



二次函数与一元二次方程

【学习任务】

理解一元二次方程的根的几何意义，掌握一元二次方程和二次函数的关系。

【知识梳理】

二次函数与方程

在用图象求二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 与 $y = mx + n$ ($m \neq 0$) 的交点时，可将两个函数看成是以 x 、 y 为未知数的方程组 $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c, \\ y = mx + n, \end{cases}$ 则它的解就是这两个函数交点的横、纵坐标。

反之，两个函数图象交点的横、纵坐标也是由函数解析式组成的方程组的解。

二次函数图象与 x 轴

- ① 对于函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 与 x 轴的位置关系， $b^2 - 4ac > 0 \Leftrightarrow$ 抛物线与 x 轴有两个交点；
- ② 对于函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 与 x 轴的位置关系， $b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow$ 抛物线与 x 轴有一个交点；
- ③ 对于函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 与 x 轴的位置关系， $b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow$ 抛物线与 x 轴没有交点。

代数式	作用	字母符号	图象的特征
$b^2 - 4ac$	决定抛物线与 x 轴的交点个数	$b^2 - 4ac > 0$	与 x 轴有两个交点
		$b^2 - 4ac = 0$	与 x 轴有唯一交点
		$b^2 - 4ac < 0$	与 x 轴没有交点

二次函数与不等式

- ① $ax^2 + bx + c > 0$ ($a \neq 0$) 的解集可以看成二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 中， $y > 0$ 时的取值范围，在图象上对应着 x 轴上方的部分对应的横坐标的值；
- ② $ax^2 + bx + c < 0$ ($a \neq 0$) 的解集可以看成二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 中， $y < 0$ 时的取值范围，在图象上对应着 x 轴下方的部分对应的横坐标的值；
- ③ $ax^2 + bx + c > mx + n$ ($ma \neq 0$) 的解集可以通过函数 $y = ax^2 + bx + c$ 与函数 $y = mx + n$ 的图象得到解集，则根据这个方法 $ax^2 + bx + c < mx + n$ ($ma \neq 0$) 的解集也可以得到。

【同步讲练】

一、选择题

1. 若二次函数 $y = x^2 + mx$ 的对称轴是直线 $x = 3$ ，则抛物线 $y = x^2 + mx$ 与 x 轴的交点坐标为 ()
 - A. (0, 0)
 - B. (0, 6)
 - C. (0, 0) 和 (0, 6)
 - D. (0, 0) 和 (6, 0)



9. 对于抛物线 $y = ax^2 - 4ax + 3a$ ，有下列说法：

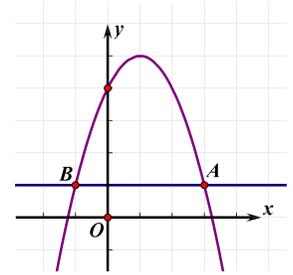
- ①对称轴为直线 $x = 2$ ；
- ②抛物线与 x 轴两交点的坐标分别为 $(1, 0)$ ， $(3, 0)$ ；
- ③顶点坐标为 $(2, -a)$ ；
- ④若 $a < 0$ ，当 $x > 2$ 时，函数 y 随 x 的增大而增大，

其中正确的结论有 ()

- A. 1 个
- B. 2 个
- C. 3 个
- D. 4 个

10. 如图是二次函数 $y = -x^2 + 2x + 4$ 的图象，使 $y \leq 1$ 成立的 x 的取值范围是 ()

- A. $-1 \leq x \leq 3$
- B. $x \leq -1$
- C. $x \geq 1$
- D. $x \leq -1$ 或 $x \geq 3$



第 10 题图

11. 对于二次函数 $y = x^2 - 2mx - 3$ ，下列结论错误的是 ()

