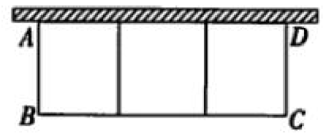
22.3 实际问题与二次函数

一、解答题

1. 如图，在一面靠墙的空地上，用长 24 米的篱笆围成中间隔有两道篱笆的长方形花圃，墙的最大可用长度为 8 米，设花圃的一边 AB 的长为 x 米，面积为 S 平方米.



（1）求 S 与 x 之间的函数关系式；

（2）求自变量 x 的取值范围；

（3）当 x 取何值时，所围成的花圃面积最大？最大面积是多少？

2. 某种商品的进价为 40 元/件，以获利不低于 20% 的价格销售时，商品的销售单价 y（元/件）与销售数量 x（件）（x 是正整数）之间的关系如下表：

x (件)	⋯	5	10	15	20	⋯
y (元/件)	⋯	75	70	65	60	⋯

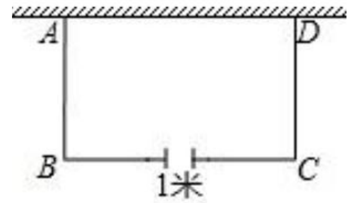
（1）当销售单价不低于最低销售单价时，y 是 x 的一次函数．求出 y 与 x 的函数关系式及 x 的取值范围；

（2）在（1）的条件下，当销售单价为多少元时，所获销售利润最大，最大利润是多少元？

3. 某农场准备围建一个矩形养鸡场，其中一边靠墙（墙的长度为 15 米），其余部分用篱笆围成，在墙所对的边留一道 1 米宽的门，已知篱笆的总长度为 23 米.

（1）设图中 AB（与墙垂直的边）的长为 x 米，则 AD 的长为_________米（请用含 x 的代数式表示）；

（2）若整个鸡场的总面积为 y m^2，求 y 的最大值.



4. 某商家销售一款商品，进价每件 80 元，售价每件 145 元，每天销售 40 件，每销售一件需支付给商场管理费 5 元，未来一个月（按 30 天计算），这款商品将开展“每天降价 1 元”的促销活动，即从第一天开始每天的单价均比前一天降低 1 元，通过市场调查发现，该商品单价每降 1 元，每天销售量增加 2 件，设第 x 天（$1 \leqslant x \leqslant 30$ 且 x 为整数）的销售量为 y 件.

（1）直接写出 y 与 x 的函数关系式；

（2）设第 x 天的利润为 w 元，试求出 w 与 x 之间的函数关系式，并求出哪一天的利润最大，最大利润是多少元.

5. 某商场经营某种品牌的童装，购进时的单价是 60 元．根据市场调查，在一段时间内，销售单价是 80 元时，销售量是 200 件，而销售单价每降低 1 元，就可多售出 20 件．

（1）写出销售量 y（件）与销售单价 x（元）之间的函数关系式；

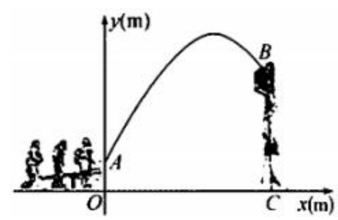
（2）写出销售该品牌童装获得的利润 w（元）与销售单价 x（元）之间的函数关系式；

（3）若童装厂规定该品牌童装销售单价不低于 76 元，且商场要完成不少于 240 件的销售任务，则商场销售该品牌童装获得的最大利润是多少元？

6. 杂技团进行杂技表演，演员从跷跷板右端 A 处弹跳到人梯顶端椅子 B 处．其身体（看成一点）的运动路线是抛物线 $y=-\frac{3}{5}x^2+3x+1$ 的一部分，如图所示．

（1）求演员弹跳过程中离地面的最大高度．

（2）已知人梯高 $BC=3.4\ \mathrm{m}$，在一次表演中，人梯到起跳点 A 的水平距离是 4 m，则这次表演是否成功？请说明理由．



7. 某汽车租赁公司拥有 20 辆汽车．据统计，当每辆车的日租金为 400 元时，可全部租出；当每辆车的日租金每增加 50 元，未租出的车将增加 1 辆；公司平均每日的各项支出共 4800 元．设公司每日租出 x 辆车时，日收益为 y 元．（日收益 = 日租金收入 − 平均每日各项支出）

