22.3 实际问题与二次函数

【学习任务】

1、能够通过数学问题建立数学模型，会运用二次函数的知识解决生活中的实际问题．

2、在解决问题的过程中体会数学与生活的联系．

【知识梳理】

实际问题与二次函数解题一般步骤：

① 找出问题中的变量和常量及它们之间的函数关系；

② 列二次函数表达式表示它们之间的关系；

③ 应用二次函数的图象及性质解题；

④ 检验结果的合理性，检验是否符合实际意义．

【同步讲练】

一、选择题

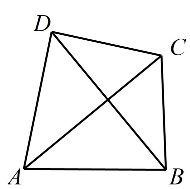
1. 用一根长为 30 cm 的绳子围成一个长方形，则长方形的面积 S cm^2 与一边长 x cm 的函数关系式为 $S=-x^2+15x$ ，其中，自变量 x 的取值范围是（　　）

A. $x>0$　　B. $0<x<15$　　C. $0<x<30$　　D. $15<x<30$

2. 小敏用一根长为 8 cm 的细铁丝围成矩形，则矩形的最大面积是（　　）

A. 4 cm^2　　B. 8 cm^2　　C. 16 cm^2　　D. 32 cm^2

3. 如图，四边形 $ABCD$ 的两条对角线互相垂直，$AC+BD=16$ ，则四边形 $ABCD$ 的面积最大值是（　　）



A. 64　　B. 16　　C. 24　　D. 32

4. 竖直上抛物体离地面的高度 h(m) 与运动时间 t(s) 之间的关系可以近似地用公式 $h=-5t^2+v_0t+h_0$ 表示，其中 h_0(m) 是物体抛出时离地面的高度，v_0(m/s) 是物体抛出时的速度．某人将一个小球从距地面 1.5 m 的高处以 20 m/s 的速度竖直向上抛出，小球达到的离地面的最大高度为（　　）

A. 23.5 m　　B. 22.5 m　　C. 21.5 m　　D. 20.5 m

5. 一同学推铅球，铅球高度 y(m) 关于时间 x(s) 的函数表达式为 $y=ax^2+bx\,(a\neq 0)$ ．若铅球在第 7 秒与第 14 秒时的高度相等，则在（　　）时铅球最高．

A. 第 7 秒　　B. 第 8 秒　　C. 第 10.5 秒　　D. 第 21 秒

6. 已知学校航模组设计制作的火箭的升空高度 $h(\mathrm{m})$ 与飞行时间 $t(\mathrm{s})$ 满足函数表达式 $h=-t^2+24t+1$ ．则下列说法中正确的是(　　)

A. 点火后 9 s 和点火后 13 s 的升空高度相同

B. 点火后 24 s 火箭落于地面

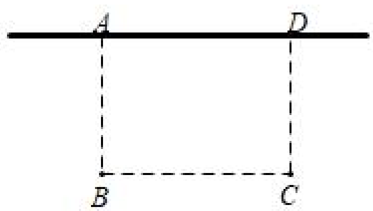
C. 点火后 10 s 的升空高度为 139 m

D. 火箭升空的最大高度为 145 m

7. 一个小球被抛出后，如果距地面的高度 h（米）和运行时间 t（秒）的函数解析式 $h=-5t^2+10t+1$ ，那么小球到达最高点时距离地面的高度是(　　)

A. 1 米　　B. 3 米　　C. 5 米　　D. 6 米

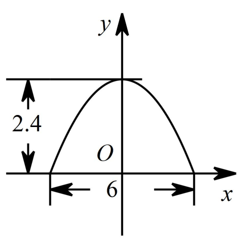
8. 如图，小明想用长为 12 米的栅栏（虚线部分），借助围墙围成一个矩形花园 $ABCD$ ，则矩形 $ABCD$ 的最大面积是(　　) 平方米.