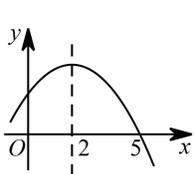
- A. 它的图象与 x 轴有两个交点
- B. 方程 $x^2 - 2mx = 3$ 的两根之积为 -3
- C. 它的图象的对称轴在 y 轴的右侧
- D. $x < m$ 时， y 随 x 的增大而减小

12. 函数 $y = ax^2 + 2ax + m$ ($a < 0$) 的图象过点 $(2, 0)$ ，则使函数值 $y < 0$ 成立的 x 的取值范围是 ()

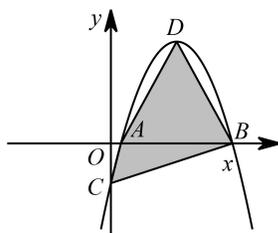
- A. $x < -4$ 或 $x > 2$
- B. $-4 < x < 2$
- C. $x < 0$ 或 $x > 2$
- D. $0 < x < 2$

13. 如图是二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的部分图象，由图象可知不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集是 ()

- A. $-1 < x < 5$
- B. $x > 5$
- C. $x < -1$ 且 $x > 5$
- D. $x < -1$ 或 $x > 5$



第 13 题图



第 14 题图

14. 如图，平面直角坐标系内，二次函数 $y = -x^2 + 4x - k$ 的图形与 x 轴交于 A ， B 两点，与 y 轴交于 C 点，其顶点为 D ，且 $k > 0$ 。若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABD$ 的面积比为 $1:4$ ，则 k 值为 ()

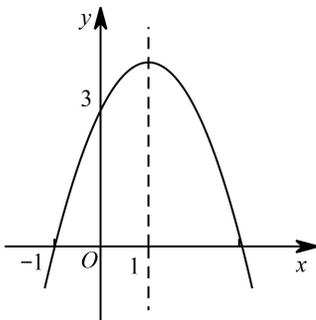
- A. 1
- B. $\frac{1}{2}$
- C. $\frac{4}{3}$
- D. $\frac{4}{5}$



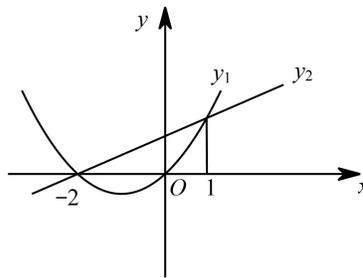
15. 二次函数 $y = x^2 - 8x + 15$ 的图象与 x 轴相交于 L, M 两点, N 点在该函数的图象上运动, 能使 $\triangle LMN$ 的面积等于 2 的点 N 共有 ()
- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个
16. 若函数 $y = mx^2 + (m + 2)x + \frac{1}{2}m + 1$ 的图象与 x 轴只有一个交点, 那么 m 的值为 ()
- A. 0 B. 0 或 2
C. 2 或 -2 D. 0 或 2 或 -2

二、填空题

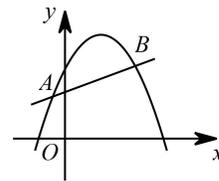
17. 若二次函数 $y = (k - 2)x^2 + 2x + 1$ 的图象与 x 轴有交点, 则 k 的取值范围是_____.
18. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示, 则当 $y \geq 0$ 时, x 的取值范围是_____.



第 18 题图



第 19 题图



第 21 题图

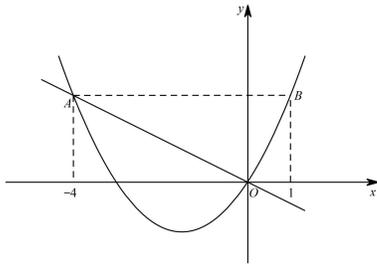
19. 如图, 二次函数 $y_1 = ax^2 + bx + c$ 和一次函数 $y_2 = mx + n$ 的图象, 观察图象, 写出 $y_2 \leq y_1$ 时 x 的取值范围_____.
20. 二次函数 $y = (x - 1)^2 + 1$, 当 $2 \leq y < 5$ 时, 相应 x 的取值范围为_____.
21. 如图, 直线 $y = mx + n$ 与抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 交于 $A(-1, p)$, $B(4, q)$ 两点, 则关于 x 的不等式 $mx + n > ax^2 + bx + c$ 的解集是_____.