（1）公司每日租出 x 辆车时，每辆车的日租金为________ 元（用含 x 的代数式表示）；

（2）当每日租出多少辆时，租赁公司日收益最大？最大是多少元？

（3）当每日租出多少辆时，租赁公司的日收益不盈也不亏？

8. 某宾馆有 50 个房间供游客住宿．若每个房间每天的定价为 180 元，房间会全部住满；当每个房间每天的定价每增加 10 元时，就会有一个房间空闲．另外需宾馆对每个居住房间每天支出 20 元的各种费用．房价定为多少时，宾馆利润最大？

9. 某工艺品厂每天生产一款工艺品，已知这款工艺品的生产成本为每件 60 元．经市场调研发现：该款工艺品每天的销售量 y（件）与售价 x（元）之间存在着如下表所示的一次函数关系，且满足 $65 \leqslant x \leqslant 95$ ．

售价 x (元)	$\cdots$	65	80	$\cdots$
销售量 y (件)	$\cdots$	3500	2000	$\cdots$

[利润 =（售价 − 成本价）× 销售量]

（1）求销售量 y（件）与售价 x（元）之间的函数关系式；

（2）你认为如何定价才能使工艺品厂每天获得的利润为 30000 元？

10. 据了解，购买 A 种花苗 3 盆，B 种花苗 5 盆，需 210 元；购买 A 种花苗 4 盆，B 种花苗 10 盆，需 380 元．

（1）求 A，B 两种花苗的单价分别是多少元？

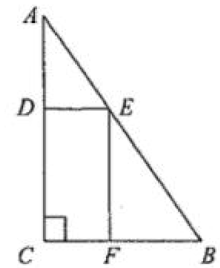
（2）经九年级一班班委会商定，决定购买 A，B 两种花苗共 12 盆进行搭配装扮教室．种植基地销售人员为了支持本次活动，为该班提供以下优惠：购买几盆 B 种花苗，B 种花苗每盆就降价几元，请你为九年级一班的同学预算一下，本次购买至少准备多少钱？最多准备多少钱？

11. 如图，D，E，F 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 三边上的点，且四边形 $CDEF$ 为矩形，$BC=6$，$\angle A=30^{\circ}$．

（1）求 AB 的长；

（2）设 $AE=x$，则 $DE=$ ________，$EF=$ ________（用含 x 的表达式表示）；

（3）求矩形 $CDEF$ 的面积的最大值．



12. 在“新冠”疫情期间，全国人民“众志成城，同心抗疫”，某商家决定将一个月获得的利润全部捐赠给社区用于抗疫．已知商家购进一批产品，成本为 10 元/件，拟采取线上和线下两种方式进行销售．调查发现，线下的月销量 y（单位：件）与线下售价 x（单位：元/件，$12\leqslant x<24$）满足一次函数的关系，部分数据如下表：

$x/$(元/件)	12	13	14	15	16
$y/$袋	1200	1100	1000	900	800

（1）求 y 与 x 的函数关系式；

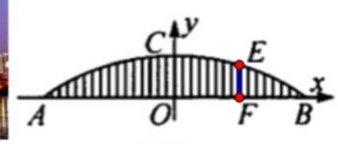
（2）若线上售价始终比线下每件便宜 2 元，且线上的月销量固定为 400 件．试问：当 x 为多少时，线上和线下月利润总和达到最大？并求出此时的最大利润．

13. 连接着汉口集家咀和汉阳南岸咀的江汉三桥（晴川桥），是一座下承式钢管混凝土系杆拱桥．它犹如一道美丽的彩虹跨越汉江，是江城武汉的一道靓丽景观．桥的拱肋 ACB 可以视为某抛物线的一部分，桥面（视为水平的）与拱肋用垂直于桥面的系杆连接，相邻系杆之间的间距均为 5 米（不考虑系杆的粗细），拱肋的跨度 AB 为 280 米，距离拱肋右端 70 米处的系杆 EF 的长度为 42 米．以 AB 所在的直线为 x 轴，抛物线的对称轴为 y 轴，建立如图②所示的平面直角坐标系．