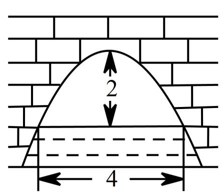
A. 16　　B. 18　　C. 20　　D. 24

二、填空题

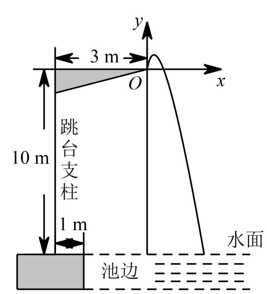
9. 某菜农搭建了一个横截面为抛物线的大棚，尺寸如图，若菜农身高为 1.8 m ，他在不弯腰的情况下，在棚内的横向活动范围是________ m .



第 9 题图



第 10 题图



第 11 题图

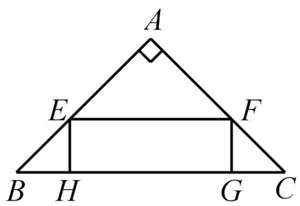
10. 如图是一个横断面为抛物线形状的拱桥，当水面宽 4 米时，拱顶（拱桥洞的最高点）离水面 2 米，水面下降 1 米时，水面的宽度为________ 米.

11.如图，某运动员在 10 米跳台跳水比赛时，估测身体（看成一点）在空中的运动路线是抛物线 $y=-\frac{25}{6}x^2+\frac{10}{3}x$ （图中标出的数据为已知条件），运动员在空中运动的最大高度离水面的距离为________ 米.

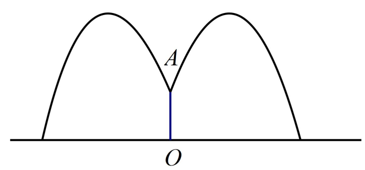
12. 某一型号飞机着陆后滑行的距离 y（单位：m）与滑行时间 x（单位：s）之间的函数表达式是 $y=60x-1.5x^2$ ，则该型号飞机着陆后滑行的最大距离是________ m．

13. 飞机着陆后滑行的距离 y（单位：m）关于滑行时间 t（单位：s）的函数解析式是 $y=60t-\frac{3}{2}t^2$ ．在飞机着陆滑行中，最后 4 s 滑行的距离是________ m．

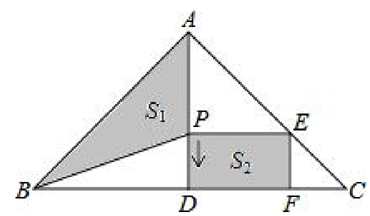
14. 如图，$\angle A=90^\circ$ ，$AB=AC$ ，$BC=20$ ，四边形 $EFGH$ 是 $\triangle ABC$ 的内接矩形，如果 EF 的长为 x，矩形 $EFGH$ 的面积为 y，则 y 与 x 的函数关系式为________．



第 14 题图



第 15 题图



第 16 题图

15. 如图所示，公园要建造圆形的喷水池，水池中央垂直于水面处安装一个柱子 OA，O 恰在水面中心，$OA=1.25$ m ，由柱子顶端 A 处喷头向外喷水，水流在各个方向沿形状相同的抛物线落下，为使水流形状较为漂亮，要求设计成水流在与 OA 距离为 1 m 处达到距水面最大高度 2.25 m ．若不计其他因素，那么水池的半径至少要________ m，才能使喷出的水流不落到池外．

16. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$ ，$AB=AC=2\sqrt{2}$ ，AD 为 BC 边上的高，动点 P 在 AD 上，从点 A 出发，沿 $A\to D$ 方向运动，设 $AP=x$ ，$\triangle ABP$ 的面积为 S_1，矩形 $PDFE$ 的面积为 S_2，$y=S_1+S_2$ ，则 y 与 x 的关系式是________．

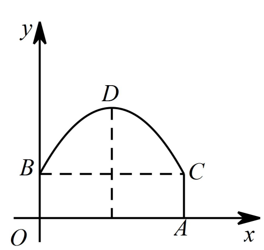
三、解答题

17. 如图，东湖隧道的截面由抛物线和长方形构成，长方形的长 OA 为 12 m，宽 OB 为 4 m，隧道顶端 D 到路面的距离为 10 m，建立如图所示的直角坐标系．

（1）求该抛物线的解析式；

（2）一辆货运汽车载一长方体集装箱，集装箱最高处与地面距离为 6 m，宽为 4 m，隧道内设双向行车道，问这辆货车能否安全通过?

