22.1 二次函数的图象和性质

【学习任务】

1、会根据给出的不同条件选择不同的解析式形式来确定二次函数的解析式，理解二次函数的意义.

2、会用描点法画出二次函数的图象，并能根据图象认识二次函数的性质.

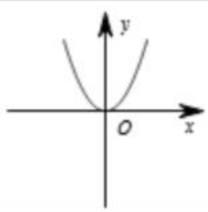
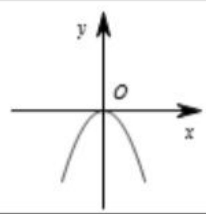
3、会求不同形式的解析式的二次函数的顶点和对称轴.

4、会用顶点式去探究几何变换后的二次函数的解析式.

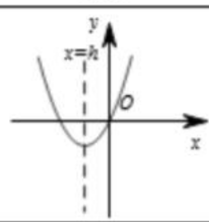
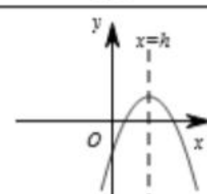
【知识梳理】

一般的，形如 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 常数，$a\neq 0$）的函数，叫做**二次函数**（quadratic function）.

$y=ax^2$（$a\neq 0$）的图象

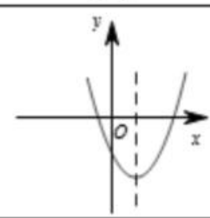
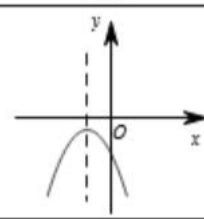
	$y=ax^2$ ($a\neq 0$)	
	$a>0$	$a<0$
图象		
开口方向及大小	开口向上； $\|a\|$越大，开口越小； $\|a\|$越小，开口越大.	开口向下； $\|a\|$越大，开口越小； $\|a\|$越小，开口越大.
对称轴	直线 $x=0$ 或 y 轴	直线 $x=0$ 或 y 轴
顶点坐标	(0,0)	(0,0)
增减性	对称轴左侧，y 随 x 增大而减小； 对称轴右侧，y 随 x 增大而增大.	对称轴左侧，y 随 x 增大而增大； 对称轴右侧，y 随 x 增大而减小.
最值	有最小值，当 $x=0$ 时，y 有最小值是 0.	有最大值，当 $x=0$ 时，y 有最大值是 0.

$y=a(x-h)^2+k$（$a\neq 0$）的图象

	$y=a(x-h)^2+k$ ($a\neq 0$)	
	$a>0$	$a<0$
图象		

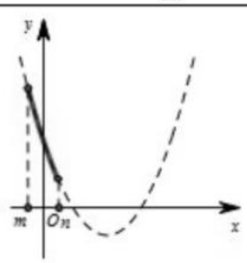
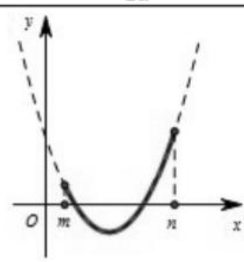
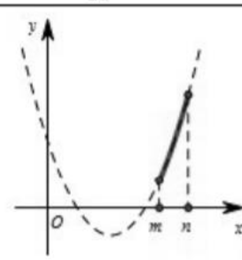
开口方向及大小	开口向上； $\lvert a\rvert$越大，开口越小； $\lvert a\rvert$越小，开口越大.	开口向下； $\lvert a\rvert$越大，开口越小； $\lvert a\rvert$越小，开口越大.
对称轴	直线 $x=h$	直线 $x=h$
顶点坐标	(h,k)	(h,k)
增减性	对称轴左侧，y 随 x 增大而减小； 对称轴右侧，y 随 x 增大而增大.	对称轴左侧，y 随 x 增大而增大； 对称轴右侧，y 随 x 增大而减小.
最值	有最小值，当 $x=h$ 时，y 有最小值是 k.	有最大值，当 $x=h$ 时，y 有最大值是 k.

$y=ax^2+bx+c$（a、b、c 是常数，$a\neq 0$）的图象

	$y=ax^2+bx+c$（a、b、c 是常数，$a\neq 0$）	
	$a>0$	$a<0$
图象		
开口方向及大小	开口向上； $\lvert a\rvert$越大，开口越小； $\lvert a\rvert$越小，开口越大.	开口向下； $\lvert a\rvert$越大，开口越小； $\lvert a\rvert$越小，开口越大.
对称轴	直线 $x=-\frac{b}{2a}$	
顶点坐标	$(-\frac{b}{2a},\ \frac{4ac-b^2}{4a})$	
增减性	对称轴左侧，y 随 x 增大而减小； 对称轴右侧，y 随 x 增大而增大.	对称轴左侧，y 随 x 增大而增大； 对称轴右侧，y 随 x 增大而减小.
最值	有最小值，当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 有最小值是 $\frac{4ac-b^2}{4a}$	有最大值，当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 有最大值是 $\frac{4ac-b^2}{4a}$

区间最值

函数 $y=ax^2+bx+c$（$a>0$）在 $m<x<n$ 上的最值问题：

	$m<n<-\frac{b}{2a}$	$m<-\frac{b}{2a}<n$	$-\frac{b}{2a}<m<n$
图象			
最值	当 $x=m$ 时，函数有最大值； 当 $x=n$ 时，函数有最小值.	当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，函数有最小值.	当 $x=n$ 时，函数有最大值； 当 $x=m$ 时，函数有最小值.