（1）求抛物线的解析式．

（2）正中间系杆 OC 的长度是多少米？是否存在一根系杆的长度恰好是 OC 长度的一半？请说明理由．

图①

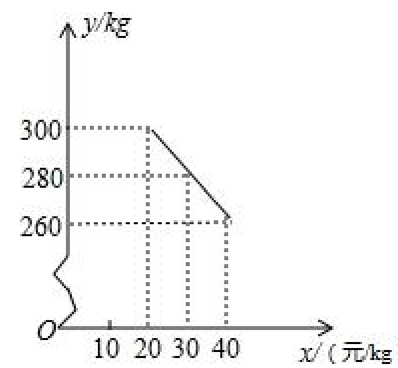


图②

14. 草莓是云南多地盛产的一种水果，今年某水果销售店在草莓销售旺季试销售成本为每千克 18 元的草莓，规定试销期间销售单价不低于成本单价，也不高于每千克 40 元．经试销发现，销售量 $y\,(\mathrm{kg})$ 与销售单价 $x\,(元/\mathrm{kg})$ 符合一次函数关系，如图是 y 与 x 的函数关系图象．

（1）求 y 与 x 的函数解析式；

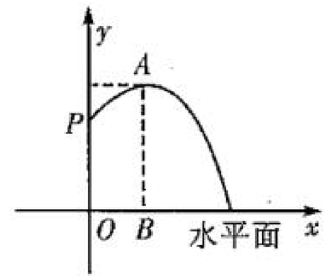
（2）设该水果销售店试销草莓获得的利润为 W 元，求 W 的最大值．



15. 要建造一个圆形的喷水池，在水池中央安装一个柱子 OP，P 处装上喷头，由 P 处向外喷出的水流（在各个方向上）沿形状相同的抛物线路径落下．已知 $OP=3$ 米，喷出的水流的最高点 A 距水平面的高度是 4 米，离柱子 OP 的距离为 1 米．

（1）求这条抛物线的函数关系式；

（2）水池的半径至少要多少米，才能使喷出的水流不落到池外？

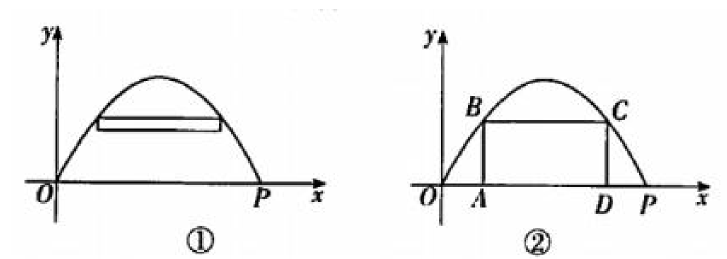


16. 某公园要修建一个抛物线型拱门，其最大高度为 4.5 米，宽度 OP 为 6 米，现以地面（OP 所在的直线）为 x 轴建立平面直角坐标系（如图所示）．

（1）求这条抛物线的函数表达式；

（2）如图①所示，公园想在抛物线型拱门距地面 3 米处钉两个钉子以便拉一条横幅，请计算该横幅的宽度为多少米；

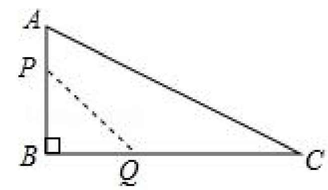
（3）为修建该拱门，施工队需搭建一个矩形“支架”$ABCD$（由四根木杆 AB，BC，CD，DA 组成），使 B，C 两点在抛物线上，A，D 两点在地面 OP 上（如图②所示），请你帮施工队计算一下最多需要准备多少米该种木杆．



17. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=90^\circ$，$AB=12$ 米，$BC=24$ 米，动点 P 从点 A 开始沿边 AB 向 B 以 2 米/秒的速度运动（不与点 B 重合），动点 Q 从点 B 开始沿 BC 向 C 以 4 米/秒的速度运动（不与点 C 重合）．如果 P，Q 分别从 A，B 同时出发，设运动时间为 x 秒，四边形 $APQC$ 的面积为 y 平方米．

（1）求 y 与 x 之间的函数关系式，直接写出自变量 x 的取值范围；

（2）求当 x 为多少时，y 有最小值，最小值是多少？



18. 某商场试销一种成本为每件 60 元的服装，规定试销期间销售单价不低于成本单价，且获利不得高于 40%．经试销发现，销售量 y（件）与销售单价 x（元）符合一次函数 $y=kx+b$，且 $x=80$ 时，$y=40$；$x=70$ 时，$y=50$．