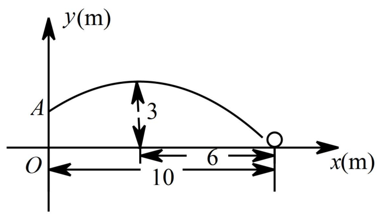
（3）在抛物线型拱壁上需要安装两排灯，使它们离地面高度相等，如果灯离地面的高度不超过 8.5 m，那么两排灯的水平距离最小是多少 m？



18. 如图，在某场足球比赛中，球员甲从球门底部中心点 O 的正前方 $10\ \text{m}$ 处起脚射门，足球沿抛物线飞向球门中心线；当足球飞离地面高度为 $3\ \text{m}$ 时达到最高点，此时足球飞行的水平距离为 $6\ \text{m}$．已知球门的横梁高 OA 为 $2.44\ \text{m}$．

（1）在如图所示的平面直角坐标系中，问此飞行足球能否进球门?（不计其它情况）

（2）守门员乙站在距离球门 $2\ \text{m}$ 处，他跳起时手的最大摸高为 $2.52\ \text{m}$，他能阻止球员甲的此次射门吗?如果不能，他至少后退多远才能阻止球员甲的射门?

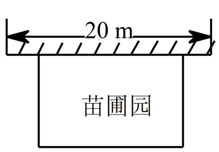


19. 某中学课外兴趣活动小组准备围建一个矩形苗圃园，其中一边靠墙，另外三边周长为 30 米的篱笆围成．已知墙长为 20 米（如图所示），设这个苗圃园垂直于墙的一边长为 x 米．

（1）若苗圃园的面积为 108 平方米，求 x．

（2）若平行于墙的一边长不小于 8 米，这个苗圃园的面积有最大值和最小值吗?如果有，求出最大值和最小值；如果没有，请说明理由．

（3）当这个苗圃园的面积不小于 72 平方米时，直接写出 x 的取值范围．

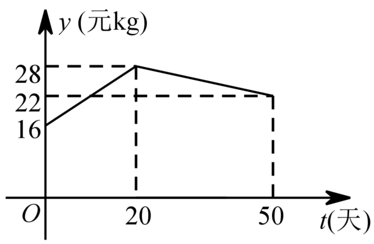


20. 随着龙虾节的火热举办，某龙虾养殖大户为了发挥技术优势，一次性收购了 10000 kg 小龙虾，计划养殖一段时间后再出售．已知每天养殖龙虾的成本相同，放养 10 天的总成本为 166000 元，放养 30 天的总成本为 178000 元．设这批小龙虾放养 t 天后的质量为 a kg，销售单价为 y 元/kg，根据往年的行情预测，a 与 t 的函数关系为 $a=\begin{cases}10000, & 0\leqslant t\leqslant 20\\ 100t+8000, & 20<t\leqslant 50\end{cases}$，$y$ 与 t 的函数关系如图所示．（总成本 = 放养总费用 + 收购成本；利润 = 销售总额 − 总成本）

（1）设每天的养殖成本为 m 元，收购成本为 n 元，求 m 与 n 的值；

（2）求 y 与 t 的函数关系式；

（3）如果将这批小龙虾放养 t 天后一次性出售所得利润为 W 元．问该龙虾养殖大户将这批小龙虾放养多少天后一次性出售所得利润最大?最大利润是多少?

