21.1-2《一元二次方程》复习

【知识梳理】

一、方程根的意义

1、已知 k 是 $x^2-2021x+1=0$ 的一个根，不解方程，请求出 $k^2-2020k+\frac{2021}{k^2+1}$ 的值

2、 已知 a 是方程 $x^2-2021x+1=0$ 的一个根，求代数式 $2a^2-4042a+4$ 的值.

二、一元二次方程的解法

描述 **直接开平方法**

利用平方根的定义直接开平方求一元二次方程的解的方法.

形如 $x^2=p$ ($p\geqslant 0$) 或 $(mx+n)^2=p$ ($m\neq 0$，$p\geqslant 0$) 就可以直接开平方，可以解得 $x_1=\sqrt{p}$，$x_2=-\sqrt{p}$ 或 $x_1=\dfrac{-\sqrt{p}-n}{m}$，$x_2=\dfrac{\sqrt{p}-n}{m}$.

描述 **配方法**

一般步骤：

第一步：使方程左边为二次项和一次项，右边为常数项；

第二步：方程两边同时除以二次项系数；

第三步：方程两边都加上一次项系数一半的平方，把原方程化为 $(x\pm m)^2=n$ 的形式；

第四步：用直接开平方解变形后的方程.

描述 **公式法**

一般步骤：

第一步：化方程为一般形式，即 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$)；

第二步：确定 a、b、c 的值，并计算 b^2-4ac 的值；

第三步：当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，将 a、b、c 及 b^2-4ac 的值代入求根公式，得出方程的根 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$；当 $b^2-4ac<0$ 时，方程无实数根.

一元二次方程根的判别式

描述 一般的，式子 b^2-4ac 叫做方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$) 根的判别式，通常用希腊字母“Δ”表示它，即 $\Delta=b^2-4ac$.

① 当 $\Delta>0$ 时，方程有两个不相等的实数根；

② 当 $\Delta=0$ 时，方程有两个相等的实数根；

③ 当 $\Delta<0$ 时，方程无实数根.

描述 **因式分解法**

一般步骤：

第一步：将已知方程化为一般形式，使方程右端为 0；

第二步：将左端的二次三项式分解为两个一次因式的积；

第三步：方程左边两个因式分别为 0，得到两个一次方程，它们的解就是原方程的解.

十字相乘法专练

（1）$a^2-7a+6=0$

（2）$8x^2+6x-35=0$

（3）$18x^2-21x+5=0$

（4）$20-9y-20y^2=0$

（5）$2x^2+3x+1=0$

（6）$2y^2+y-6=0$

（7）$6x^2-13x+6=0$

（8）$3a^2-7a-6=0$

（9）$6x^2-11x+3=0$

（10）$4m^2+8m+3=0$

三、一元二次方程根与系数的关系

如果 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的两个实数根是 x_1，x_2，那么$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$**（隐含△≥0）**

※ 当一元二次方程的二次项系数为 1 时，设 x_1，x_2 是方程$x^2+px+q=0$ 的两个根，则$x_1+x_2=-p$，$x_1x_2=q$.

一元二次方程根与系数关系的逆用

如果实数 x_1，x_2 满足$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$，那么 x_1，x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的两个根.

以两个实数 x_1，x_2 为根的一元二次方程（二次项系数为 1）是$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$

一元二次方程根与系数的应用

不解方程，利用根与系数的关系求关于 x_1，x_2 的对称式的值，如：

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$　　　　$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$

$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$　　　　$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$　　　　$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$

例题 1：已知一元二次方程$x^2+3x-1=0$ 的两根分别是 x_1，x_2，求下列式子的值

① x_1+x_2　　② x_1x_2　　③ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$　　④ $x_1^2+x_2^2$

例题 2：已知 $a^2+2021a-2020=0$，$b^2+2021b-2020=0$，那么 $a+b=$_____，$ab=$_____.（其中，a≠b）

例题 2 变式：已知 $a^2+2021a-2020=0$，$-2020b^2+2021b+1=0$，那么$\frac{a}{b}=$_____.（其中，$a\neq\frac{1}{b}$）

例题 3： 设 a，b 是方程 $x^2+x-9=0$ 的两个实数根，则 a^2+2a+b 的值为________________.