（1）求一次函数 $y=kx+b$ 的表达式；

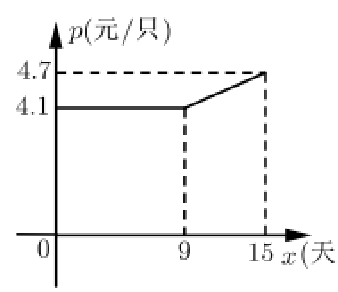
（2）若该商场获得利润为 W 元，试写出利润 W 与销售单价 x 之间的关系式；销售单价定为多少元时，商场可获得最大利润，最大利润是多少元？

22. 某企业接到一批粽子生产任务，按要求在 15 天内完成，约定这批粽子的出厂价为每只 6 元，为按时完成任务，该企业招收了新工人，设新工人李明第 x 天生产的粽子数量为 y 只，y 满足下列关系式：

$$y=\begin{cases}40x, & 0\leqslant x\leqslant 9\\ 30x+90, & 9<x\leqslant 15\end{cases}.$$

（1）李明第几天生产的粽子数量为 420 只？

（2）如图，设第 x 天每只粽子的成本是 p 元．p 与 x 之间的关系可用图中的函数图象来刻画．若李明第 x 天创造的利润为 w 元，求 w 与 x 之间的函数表达式，并求出第几天的利润最大，最大利润是多少元？



22.3 实际问题与二次函数 答案

第一部分

1.（1）AB 长为 x 米，则 BC 的长为 $(24-4x)$ 米，

根据题意，得 S 与 x 之间的函数关系式为 $S=x(24-4x)=-4x^2+24x$.

（2）$\because$ 墙的最大可用长度为 8 米，$\therefore 0<24-4x\leqslant 8$ ，解得 $4\leqslant x<6$ ，

即自变量 x 的取值范围为 $4\leqslant x<6$.

（3）由（1）知 $S=-4x^2+24x=-4(x-3)^2+36$ ，$\because -4<0$ ，

$\therefore$ 当 $x>3$ 时，S 的值随 x 值的增大而减小，又 $\because 4\leqslant x<6$ ，

$\therefore$ 当 $x=4$ 时，S 取得最大值，且最大值为 32.

$\therefore$ 当 $x=4$ 时，花圃面积最大，最大面积是 32 平方米.

2.（1）设一次函数解析式为 $y=kx+b\,(k\neq 0)$ ，

根据题意得：$\begin{cases}75=5k+b,\\70=10k+b,\end{cases}$ 解得：$k=-1$ ，$b=80$ ，$\therefore y=-x+80$ ，

最低销售单价是 $40(1+20\%)=48$ （元），根据题意得：$\begin{cases}x>0,\\-x+80\geqslant 48\end{cases}$ 且 x 为正整数，

$\therefore 0<x\leqslant 32$ ，x 为正整数，$\therefore y=-x+80$ （$0<x\leqslant 32$ ，且 x 为正整数）.

（2）设所获利润为 P 元，根据题意得：$P=(y-40)x=(-x+80-40)x=-(x-20)^2+400$ ，

即 P 是 x 的二次函数，$\because a=-1<0$ ，$\therefore P$ 有最大值，$\therefore$ 当 $x=20$ 时，$P_{最大值}=400$ ，此时 $y=60$ ，

$\therefore$ 当销售单价为 60 元时，所获利润最大，最大利润为 400 元.

3.（1）$(24-2x)$ （2）$\because 0<24-2x\leqslant 15$ ，$\therefore \dfrac{9}{2}\leqslant x<12$ ，
$$\begin{aligned}y&=x(24-2x)\\&=-2x^2+24x\\&=-2(x-6)^2+72,\end{aligned}$$

$\therefore$ 当 $x=6\text{ m}$ 时，y 有最大值 72 m^2 .

4.（1）由题意可知 $y=2x+40$ （$1\leqslant x\leqslant 30$ 且 x 为整数）.