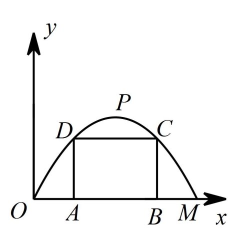


21. 如图，某公路隧道横截面为抛物线，其最大高度为 6 米，底部宽度 OM 为 12 米．现以 O 点为原点，OM 所在直线为 x 轴建立直角坐标系．

（1）直接写出点 M 及抛物线顶点 P 的坐标；

（2）求这条抛物线的解析式；

（3）若要搭建一个矩形“支撑架” $AD-DC-CB$，使 C，D 点在抛物线上，A，B 点在地面 OM 上，则这个“支撑架”总长的最大值是多少?



22. 某公司经过市场调查发现，该公司生产的某商品在第 x 天的销售单价为 $(x+20)$ 元/件 $(1\leqslant x\leqslant 50)$ ，且该商品每天的销量满足关系式 $y=200-4x$ ．已知该商品第 10 天的售价按 8 折出售，仍然可以获得 20% 的利润.

（1）求公司生产该商品每件的成本为多少元?

（2）问销售该商品第几天时，每天的利润最大?最大利润是多少?

23. 某宾馆有 50 个房间供游客居住，每个房间定价 120 元时，房间会全部住满，当每个房间每天的定价每增加 10 元时，就会有一个房间空闲．如果游客居住房间，宾馆需对每个房间每天支出 20 元的各种费用，设每个房间定价增加 $10x$ 元（x 为整数）．

（1）. 直接写出每天游客居住的房间数量 y 与 x 的函数关系式.

（2）. 设宾馆每天的利润为 W 元，当每间房价定价为多少元时，宾馆每天所获利润最大，最大利润是多少？

24. 某园林专业户计划投资种植花卉及树木，根据市场调查与预测，种植树木的利润 y_1 与投资量 x 成正比例关系，如图 1 所示；种植花卉的利润 y_2 与投资量 x 成二次函数关系，如图 2 所示（注：利润与投资量的单位：万元）.

（1）分别求出利润 y_1 与 y_2 关于投资量 x 的函数关系式；

（2）如果这位专业户以 8 万元资金投入种植花卉和树木，设他投入种植花卉金额 m 万元，种植花卉和树木共获利利润 w 万元，直接写出 w 关于 m 的函数关系式，并求他至少获得多少利润?他能获取的最大利润是多少?

（3）若该专业户想获利不低于 22 万，在（2）的条件下，直接写出投资种植花卉的金额 m 的范围.

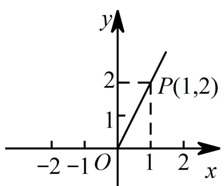


图1

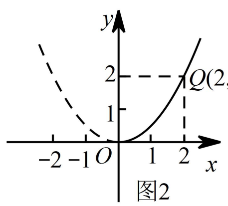


图2

22.3 实际问题与二次函数 答案

第一部分

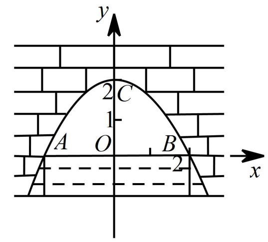
1. B　2. A　3. D　4. C　5. C　6. D　7. D　8. B　【解析】设 $AB=x$ ，则 $BC=12-2x$ ．

得矩形 $ABCD$ 的面积 $S=x(12-2x)=-2x^2+12x=-2(x-3)^2+18$ ，

即矩形 $ABCD$ 的最大面积为 18 平方米．

第二部分

9. 3　10. $2\sqrt{6}$



【解析】建立平面直角坐标系，设横轴 x 通过 AB，纵轴 y 通过 AB 中点 O 且通过 C 点，则通过画图可得知 O 为原点，抛物线以 y 轴为对称轴，且经过 A，B 两点，$OA=OB=\frac{1}{2}AB=2$ 米，抛物线顶点 C 坐标为 $(0,2)$，

