \cdot BC^2$$

$$\therefore \frac{AF^2}{FG^2} = \frac{4n^2 + 1}{16}$$

$$\therefore \frac{AF}{FG} = \frac{\sqrt{4n^2 + 1}}{4}$$

② 如图，过点 P 作  $PM \perp BC$  于点 M

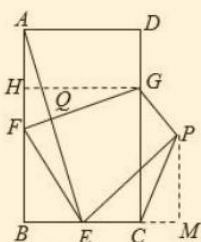


图 2

$$\therefore GF = 2\sqrt{10}, n = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \text{由} \textcircled{1} \text{得} AE = \frac{3}{2} FG = 3\sqrt{10}$$

$$\therefore \angle EPG = \angle GCE = 90^\circ, \angle EOC = \angle GOP$$

$$\therefore \angle CGP = \angle OEC$$

$$\therefore \angle FEP = \angle B = 90^\circ$$

$$\therefore \angle OEC + \angle BEF = 90^\circ, \angle BFE + \angle BEF = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BFE = \angle OEC$$

$$\therefore \angle BFE = \angle CGP$$

$$\text{又} \because \tan \angle CGP = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \tan \angle BFE = \frac{BE}{BF} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \text{设} BE = 3x, BF = 4x$$

$$\text{则} EF = AF = 5x, AB = 9x$$

$$\therefore (9x)^2 + (3x)^2 = (3\sqrt{10})^2$$

$$\text{解得: } x = 1$$

$$\therefore BE = 3, BF = 4, AB = 9$$

$$\therefore BC = \frac{2}{3} AB = 6$$

$$\therefore CE = 3, PE = AD = 6$$

$$\therefore \angle FEP = \angle FAD = 90^\circ$$

$$\therefore \triangle BEF \sim \triangle MPE$$

$$\therefore \frac{EF}{PE} = \frac{BF}{ME} = \frac{BE}{MP}$$

$$\therefore \frac{5}{6} = \frac{4}{ME} = \frac{3}{MP}$$

$$\therefore ME = \frac{24}{5}, MP = \frac{18}{5}$$

$$\therefore CM = \frac{24}{5} - 3 = \frac{9}{5}$$

$$\therefore CP = \sqrt{CM^2 + PM^2} = \frac{9}{5} \sqrt{5}$$

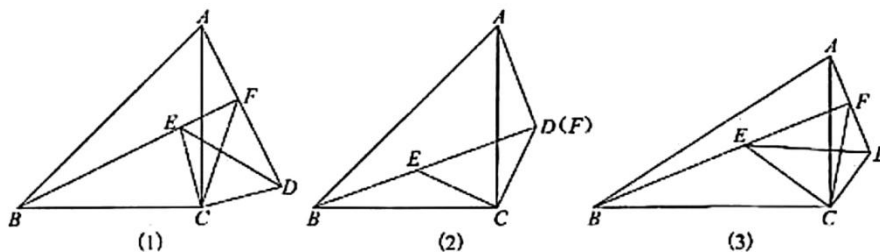


10、(2021 武汉中考) **问题提出** 如图 (1)，在  $\triangle ABC$  和  $\triangle DEC$  中， $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$ ， $BC = AC$ ， $EC = DC$ ，点  $E$  在  $\triangle ABC$  内部，直线  $AD$  与  $BE$  交于点  $F$ ，线段  $AF$ ， $BF$ ， $CF$  之间存在怎样的数量关系？

**问题探究** (1) 先将问题特殊化. 如图 (2)，当点  $D$ ， $F$  重合时，直接写出一个等式，表示  $AF$ ， $BF$ ， $CF$  之间的数量关系；

(2) 再探究一般情形. 如图 (1)，当点  $D$ ， $F$  不重合时，证明 (1) 中的结论仍然成立.

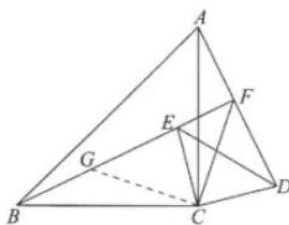
**问题拓展** 如图 (3)，在  $\triangle ABC$  和  $\triangle DEC$  中， $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$ ， $BC = kAC$ ， $EC = kDC$  ( $k$  是常数)，点  $E$  在  $\triangle ABC$  内部，直线  $AD$  与  $BE$  交于点  $F$ ，直接写出一个等式，表示线段  $AF$ ， $BF$ ， $CF$  之间的数量关系.



**问题探究** (1)  $BF - AF = \sqrt{2} CF$ .

(2) 证明：过点  $C$  作  $CG \perp CF$  交  $BE$  于点  $G$ ，则  $\angle FCG = \angle ACB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BCG = \angle ACF$ .  
 $\because \angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$ ，  
 $\therefore \angle BCE = \angle ACD$ .  
 又  $\because AC = BC$ ， $DC = EC$ ，  
 $\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE$   
 $\therefore \angle CAF = \angle CBG$ .  
 $\therefore \triangle ACF \cong \triangle BCG$ .  
 $\therefore AF = BG$ ， $CF = CG$ ， $\therefore \triangle CGF$  是等腰直角三角形.  
 $\therefore GF = \sqrt{2} CF$ .



$\therefore BF - AF = BF - BG = GF = \sqrt{2} CF$ .

另解：过点  $C$  作  $\angle BFD$  两边的垂线也可以求证.

**问题拓展**  $BF - k \cdot AF = \sqrt{1+k^2} CF$ .