21.1-2《一元二次方程》复习

【知识梳理】

一、方程根的意义

1、已知 k 是 $x^2-2021x+1=0$ 的一个根，不解方程，请求出 $k^2-2020k+\frac{2021}{k^2+1}$ 的值

解：由已知得$k^2-2021k+1=0$，所以$k^2+1=2021k$，原式$=k-1+\frac{1}{k}=\frac{k^2-k+1}{k}=\frac{2021k-k}{k}=2020$

2、 已知 a 是方程 $x^2-2021x+1=0$ 的一个根，求代数式 $2a^2-4042a+4$ 的值.

2【解析】 $a^2-2021a+1=0$ ，$2a^2-4042a=-2$，所以，原式=2

二、一元二次方程的解法

描述 **直接开平方法**

利用平方根的定义直接开平方求一元二次方程的解的方法.

形如 $x^2=p$（$p\geqslant 0$）或 $(mx+n)^2=p$（$m\neq 0$，$p\geqslant 0$）就可以直接开平方，可以解得 $x_1=\sqrt{p}$，$x_2=-\sqrt{p}$ 或 $x_1=\frac{-\sqrt{p}-n}{m}$，$x_2=\frac{\sqrt{p}-n}{m}$.

描述 **配方法**

一般步骤：

第一步：使方程左边为二次项和一次项，右边为常数项；

第二步：方程两边同时除以二次项系数；

第三步：方程两边都加上一次项系数一半的平方，把原方程化为 $(x\pm m)^2=n$ 的形式；

第四步：用直接开平方解变形后的方程.

描述 **公式法**

一般步骤：

第一步：化方程为一般形式，即 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）；

第二步：确定 a、b、c 的值，并计算 b^2-4ac 的值；

第三步：当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，将 a、b、c 及 b^2-4ac 的值代入求根公式，得出方程的根 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$；当 $b^2-4ac<0$ 时，方程无实数根.

一元二次方程根的判别式

描述 一般的，式子 b^2-4ac 叫做方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）根的判别式，通常用希腊字母“Δ”表示它，即 $\Delta=b^2-4ac$.

① 当 $\Delta>0$ 时，方程有两个不相等的实数根；

② 当 $\Delta=0$ 时，方程有两个相等的实数根；

③ 当 $\Delta<0$ 时，方程无实数根.

描述 **因式分解法**

一般步骤：

第一步：将已知方程化为一般形式，使方程右端为 0；

第二步：将左端的二次三项式分解为两个一次因式的积；

第三步：方程左边两个因式分别为 0，得到两个一次方程，它们的解就是原方程的解．

十字相乘法专练

（1）$a^2-7a+6=0$

（2）$8x^2+6x-35=0$

（3）$18x^2-21x+5=0$

（4）$20-9y-20y^2=0$

（5）$2x^2+3x+1=0$

（6）$2y^2+y-6=0$

（7）$6x^2-13x+6=0$

（8）$3a^2-7a-6=0$

（9）$6x^2-11x+3=0$

（10）$4m^2+8m+3=0$

【解析】

(1) (a-6)(a-1), (2) (2x+5)(4x-7)

(3) (3x-1)(6x-5) (4) (4y+5)(-5y+4)

(5) (x+1)(2x+1) (6) (y+2)(2y-3)

(7) (2x-3)(3x-2) (8) (a-3)(3a+2)

(9) (2x-3)(3x-1) (10) (2m+1)(2m+3)

三、一元二次方程根与系数的关系

如果 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的两个实数根是 x_1，x_2，那么$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$（**隐含△≥0**）

※ 当一元二次方程的二次项系数为 1 时，设 x_1，x_2 是方程$x^2+px+q=0$ 的两个根，则$x_1+x_2=-p$，$x_1x_2=q$.

一元二次方程根与系数关系的逆用

如果实数 x_1，x_2 满足$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$，那么 x_1，x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的两个根.