通过以上条件可设顶点式 $y=ax^2+2$ ，将 $A(-2,0)$ 代入解析式得出 $a=-0.5$ ，

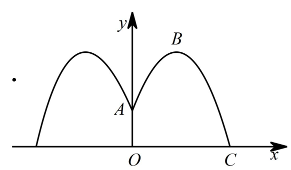
所以抛物线解析式为 $y=-0.5x^2+2$ ．当水面下降 1 米，$y=-1$ 代入抛物线解析式得出 $-1=-0.5x^2+2$ ，解得 $x=\pm\sqrt{6}$ ，所以水面宽度增加到 $2\sqrt{6}$ 米．

11. $10\frac{2}{3}$　12. 600　13. 24　14. $y=-\frac{1}{2}x^2+10x$

【解析】$\because \angle A=90^\circ$ ，$AB=AC$ ，$\therefore \angle B=\angle C=45^\circ$ ．$\because$ 四边形 $EFGH$ 是 $\triangle ABC$ 的内接矩形，$\therefore \angle EHB=\angle FGC=90^\circ$ ，$EH=FG$ ，$EF=HG$ ，$\therefore \angle BEH=\angle CFG=45^\circ$ ，

$\therefore BH=EH=CG=GF$ ．$\because BC=20$ ，$EF=x$ ，

$\therefore BH=EH=CG=GF=10-\frac{1}{2}x$ ，$\therefore y=x\left(10-\frac{1}{2}x\right)=-\frac{1}{2}x^2+10x$ ．



15. 2.5

【解析】以 O 为原点，建立如图所示的平面直角坐标系．点 A 坐标为 $(0,1.25)$ ，顶点为 $B(1,2.25)$ ，设 y 轴右侧抛物线的表达式为 $y=a(x-1)^2+2.25$ ，

又抛物线过点 $(0,1.25)$ ，解得 $a=-1$ ，所以函数表达式为 $y=-(x-1)^2+2.25$ ，令 $y=0$ ，

得 $-(x-1)^2+2.25=0$ ，解得 $x=2.5$ 或 $x=-0.5$ （舍去），

所以水池半径至少为 2.5 m ，才能使喷出的水流不落到池外．

16. $y=-x^2+3x$ 【解析】$\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$ ，$AB=AC=2\sqrt{2}$ ，AD 为 BC 边上的高，$AP=x$ ，$\therefore \angle BAD=\angle CAD=45^\circ$ ，$BC=4$ ，$AD=2$ ，

$\therefore AP=PE=x$ ，$PD=AD-AP=2-x$ ，

$\therefore y=S_1+S_2=\frac{x\cdot 2}{2}+(2-x)\cdot x=-x^2+3x$ ．

第三部分

17.（1） 根据题意，该抛物线的顶点坐标为 $(6,10)$ ，设抛物线解析式为：$y=a(x-6)^2+10$ ，

将点 $B(0,4)$ 代入，得：$36a+10=4$ ，解得：$a=-\frac{1}{6}$ ，故该抛物线解析式为

$y=-\frac{1}{6}(x-6)^2+10$.

（2） 根据题意，当 $x=6+4=10$ 时，$y=-\frac{1}{6}\times16+10=\frac{22}{3}>6$ ，

$\therefore$ 这辆货车能安全通过．答：这辆货车能安全通过．

（3） 当 $y=8.5$ 时，有：$-\frac{1}{6}(x-6)^2+10=8.5$ ，解得：$x_1=3$ ，$x_2=9$ ，

$\therefore$ $x_2-x_1=6$ ，答：两排灯的水平距离最小是 6 m .