（2）根据题意可得
$$\begin{aligned}w&=(145-x-80-5)(2x+40)\\&=-2x^2+80x+2400\\&=-2(x-20)^2+3200.\end{aligned}$$
$\because a=-2<0$ ，

$\therefore$ 当 $x=20$ 时，w 有最大值，为 3200 元，$\therefore$ 第 20 天的利润最大，最大利润是 3200 元.

5.（1）由题意，得 $y=200+(80-x)\times 20=-20x+1800$.

（2）由题意，得 $w=(x-60)(-20x+1800)=-20x^2+3000x-108000$.

（3）由题意得 $\begin{cases}-20x+1800\geqslant 240,\\x\geqslant 76,\end{cases}$ 解得 $76\leqslant x\leqslant 78$.

$w=-20x^2+3000x-108000$ 对称轴为 $x=-\dfrac{3000}{2\times(-20)}=75$ ．又 $a<0$，

$\therefore$ 当 $76\leqslant x\leqslant 78$ 时，w 随 x 增大而减小，$\therefore$ 当 $x=76$ 时，

$w_{最大值}=(76-60)\times(-20\times 76+1800)=4480$ ．答：商场销售该品牌童装获得的最大利润是 4480 元．

6.（1）$\dfrac{19}{4}$ m．

（2）成功；x=4 代入解析式，y=3.4，所以不会失误．

7.（1）$1400-50x$ 没有租出去的数量（20-x），故价格 400+50（20-x）=1400-50x

（2）根据题意得出：
$$\begin{aligned}y&=x(-50x+1400)-4800\\&=-50x^2+1400x-4800\\&=-50(x-14)^2+5000.\end{aligned}$$
当 $x=14$ 时，y 有最大值 5000．

$\therefore$ 当日租出 14 辆时，租赁公司日收益最大，最大值为 5000 元．

（3）要使租赁公司日收益不盈也不亏，即$y=-50(x-14)^2+5000=0,$ 解得

$x_1=24,x_2=4,$ $\because x=24$ 不合题意，舍去．$\therefore$ 当日租出 4 辆时，租赁公司日收益不盈也不亏．

8. 设定价增加 x 元，宾馆所得利润为 y 元，则 $y=(180+x-20)\left(50-\dfrac{x}{10}\right)=-\dfrac{1}{10}x^2+34x+8000$ ，

其中 $0\leqslant x\leqslant 500$ ，且 x 为 10 的倍数．当 $x=-\dfrac{b}{2a}=170$ 时，即房价定为 $180+170=350$ （元）时，

宾馆利润最大，$\therefore y_{\max}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}=10890$ （元）．

9.（1）设一次函数关系式为 $y=kx+b$ ，根据题意得 $\begin{cases}3500=65k+b,\\2000=80k+b,\end{cases}$

解得 $k=-100$ ，$b=10000$ ．所以一次函数关系式为 $y=-100x+10000\,(65\leqslant x\leqslant 95)$ ．

（2）由题意得 $(x-60)(-100x+10000)=30000$ ，即 $x^2-160x+6300=0$ ，

所以 $(x-70)(x-90)=0$ ，解得 $x_1=70$ ，$x_2=90$ ．

因为 $65\leqslant x\leqslant 95$ ，所以当定价为 70 或 90 元时每天获利 30000 元．

答：当定价为 70 元或 90 元时才能使工艺品厂每天获得的利润为 30000 元．

10.（1）设 A，B 两种花苗的单价分别是 x 元和 y 元，则 $\begin{cases}3x+5y=210,\\4x+10y=380.\end{cases}$

得 $\begin{cases}x=20,\\y=30.\end{cases}$ 答：A，B 两种花苗的单价分别是 20 元和 30 元．

（2）设购买 B 花苗 x 盆，则购买 A 花苗为 $(12-x)$ 盆，设总费用为 w 元．由题意得：

$w=20(12-x)+(30-x)x=-x^2+10x+240\,(0\leqslant x\leqslant 12)$ ，

$\because -1<0$ ．故 w 有最大值，当 $x=5$ 时，w 的最大值为 265，当 $x=12$ 时，w 的最小值为 216，

故本次购买至少准备 216 元，最多准备 265 元．

11.（1）$\because \angle C=90^\circ$，$\angle A=30^\circ$，$\therefore AB=2BC=2\times 6=12$．