以两个实数 x_1，x_2 为根的一元二次方程（二次项系数为 1）是$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$

一元二次方程根与系数的应用

不解方程，利用根与系数的关系求关于 x_1，x_2 的对称式的值，如：

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$ $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$

$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$ $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$

例题 1：已知一元二次方程$x^2+3x-1=0$ 的两根分别是 x_1，x_2，求下列式子的值

① x_1+x_2 ② x_1x_2 ③ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ ④ $x_1^2+x_2^2$

① $x_1+x_2=-3$ ② $x_1x_2=-1$ ③ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=3$ ④ $x_1^2+x_2^2=11$

例题 2：已知 $a^2+2021a-2020=0$，$b^2+2021b-2020=0$，那么 $a+b=$_____，$ab=$_____.（其中，a≠b）

例题 2 变式：已知 $a^2+2021a-2020=0$，$-2020b^2+2021b+1=0$，那么$\frac{a}{b}=$_____.（其中，$a\neq\frac{1}{b}$）

例题 2、a+b=-2021 ab=-2020 例题 2 变式、$\frac{a}{b}=-2020$

例题 3： 设 a，b 是方程 $x^2+x-9=0$ 的两个实数根，则 a^2+2a+b 的值为____8____.

例题 4： 已知一个一元二次方程，它的二次项系数为 1，两根之和为 6，两根之积为 -8，则此方程为 $x^2-6x-8=0$.

例题 5： 已知 x_1，x_2 是关于的一元二次方程 $x^2-3x+a=0$ 的两个实数根，$x_1^2-3x_1x_2+x_2^2=4$，则 $a=$ ____1____.

例题 6： 设 x_1，x_2 是方程 $x^2-x-2020=0$ 的两实数根，则 $x_1^3+2021x_2-2020=$ ____2021____.

5. 【解析】根据题意得 $\Delta=(-3)^2-4\times a\geqslant 0$，解得 $a\leqslant\frac{9}{4}$，$x_1+x_2=3$，$x_1x_2=a$，

$\because$ $x_1^2-3x_1x_2+x_2^2=4$，$\therefore$ $(x_1+x_2)^2-5x_1x_2=4$，$\therefore$ $9-5a=4$，$\therefore$ $a=1$. 故答案为：1.

6. 【解析】由根系关系可得$x_1+x_2=1$，

$\therefore x_1^3+2021x_2-2020=x_1^3+2021x_2-2020=x_1(x_1+2020)+2021x_2-2020$

$=x_1^2+2020x_1+2021x_2-2020=(x_1+2020)+2020x_1+2021x_2-2020=$

$=2021(x_1+x_2)+2020-2020=2021$

例题 7： 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+(2k+3)x+k^2=0$ 有两个不相等的实数根 x_1，x_2．

（1）求 k 的取值范围； （2）若 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=-1$ ，求 k 的值．

解：（1）由题意得 $\Delta=(2k+3)^2-4k^2>0$ ，解得 $k>-\frac{3}{4}$ ．

（2）因为 $x_1+x_2=-(2k+3)$ ，$x_1x_2=k^2$ ，

所以 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-(2k+3)}{k^2}=-1$ ，所以 $k^2-2k-3=0$ ，解得 $k_1=3$，$k_2=-1$ ，

经检验 $k_1=3$，$k_2=-1$ 都是原分式方程的根，由（1）得 $k>-\frac{3}{4}$，所以 $k=3$ ．

例题 8： 设 x_1，x_2 是方程 $2x^2-4mx+2m^2+3m-2=0$ 的两个实根，当 m 为何值时，$x_1^2+x_2^2$ 有最小值?并求这个最小值．

解：由题意知方程有实根，即 $\Delta\geqslant 0$，则 $-24m+16\geqslant 0$ ，解得 $m\leqslant\frac{2}{3}$，