对于 $a<0$ 的情况，讨论类似.

图象与 a、b、c 的符号关系

代数式	作用	字母符号	图象的特征
a	1、决定开口方向 2、决定开口大小	$a>0$	开口向上
		$a<0$	开口向下
c	决定抛物线与 y 轴交点坐标 $(0,c)$	$c>0$	交点在 x 轴上方
		$c=0$	抛物线经过原点
		$c<0$	交点在 x 轴下方
$-\dfrac{b}{2a}$	决定对称轴的位置，对称轴是直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$	$ab>0$	对称轴在 y 轴左侧
		$b=0$	对称轴为 y 轴
		$ab<0$	对称轴在 y 轴右侧

二次函数的解析式

描述

设一般式 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$

若已知条件或根据已知可推出图象上三个点，可以设成一般式，将已知条件代入解析式，得出关于 a、b、c 的三元一次方程组，解方程即可．

设顶点式 $y=a(x-h)^2+k$ $(a\neq 0)$

若已知条件或根据已知可推出函数的顶点或对称轴与最值时，可以设成顶点式，将已知条件代入解析式，求出待定系数．

设交点式 $\mathbf{y=a(x-x_1)\cdot(x-x_2)}$（$a\neq 0$）

若已知或者可以推知图象和 x 轴的交点坐标（x_1,0）和（x_2,0）时，可以设交点式，将已知条件代入解析式，求出待定系数。

二次函数图象的平移变换：“上加下减括号外、左加右减括号内”。

二次函数图象的翻折和旋转变换：一般是求出变换后的顶点坐标，再根据原函数图象的 a 值（二次项系数），写出新的顶点式。开口方向变化了，a 变相反数，开口方向不变，则 a 不变。

	关于 x 轴对称	关于 y 轴对称	关于原点对称
$y=ax^2+bx+c$	$y=-ax^2-bx-c$	$y=ax^2-bx+c$	$y=-ax^2+bx-c$
$y=a(x-h)^2+k$	$y=-a(x-h)^2-k$	$y=a(x+h)^2+k$	$y=-a(x+h)^2-k$
$y=a(x-x_1)(x-x_2)$	$y=-a(x-x_1)(x-x_2)$	$y=a(x+x_1)(x+x_2)$	$y=-a(x+x_1)(x+x_2)$

【同步讲练】

1. 抛物线 $y=-2(x-3)^2+5$ 的顶点坐标是（　　）

A. $(-3,-5)$　　B. $(3,5)$　　C. $(3,-5)$　　D. $(-3,5)$

2. 二次函数 $y=-3x^2+6x$ 变形为 $y=a(x+m)^2+n$ 的形式，正确的是（　　）

A. $y=-3(x+1)^2-3$　　B. $y=-3(x-1)^2-3$

C. $y=-3(x+1)^2+3$　　D. $y=-3(x-1)^2+3$

3. 在抛物线 $y=ax^2-2ax-3a$ 上有 $A(-0.5,y_1)$ ，$B(2,y_2)$ 和 $C(3,y_3)$ 三点，若抛物线与 y 轴的交点在正半轴上，则 y_1，y_2 和 y_3 的大小关系为（　　）

A. $y_3<y_1<y_2$　　B. $y_3<y_2<y_1$　　C. $y_2<y_1<y_3$　　D. $y_1<y_2<y_3$

4. 将抛物线 $C_1: y=x^2-2x+3$ 向左平移 1 个单位长度，得到抛物线 C_2，抛物线 C_2 与抛物线 C_3 关于 x 轴对称，则抛物线 C_3 的解析式为（　　）

A. $y=-x^2-2$　　B. $y=-x^2+2$　　C. $y=x^2-2$　　D. $y=x^2+2$

5. 在直角坐标系中，将抛物线 $y=-x^2-2x$ 先向下平移一个单位，再向右平移一个单位，所得新抛物线的解析式为________.

6. 当 $x\leqslant 1$ 时，二次函数 $y=-(x-m)^2+m^2+1$ 有最大值 4，则实数 m 的值为________.