（2）$\frac{x}{2}$；$6\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}x$

（3）
$$\begin{aligned} S_{\text{矩形}\ CDEF} &= DE\cdot EF \\ &= \frac{x}{2}\cdot\left(6\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+3\sqrt{3}x \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{4}(x-6)^2+9\sqrt{3}, \end{aligned}$$

当 $x=6$ 时，矩形 $CDEF$ 的面积有最大值，其最大值为 $9\sqrt{3}$．

12.（1）$\because y$ 与 x 满足一次函数的关系，$\therefore$ 设 $y=kx+b$，

将 $x=12$，$y=1200$；$x=13$，$y=1100$ 代入得 $\begin{cases}1200=12k+b,\\1100=13k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-100,\\b=2400,\end{cases}$

$\therefore y$ 与 x 的函数关系式为：$y=-100x+2400$；

（2）设线上和线下月利润总和为 m 元，则
$$\begin{aligned} m &= 400(x-2-10)+y(x-10) \\ &= 400x-4800+(-100x+2400)(x-10) \\ &= -100(x-19)^2+7300, \end{aligned}$$

$\therefore$ 当 x 为 19 元/件时，线上和线下月利润总和达到最大，此时的最大利润为 7300 元．

13.（1）设抛物线的解析式为 $y=ax^2+c$，$\because B(140,0)$，$E(70,42)$，

$\therefore \begin{cases}0=140^2a+c,\\42=70^2a+c,\end{cases}$ 得 $a=-\frac{1}{350}$，$c=56$，$\therefore y=-\frac{1}{350}x^2+56$．

（2）当 $x=0$ 时，$y=-\frac{1}{350}x^2+56=56$，$\therefore OC=56$（米）．

设存在一根系杆的长度是 OC 的一半，即这根系杆的长度是 28 米，则 $28=-\frac{1}{350}x^2+56$，得 $x=\pm 70\sqrt{2}$，$\because$ 相邻系杆之间的间距均为 5 米，最中间系杆 OC 在 y 轴上，

$\therefore$ 每根系杆上的点的横坐标均为整数，$\therefore x=\pm 70\sqrt{2}$ 与实际不符，

$\therefore$ 不存在一根系杆的长度恰好是 OC 长度的一半．

14.（1）设 $y=kx+b$，将 $x=20$，$y=300$ 和 $x=30$，$y=280$ 代入，

得：$\begin{cases}20k+b=300,\\30k+b=280,\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}k=-2,\\b=340,\end{cases}$ $\therefore y=-2x+340\ (18\leqslant x\leqslant 40)$．

（2）根据题意，得：$\begin{aligned}W&=(x-18)(-2x+340)\\&=-2x^2+376x-6120\\&=-2(x-94)^2+11552,\end{aligned}$ $\because a=-2<0$ ，$\therefore$ 当 $x<94$ 时，W 随 x 的增大而增大，$\therefore$ 在 $18\leqslant x\leqslant 40$ 中，当 $x=40$ 时，W 取得最大值，最大值为 5720 .

15.（1）由图知 P 点坐标为 $(0,3)$ ，A 点坐标为 $(1,4)$ ，设 $y=a(x-1)^2+4$ ，

$\because$ 过 P 点坐标为 $(0,3)$ ，$\therefore 3=a(0-1)^2+4$ ，$\therefore a=-1$ ，$\therefore y=-(x-1)^2+4$.

（2）当 $y=0$ ，$x_1=-1$ ，$x_2=3$ ，$\therefore$ 水池半径至少 3 米.

16.（1）由题意知抛物线的顶点坐标为 $(3,4.5)$ ，则设抛物线的解析式为 $y=a(x-3)^2+4.5\,(a\neq 0)$ ，

$\because OP=6$ ，$\therefore P(6,0)$ ，$\therefore 0=9a+4.5$ ，$\therefore a=-\dfrac{1}{2}$ ，

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-\dfrac{1}{2}(x-3)^2+4.5$ ，即 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+3x\,(0\leqslant x\leqslant 6)$.

（2）当 $y=3$ 时，$-\dfrac{1}{2}x^2+3x=3$ ，解得 $x_1=3-\sqrt{3}$ ，$x_2=3+\sqrt{3}$ ，

$\therefore$ 该横幅的宽度为 $\left(3+\sqrt{3}\right)-\left(3-\sqrt{3}\right)=2\sqrt{3}$ （米）.