又由根与系数关系，得 $x_1+x_2=2m$ ，$x_1x_2=m^2+\frac{3}{2}m-1$ ．则 $x_1^2+x_2^2=2\left(\frac{3}{4}-m\right)^2+\frac{7}{8}$ ．

因为 $m\leqslant\frac{2}{3}$，所以 $\frac{3}{4}-m\geqslant\frac{3}{4}-\frac{2}{3}>0$ ，从而 $\left(\frac{3}{4}-m\right)^2\geqslant\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)^2$ ．

于是，当 $m=\frac{2}{3}$ 时，$x_1^2+x_2^2$ 取得最小值，且最小值为 $2\times\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{7}{8}=\frac{8}{9}$ ．

【同步练习】

一、选择题

1. 一元二次方程 $4x^2+1=4x$ 的根的情况是 （ C ）

A. 没有实数根　　B. 只有一个实数根

C. 有两个相等的实数根　　D. 有两个不相等的实数根

2. 利用公式法解一元二次方程 $6x^2+\frac{1}{2}=5x$ 时，a，b，c 的值分别是（ C ）

A. 6，$\frac{1}{2}$，5　　B. 6，5，$\frac{1}{2}$　　C. 6，-5，$\frac{1}{2}$　　D. 6，-5，$-\frac{1}{2}$

3. 若 $x=0$ 是关于 x 的一元二次方程 $(m-2)x^2+3x+m^2+2m-8=0$ 的解，则 m 的值为（ C ）

A. 2　　B. -2　　C. -4　　D. 2 或 -4

4. 用配方法解方程 $x^2+6x+4=0$ ，下列变形正确的是（ C ）

A. $(x+3)^2=-4$　　B. $(x-3)^2=4$

C. $(x+3)^2=5$　　D. $(x+3)^2=\pm\sqrt{5}$

5. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+mx-8=0$ 的一个实数根为 2，则另一实数根及 m 的值分别为（ D ）

A. 4，-2　　B. -4，-2　　C. 4，2　　D. -4，2

6. 已知 a，b，c 为常数，点 $P(a,c)$ 在第二象限，则关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 根的情况是（ B ）

A. 有两个相等的实数根　　B. 有两个不相等的实数根

C. 没有实数根　　D. 无法判断

7. 若 $c(c\neq 0)$ 为关于 x 的一元二次方程 $x^2+bx+c=0$ 的根，则 $c+b$ 的值为（ B ）

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

二、填空题

8. 关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x+m-1=0$ 有两个相等的实数根，则 m 的值为 <u>　2　</u>．

9. 关于 x 的一元二次方程 $(p-1)x^2-x+p^2-1=0$ 一个根为 0，则实数 p 的值是 <u>　-1　</u>．

10. 已知等腰三角形的一边长为 9，另一边长为方程 $x^2-8x+15=0$ 的根，则该等腰三角形的周长为 <u>19 或 21 或 23</u>．

【解析】由方程 $x^2-8x+15=0$ 得 $(x-3)(x-5)=0$，

$\therefore x-3=0$ 或 $x-5=0$，解得 $x=3$ 或 $x=5$，当等腰三角形的三边长为 9，9，3 时，其周长为 21；当等腰三角形的三边长为 9，9，5 时，其周长为 23；当等腰三角形的三边长为 9，3，3 时，$3+3<9$，不符合三角形三边关系定理，舍去；当等腰三角形的三边长为 9，5，5 时，其周长为 19；

综上，该等腰三角形的周长为 19 或 21 或 23．

11. 在等腰三角形 ABC 中，$BC=8$，AB，AC 的长是关于 x 的方程 $x^2-10x+m=0$ 的两根，则 m 的值是 <u>16 或 25．</u>