例题 4： 已知一个一元二次方程，它的二次项系数为 1，两根之和为 6，两根之积为 -8，则此方程为________________.

例题 5： 已知 x_1，x_2 是关于的一元二次方程 $x^2-3x+a=0$ 的两个实数根，$x_1^2-3x_1x_2+x_2^2=4$，则 $a=$ ________________.

例题 6： 设 x_1，x_2 是方程 $x^2-x-2020=0$ 的两实数根，则 $x_1^3+2021x_2-2020=$ ________________.

例题 7： 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+(2k+3)x+k^2=0$ 有两个不相等的实数根 x_1，x_2.

（1）求 k 的取值范围；

（2）若 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=-1$ ，求 k 的值.

例题 8： 设 x_1，x_2 是方程 $2x^2-4mx+2m^2+3m-2=0$ 的两个实根，当 m 为何值时，$x_1^2+x_2^2$ 有最小值?并求这个最小值.

【同步练习】

一、选择题

1. 一元二次方程 $4x^2+1=4x$ 的根的情况是（　　）

   A. 没有实数根　　B. 只有一个实数根

   C. 有两个相等的实数根　　D. 有两个不相等的实数根

2. 利用公式法解一元二次方程 $6x^2+\frac{1}{2}=5x$ 时，a，b，c 的值分别是（　　）

   A. 6，$\frac{1}{2}$，5　　B. 6，5，$\frac{1}{2}$　　C. 6，-5，$\frac{1}{2}$　　D. 6，-5，$-\frac{1}{2}$

3. 若 $x=0$ 是关于 x 的一元二次方程 $(m-2)x^2+3x+m^2+2m-8=0$ 的解，则 m 的值为（　　）

   A. 2　　B. -2　　C. -4　　D. 2 或 -4

4. 用配方法解方程 $x^2+6x+4=0$ ，下列变形正确的是（　　）

   A. $(x+3)^2=-4$　　B. $(x-3)^2=4$

   C. $(x+3)^2=5$　　D. $(x+3)^2=\pm\sqrt{5}$

5. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+mx-8=0$ 的一个实数根为 2，则另一实数根及 m 的值分别为（　　）

   A. 4，-2　　B. -4，-2　　C. 4，2　　D. -4，2

6. 已知 a，b，c 为常数，点 $P(a,c)$ 在第二象限，则关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 根的情况是（　　）

A. 有两个相等的实数根　　B. 有两个不相等的实数根

C. 没有实数根　　D. 无法判断

7. 若 $c\,(c\neq 0)$ 为关于 x 的一元二次方程 $x^2+bx+c=0$ 的根，则 $c+b$ 的值为（　　）

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

二、填空题

8. 关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x+m-1=0$ 有两个相等的实数根，则 m 的值为________________.

9. 关于 x 的一元二次方程 $(p-1)x^2-x+p^2-1=0$ 一个根为 0，则实数 p 的值是________________.

10. 已知等腰三角形的一边长为 9，另一边长为方程 $x^2-8x+15=0$ 的根，则该等腰三角形的周长为________________.

11. 在等腰三角形 ABC 中，$BC=8$，AB，AC 的长是关于 x 的方程 $x^2-10x+m=0$ 的两根，则 m 的值是________________.

三、解答题

12. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(k+5)x+3k+6=0$.

（1）求证：此方程总有两个实数根；

（2）若此方程有一个根大于 -2 且小于 0，k 为整数，求 k 的值.

13. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(m+3)x+m+2=0$.

（1）求证：方程总有两个实数根；

（2）若方程两个根的绝对值相等，求此时 m 的值.

14. 已知关于 x 的一元二次方程 $(x-3)(x-2)=p(p+1)$.

（1）试证明：无论 p 取何值此方程总有两个实数根；

（2）若原方程的两根 x_1，x_2 满足 $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=3p^2+1$ ，求 p 的值.

15. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-4x-2k+8=0$ 有两个实数根 x_1，x_2.

（1）求 k 的取值范围；

（2）若 $x_1^3x_2+x_1x_2^3=24$ ，求 k 的值.