【课后作业】

1. 下列函数是二次函数的是（　　）

A. $y=x$　　B. $y=\dfrac{1}{x}$　　C. $y=x-2+x^2$　　D. $y=\dfrac{1}{x^2}$

2. 抛物线 $y=2x^2+1$ 的对称轴是（　　）

A. 直线 $x=\dfrac{1}{4}$　　B. 直线 $x=-\dfrac{1}{4}$　　C. y 轴　　D. x 轴

3. 在平面直角坐标系中，将二次函数 $y=2x^2$ 的图象向上平移 2 个单位，所得图象的解析式为（　　）

A. $y=2x^2-2$　　B. $y=2x^2+2$　　C. $y=2(x-2)^2$　　D. $y=2(x+2)^2$

4. 抛物线 $y=-x^2$ 向左平移 3 个单位后，得到的抛物线的解析式是（　　）

A. $y=-(x+3)^2$　　B. $y=-x^2+3$

C. $y=-(x-3)^2$　　D. $y=-x^2-3$

5. 将 $y=(2x-1)\cdot(x+2)+1$ 化成 $y=a(x+m)^2+n$ 的形式为（　　）

A. $y=2\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{25}{16}$　　B. $y=2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{17}{8}$

C. $y=2\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{17}{8}$　　D. $y=2\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{17}{8}$

6. 已知二次函数 $y=ax^2-bx+c\,(a\neq 0)$ ，其图象经过 $A\,(3-m,2)$ ，$B\,(m+1,2)$ 两点，则 $\frac{b}{a}$ 的值为（　　）

A. 2　　B. -2　　C. 4　　D. -4

7. 对于抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2-3$ 的说法错误的是（　　）

A. 抛物线的开口向下

B. 抛物线的顶点坐标是 $(1,-3)$

C. 抛物线的对称轴是直线 $x=1$

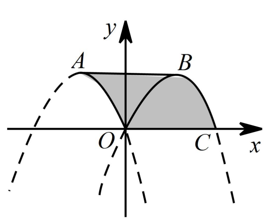
D. 当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而增大

8. 如果抛物线 $y=(a+3)\,x^2-5$ 不经过第一象限，那么 a 的取值范围是________.

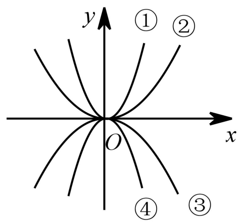
9. 抛物线 $y=x^2-3x$ 与 x 轴的交点坐标为________，________.

10. 如果点 $A\,(-4,y_1)$ ，$B\,(-3,y_2)$ 是二次函数 $y=2x^2+k$ （k 是常数）图象上的两点，那么 y_1 ________ y_2（填“>”，“<”或“=”）.

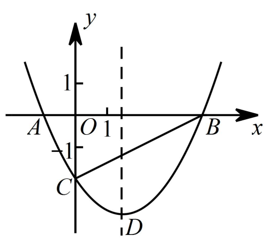
11. 已知函数 $y=\begin{cases}-(x+1)^2+1, & -1\leqslant x<0\\ -(x-1)^2+1, & 0\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$ ，其图象如图中的实线部分，图象上两个最高点分别是 A，B，连接 AB，则图中曲四边形 $ABCO$（阴影部分）的面积是________.



12. 如图所示，四个函数图象对应的表达式分别是：① $y=ax^2$ ，② $y=bx^2$ ，③ $y=cx^2$ ，④ $y=dx^2$ ，则 a，b，c，d 的大小关系是________.



13. 如图，抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2$ 与 x 轴交于 A，B 两点，与 y 轴交于 C 点，顶点为 D 点．点 $M(m,0)$ 是 x 轴上的一个动点，当 $MC+MD$ 的值最小时，m 的值为________.



14. 二次函数 $y=2(x+1)^2-3$ 上一点 $P(x,y)$ ，当 $-2<x\leqslant 1$ 时，y 的取值范围是________.

22.1 二次函数的图象和性质 答案

第一部分

1. B　2. D　3. A　4. A

第二部分

5. $y=-x^2$

6. 2 或 $-\sqrt{3}$

【课后作业】

第一部分

1. C　2. C　3. B　4. A　5. C　6. C　7. D

第二部分

8. $a<-3$

9. $(0,0)$; $(3,0)$

10. $>$【解析】抛物线的对称轴为 y 轴，$\therefore$ 当 $x<0$ 时，y 随 y 的增大而减小，$\therefore y_1>y_2$.

11. 2

12. $a>b>c>d$ 【解析】因为直线 $x=1$ 与四条抛物线的交点从上到下依次为 $(1,a)$ ，$(1,b)$ ，$(1,c)$ ，$(1,d)$ ，所以 $a>b>c>d$.

13. $\dfrac{24}{41}$

14. $-3\leqslant y\leqslant 5$