18.（1） 抛物线的顶点坐标是 $(4,3)$ ，设抛物线的解析式是：$y=a(x-4)^2+3$ ，

把 $(10,0)$ 代入得 $36a+3=0$ ，解得 $a=-\frac{1}{12}$ ，则抛物线是 $y=-\frac{1}{12}(x-4)^2+3$ ，

当 $x=0$ 时，$y=-\frac{1}{12}\times16+3=3-\frac{4}{3}=\frac{5}{3}<2.44$ 米，

故能射中球门；

（2） 当 $x=2$ 时，$y=-\frac{1}{12}\times(2-4)^2+3=\frac{8}{3}>2.52$ ，$\therefore$ 守门员乙不能阻止球员甲的此次射门，当 $y=2.52$ 时，$y=-\frac{1}{12}(x-4)^2+3=2.52$ ，解得：$x_1=1.6$ ，$x_2=6.4$ （舍去），

$\therefore$ $2-1.6=0.4(\mathrm{m})$ ．答：他至少后退 0.4 m ，才能阻止球员甲的射门．

19.（1） 由题意可得，$x(30-2x)=108$， 解得，$x_1=6,x_2=9$，

当 $x=6$ 时，$30-2x=18<20$ ，当 $x=9$ 时，$30-2x=12<20$ ，

即 x 的值是 6 或 9．

（2） 设矩形的面积为 y 平方米，平行于墙的一边长为 a 米，

$y=a\left(\frac{30-a}{2}\right)=-\frac{1}{2}(a-15)^2+\frac{225}{2}$ ，$\because$ $a\geqslant8$ ，$\therefore$ 当 $a=15$ 时，y 取得最大值，此时

$y=\frac{225}{2}$ ，即平行于墙一边长不小于 8 米，这个苗圃园的面积有最大值，最大值是 $\frac{225}{2}$ 平方米．

（3） 由题意可得，$x(30-2x)\geqslant72$， 解得，$3\leqslant x\leqslant12$，$\because$ $30-2x\leqslant20$ ，解得，$x\geqslant5$，$\therefore$ 当这个苗圃园的面积不小于 72 平方米时，x 的取值范围是 $5\leqslant x\leqslant12$ ．

20.（1） 依题意得 $\begin{cases}10m+n=166000,\\30m+n=178000,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=600,\\n=160000.\end{cases}$

（2） 当 $0\leqslant t\leqslant20$ 时，设 $y=k_1t+b_1$ ，

由图象得：$\begin{cases} b_1 = 16, \\ 20k_1 + b_1 = 28, \end{cases}$ 解得：$\begin{cases} k_1 = \frac{3}{5}, \\ b_1 = 16, \end{cases}$ 所以 $y = \frac{3}{5}t + 16$ ，

当 $20 < t \leqslant 50$ 时，设 $y = k_2 t + b_2$ ，由图象得：$\begin{cases} 20k_2 + b_2 = 28, \\ 50k_2 + b_2 = 22, \end{cases}$ 解得：$\begin{cases} k_2 = -\frac{1}{5}, \\ b_2 = 32, \end{cases}$

所以 $y = -\frac{1}{5}t + 32$ ，综上，$y = \begin{cases} \frac{3}{5}t + 16, & 0 \leqslant t \leqslant 20 \\ -\frac{1}{5}t + 32, & 20 < t \leqslant 50 \end{cases}$.

（3）$W = ya - mt - n$ ，当 $0 \leqslant t \leqslant 20$ 时，

$W = 10000\left(\frac{3}{5}t + 16\right) - 600t - 160000 = 5400t$ ，因为 $5400 > 0$ ，

所以当 $t = 20$ 时，$W_{最大} = 5400 \times 20 = 108000$ ，当 $20 < t \leqslant 50$ 时，

$$\begin{aligned} W &= \left(-\frac{1}{5} + 32\right)(100t + 8000) - 600t - 160000 \\ &= -20t^2 + 1000t + 96000 \\ &= -20(t - 25)^2 + 108500, \end{aligned}$$

因为 $-20 < 0$ ，抛物线开口向下，所以当 $t = 25$ 时，$W_{最大} = 108500$.

因为 $108500 > 108000$ ，所以当 $t = 25$ 时，W 取得最大值，该最大值为 108500 元.