【解析】当 BC 为腰时，8 为方程的一根，$\therefore 8^2-10\times 8+m=0$，$\therefore m=16$；

当 BC 为底时，方程有两个相等的实数根，$\therefore (-10)^2-4m=0$，$\therefore m=25$．当 $m=25$ 时，$x^2-10x+25=0$，解得 $x_1=x_2=5$．$\because 5+5>8$，$\therefore$ 能组成三角形，符合题意．$\therefore m=16$ 或 25．

三、解答题

12. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(k+5)x+3k+6=0$．

（1）求证：此方程总有两个实数根；

（2）若此方程有一个根大于 -2 且小于 0，k 为整数，求 k 的值．

（1） 依题意得 $\Delta=[-(k+5)]^2-4(3k+6)=k^2-2k+1=(k-1)^2$，$\because (k-1)^2\geqslant 0$，

$\therefore$ 此方程总有两个实数根．

（2） 解方程得 $x=\dfrac{(k+5)\pm\sqrt{(k-1)^2}}{2}$．$\therefore$ 方程的两个根为 $x_1=k+2$，$x_2=3$．

由题意可知，$-2<k+2<0$，即 $-4<k<-2$．$\because k$ 为整数，$\therefore k=-3$．

13. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(m+3)x+m+2=0$.

（1）求证：方程总有两个实数根；

（2）若方程两个根的绝对值相等，求此时 m 的值.

（1） $\because \Delta=(m+3)^2-4(m+2)=(m+1)^2\geqslant 0$ ， $\therefore$ 方程总有两个实数根.

（2） $\because x=\dfrac{(m+3)\pm\sqrt{(m+1)^2}}{2}$ ， $\therefore x_1=m+2$ ， $x_2=1$. $\because$ 方程两个根的绝对值相等，

$\therefore m+2=\pm 1$. $\therefore m=-3$ 或 -1 .

14. 已知关于 x 的一元二次方程 $(x-3)(x-2)=p(p+1)$.

（1）试证明：无论 p 取何值此方程总有两个实数根；

（2）若原方程的两根 x_1，x_2 满足 $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=3p^2+1$ ，求 p 的值.

（1） $\because (x-3)(x-2)=p(p+1)$ ， $\therefore x^2-5x+6-p^2-p=0$ ，

$\therefore \Delta=(-5)^2-4\left(6-p^2-p\right)$

$=25-24+4p^2+4p$

$=4p^2+4p+1$ $\therefore$ 无论 p 取何值此方程总有两个实数根.

$=(2p+1)^2$

$\geqslant 0.$

（2） 由（1）知：原方程可化为 $x^2-5x+6-p^2-p=0$ ， $\therefore x_1+x_2=5$ ， $x_1x_2=6-p^2-p$ ，

又 $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=3p^2+1$ ， $\therefore (x_1+x_2)^2-3x_1x_2=3p^2+1$ ，

$\therefore 5^2-3\left(6-p^2-p\right)=3p^2+1$ ， $25-18+3p^2+3p=3p^2+1$ ， $\therefore 3p=-6$ ， $\therefore p=-2$.

15. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-4x-2k+8=0$ 有两个实数根 x_1，x_2.

（1）求 k 的取值范围；

（2）若 $x_1^3x_2+x_1x_2^3=24$ ，求 k 的值.

解：（1） 由题意可知，$\Delta=(-4)^2-4\times 1\times(-2k+8)\geqslant 0$ ，

整理得：$16+8k-32\geqslant 0$ ，解得：$k\geqslant 2$. $\therefore k$ 的取值范围是：$k\geqslant 2$.

（2） 由题意得：$x_1^3x_2+x_1x_2^3=x_1x_2\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]=24$.

由韦达定理可知：$x_1+x_2=4$ ，$x_1x_2=-2k+8$. 故有：$(-2k+8)\left[4^2-2(-2k+8)\right]=24$ ，

整理得：$k^2-4k+3=0$ ，解得：$k_1=3$ ，$k_2=1$. 又由（1）中可知 $k\geqslant 2$ ， $\therefore k$ 的值为 $k=3$.