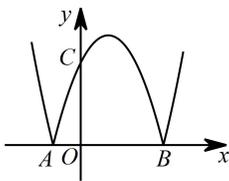
22. 设 a 为实数，若方程 $|(x+3)(x+1)| = x+a$ 有且仅有三个实数根，则 a 的值为_____.

23. 已知函数 $y = \begin{cases} (x-2)^2 - 2, & x \leq 4 \\ (x-6)^2 - 2, & x > 4 \end{cases}$ ，使 $y = a$ 成立的 x 的值恰好只有 3 个时， a 的值为_____.

24. 如图，二次函数 $y_1 = ax^2 + bx + c$ 与函数 $y_2 = kx$ 的图象交于点 A 和原点 O ，点 A 的横坐标为 -4 ，点 A 和点 B 关于抛物线的对称轴对称，点 B 的横坐标为 1 ，则满足 $0 < y_1 < y_2$ 的 x 的取值范围是_____.



25. 已知抛物线 $y = x^2 - 2x - 3$ 与 x 轴相交于 A, B 两点，其顶点为 M ，将此抛物线在 x 轴下方的部分沿 x 轴翻折，其余部分保持不变，得到一个新的图象. 如图，当直线 $y = -x + n$ 与此图象有且只有两个公共点时，则 n 的取值范围为_____.



26. 将函数 $y = x^2$ 的图象向右平移 2 个单位得函数 y_1 的图象，将 y 与 y_1 合起来构成新图象，直线 $y = m$ 被新图象依次截得三段的长相等，则 $m =$ _____.



二次函数与一元二次方程 答案

第一部分

1. D 2. D 3. D 4. A 5. D 6. C 7. C 【解析】根据图象得二次函数

$y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象与 x 轴交点坐标为 $(-3, 0)$, $(1, 0)$,

而 $ax^2 + bx + c < 0$, 即 $y < 0$,

故 $-3 < x < 1$.

8. B 9. C 10. D 【解析】由图可知, $x \leq -1$ 或 $x \geq 3$ 时, $y \leq 1$

11. C 12. A 13. A 【解析】由图象可知, 抛物线与 x 轴的一个交点为 $(5, 0)$, 对称轴是 $x = 2$,

根据抛物线的对称性可知抛物线与 x 轴的另一个交点的坐标为 $(-1, 0)$. 由图象看出当 $-1 < x < 5$

时, 函数图象在 x 轴上方, 所以不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集是 $-1 < x < 5$.

14. D 15. C 16. D

第二部分

17. $k \leq 3$ 且 $k \neq 2$

18. $-1 \leq x \leq 3$

19. $x \geq 1$ 或 $x \leq -2$

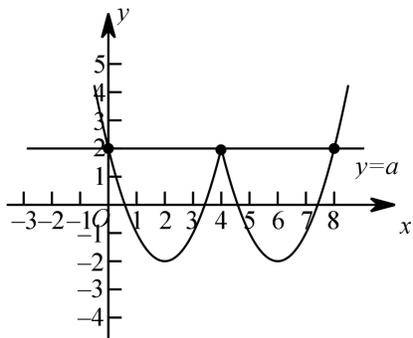
20. $-1 < x \leq 0$ 或 $2 \leq x < 3$

21. $x < -1$ 或 $x > 4$

22. 3 或 $\frac{13}{4}$

23. 2

【解析】画出函数解析式的图象, 要使 $y = a$ 成立的 x 的值恰好只有 3 个, 即函数图象与 $y = a$ 这条直线有 3 个交点, 如图:



24. $-4 < x < -3$

25. $n > \frac{21}{4}$ 或 $-1 < n < 3$

26. $\frac{1}{4}$ 或 4