（3）设点 B 的横坐标为 x，则 $B\left(x,-\dfrac{1}{2}x^2+3x\right)$ ，$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AB=DC=-\dfrac{1}{2}x^2+3x$ ，根据抛物线的对称性，可得 $OA=DP=x$ ，

$\therefore AD=6-2x$ ，即 $BC=6-2x$ ，令 $L=AB+BC+DC+AD$ ，则

$L=2\left(-\dfrac{1}{2}x^2+3x\right)+2(6-2x)=-(x-1)^2+13$. $\therefore$ 当 $x=1$ 时，L 有最大值，最大值为 13，

$\therefore AB$ ，BC，DC，AD 的长度之和最大为 13 米．答：最多需要准备 13 米该种木杆.

17.（1）根据题意知 $\begin{aligned}S&=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle PBQ}\\&=\frac{1}{2}\times 12\times 24-\frac{1}{2}\times 4x\times(12-2x)\\&=4x^2-24x+144.\end{aligned}$ 由 $12-2x>0$ 得 $x<6$ ，

$\therefore 0<x<6$.

（2）$y=4x^2-24x+144=4(x-3)^2+108$. $\because 4>0$

$\therefore$ 当 $x=3$ 时，y 取得最小值，最小值为 108 .

18.（1） $60 \leqslant x \leqslant 60(1+40\%)$ ，$\therefore 60 \leqslant x \leqslant 84$ ，由题得：$\begin{cases} 40 = 80k + b, \\ 50 = 70k + b. \end{cases}$

解之得：$\begin{cases} k = -1, \\ b = 120. \end{cases}$ ∴一次函数的解析式为$y = -x + 120\ (60 \leqslant x \leqslant 84)$.

（2）销售额：$xy = x(-x+120)$ 元；成本：$60y = 60(-x+120)$.

$$\begin{aligned} W &= xy - 60y \\ &= x(-x+120) - 60(-x+120) \\ &= (x-60)(-x+120) \\ &= -x^2 + 180x - 7200 \\ &= -(x-90)^2 + 900 \end{aligned}$$

$\therefore W = -(x-90)^2 + 900,\ (60 \leqslant x \leqslant 84)$ ，

当 $x = 84$ 时，W 取得最大值，最大值是：$-(84-90)^2 + 900 = 864$ (元).

即销售价定为每件 84 元时，可获得最大利润，最大利润是 864 元.

19.（1）$\because y = 40x\ (0 \leqslant x \leqslant 9)$ ，$\therefore$ 当 $x = 9$ 时，$y = 9 \times 40 = 360 < 420$ ，

$\therefore x > 9$ ，$\therefore 30x + 90 = 420$ ，$x = 11$ ，$\therefore$ 李明第 11 天生产的粽子数量为 420 只.

（2）由图象可得：当 $0 \leqslant x \leqslant 9$ 时，$p = 4.1$ ，当 $9 < x \leqslant 15$ 时，设 $p = kx + b$ ，

把点 $(9, 4.1)$ ，$(15, 4.7)$ 代入得 $\begin{cases} 9k + b = 4.1, \\ 15k + b = 4.7, \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} k = 0.1, \\ b = 3.2, \end{cases}$ $\therefore p = 0.1x + 3.2$.

① $0 \leqslant x \leqslant 9$ 时，$w = (6-4.1) \times 40x = 76x$ ，$\therefore$ 当 $x = 9$ 时，$w_{最大} = 76 \times 9 = 684$ （元）.

② $9 < x \leqslant 15$ 时，$w = (6 - 0.1x - 3.2) \times (30x + 90) = -3x^2 + 75x + 252$ ，

$\because a = -3 < 0$ ，$\therefore$ 当 $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{75}{2 \times (-3)} = \dfrac{25}{2} = 12.5$ 时，w 取最大，

$\because x$ 为整数，$\therefore$ 当 $x = 12$ 或 13 时，$w_{最大} = -3 \times 12^2 + 75 \times 12 + 252 = 720$ （元），

$\because 702 > 684$ ，$\therefore$ 综上，第 12 或 13 天时，利润最大，为 720 元，

$$w = \begin{cases} 76x, & 0 \leqslant x \leqslant 9 \\ -3x^2 + 75x + 252, & 9 < x \leqslant 15 \end{cases}.$$