21.（1）$M(12, 0)$ ，$P(6, 6)$.

（2）根据顶点 P 的坐标，可设抛物线的解析式为 $y = a(x - 6)^2 + 6$. 将点 $O(0, 0)$ 代入解析式求得 $a = -\frac{1}{6}$. 所以这条抛物线的解析式为 $\begin{aligned} y &= -\frac{1}{6}(x - 6)^2 + 6 \\ &= -\frac{1}{6}x^2 + 2x. \end{aligned}$

（3）设点 A 的坐标为 $(a, 0)$ ，则 $AD = BC = -\frac{1}{6}a^2 + 2a$ ，$AB = 12 - 2a$. 设这个支架的总长为 l. 根据题意，得 $\begin{aligned} l &= AD + BC + AB \\ &= 2 \cdot \left(-\frac{1}{6}a^2 + 2a\right) + 12 - 2a \\ &= -\frac{1}{3}(a - 3)^2 + 15. \end{aligned}$ 则当 $a = 3$ 时，$y_{最大} = 15$.

所以这个"支撑架"总长的最大值是 15 米.

22.（1）设成本为 m 元，$10 + 20 = 30$ ，$30 \times 0.8 = 24$ ，$\frac{24 - m}{m} = 20\%,$

解得 $m = 20$, 答：公司生产该商品每件成本为 20 元.

（2）设利润为 Z，则利润 $Z = (200 - 4x)x = -4x^2 + 200x$ ，

当 $x=25$ 时，利润最大，最大利润为：2500 元，答：第 25 天时利润最大，最大利润为 2500 元.

23. (1) $y=-x+50$. (2) $\begin{aligned} w&=(-x+50)(10x+100)\\ &=-10(x-20)^2+9000. \end{aligned}$

所以当 $x=20$ ，即每间房价定价为 $10\times 20+120=320$ 元时，每天利润最大，最大利润为 9000 元.

24. （1） 设 $y_1=kx$ ，函数 $y_1=kx$ 的图象过点 $(1,2)$ ，把 $(1,2)$ 代入 $y_1=kx$ 得 $2=k\times 1$ ，

$\therefore$ $k=2$ ，故利润 y_1 关于投资量 x 的函数关系式是 $y_1=2x\,(x\geqslant 0)$ ；

$\because$ 该抛物线的顶点是原点，$\therefore$ 设 $y_2=ax^2$ ，由图 2 所示，

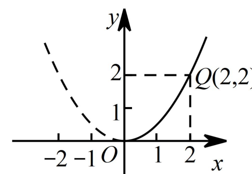


图2

函数 $y_2=ax^2$ 的图象过 $(2,2)$ ，把 $(2,2)$ 代入 $y_2=ax^2$ ，

$\therefore$ $2=a\cdot 2^2$ ，解得：$a=\dfrac{1}{2}$，故利润 y_2 关于投资量 x 的函数关系式是：

$y=\dfrac{1}{2}x^2\,(x\geqslant 0)$.

（2） $\because$ 种植花卉 m 万元 $(0\leqslant m\leqslant 8)$ ，则投入种植树木 $(8-m)$ 万元，

则 $\begin{aligned} w&=2(8-m)+0.5m^2\\ &=\frac{1}{2}m^2-2m+16\\ &=\frac{1}{2}(m-2)^2+14\,(0\leqslant m\leqslant 8). \end{aligned}$ $\because$ $a=0.5>0$ ，$0\leqslant m\leqslant 8$ ，

$\therefore$ 当 $m=2$ 时，w 的最小值是 14． $\because$ $a=0.5>0$ ，$\therefore$ 当 $m>2$ 时，w 随 m 的增大而增大．

$\because$ $0\leqslant m\leqslant 8$ ，$\therefore$ 当 $m=8$ 时，w 的最大值是 32．故他获得的最小利润是 14 万元，最大利润是 32 万元.

（3） $6\leqslant m\leqslant 8$.