23.1 图形的旋转 23.2 中心对称

【学习任务】

1、了解旋转的概念，理解图形旋转的三要素.

2、理解旋转的性质，并会运用其解决简单的旋转问题.

3、会按照要求作出旋转后的图形，体验旋转在现实生活中的应用.

4、了解中心对称和中心对称图形的概念及区别.

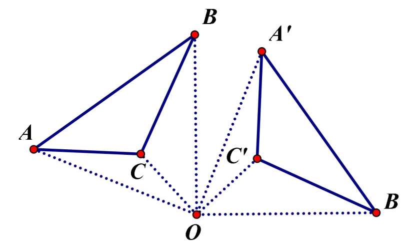
5、掌握中心对称的性质，会作一个图形关于一个已知点成中心对称的图形.

6、理解直角坐标系中关于原点成中心对称的点坐标特征.

【知识梳理】

旋转的相关定义

把一个平面图形绕着平面内某一点转动一个角度，就叫做图形的旋转（rotation），其中这个点叫做旋转中心，旋转的角叫做旋转角。如图，△A'B'C 就是△ABC 绕点 O 顺时针旋转 90° 得到的，其中点 A，B，C 分别与点 A'，B'，C'是对应点，∠ABC，∠ACB，∠BAC 分别与∠A'B'C'，∠A'C'B'，∠B'A'C'是对应角，线段 AB，BC，CA 分别与线段 A'B'，B'C'，C'A'是对应边.



旋转的性质

①对应点到旋转中心的距离相等；

②对应点与旋转中心所连线段的夹角等于旋转角；

③旋转前、后的图形全等.

旋转作图

①连：即连接图形中每一个关键点与旋转中心；

②转：即把连线按要求旋转中心转过一个角度（作旋转角）；

③截：即在角的另一边上截取与关键点到旋转中心的距离相等的线段，得到各点的对应点；

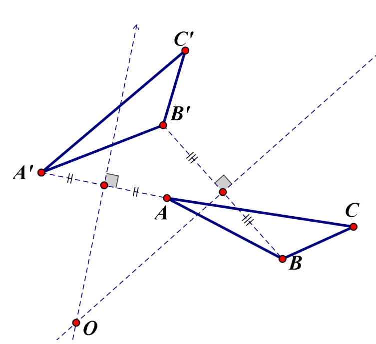
④连：即连接所得到的各点；

⑤写：即写出结论，说明作出的图形.

如何找旋转中心

1、先找到这个图像和旋转图形的两组对应点。

2、连接对应两点，然后就会出现两条线段，分别作这两条线段的中垂线，两条中垂线相交的地方就是旋转中心。【原理】能这样做是因为一个图形在发生旋转时，某一个点到旋转中心的距离是不会变的，而中垂线上的一点到两点距离也相等。



中心对称及其相关概念

把一个图形绕着某一个点旋转 180° ，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形叫做中心对称图形（central symmetry figure），这个点就是它的对称中心。像我们所学的线段、平行四边形、圆都是中心对称图形.

中心对称的性质

①中心对称的两个图形，对称点所连线段都经过对称中心，而且被对称中心所平分；

②中心对称的两个图形是全等图形.

拓展：

①中心对称是一种特殊的旋转对称，因此，它具有旋转对称的一切特征；

②成中心对称的两个图形，其对应线段互相平行（或在同一条直线上）且相等；

③中心对称的特征（性质）是画已知图形关于某点对称的图形的主要依据.

确定对称中心的方法

方法一：任意连接一对对称点，取这条线段的中点，则该点为对称中心；

方法二：任意连接两对对称点，这两条线段的交点既是对称中心.

中心对称的作图方法

作图关键：确定对称中心，再作出原图形上特殊点关于对称中心的对称点作图步骤：

①连接原图形上的所有特殊点和对称中心；

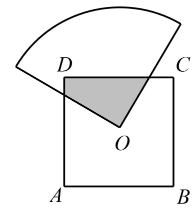
②再将以上连线延长找对称点，使得特殊点与对称中心的距离和对称点与对称中心的距离相等；

③将对称点按原图形的形状顺次连接起来，即可得出关于对称中心对称的图形.

【同步讲练】

一、选择题

1. 如图所示，O 是边长为 a 的正方形 $ABCD$ 的中心，将一块半径足够长．圆心为直角的扇形纸板的圆心放在点 O 处，并将纸板的圆心绕点 O 旋转，则正方形 $ABCD$ 被纸板覆盖部分的面积为（　　）



A. $\frac{1}{3}a^2$　　B. $\frac{1}{4}a^2$　　C. $\frac{1}{2}a^2$　　D. $\frac{1}{4}a$

2. 已知点 $A(a,1)$ 与点 $A'(5,b)$ 关于坐标原点对称，则实数 a，b 的值是（　　）

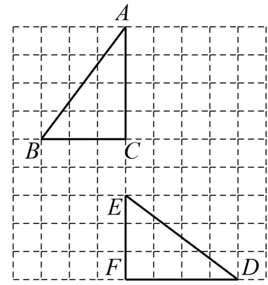
A. $a=5$，$b=1$　　B. $a=-5$，$b=1$

C. $a=5$，$b=-1$　　D. $a=-5$，$b=-1$

3. 下列图形中，不是中心对称图形的是（　　）

A. 五角星　　B. 菱形　　C. 矩形　　D. 正方形

4. 如图，在方格纸中，$\triangle ABC$ 经过变换得到 $\triangle DEF$，正确的变换是 (　　)



A. 把 $\triangle ABC$ 绕点 C 逆时针方向旋转 90°，再向下平移 2 格

B. 把 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针方向旋转 90°，再向下平移 5 格

C. 把 $\triangle ABC$ 向下平移 4 格，再绕点 C 逆时针方向旋转 180°

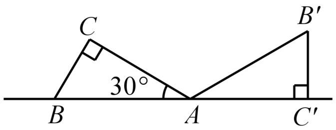
D. 把 $\triangle ABC$ 向下平移 5 格，再绕点 C 顺时针方向旋转 180°

5. 下列交通标志中，是中心对称图形的是 (　　)

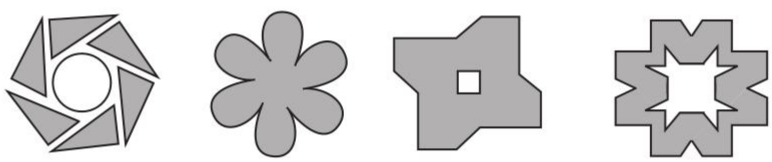
A. 　B. 　C. 　D. 

6. 如图所示，将一个含 30° 角的直角三角板 ABC 绕点 A 旋转，使得点 B，A，C' 在同一条直线上，则三角板 ABC 旋转的角度是 (　　)

A. 60°　　B. 90°　　C. 120°　　D. 150°



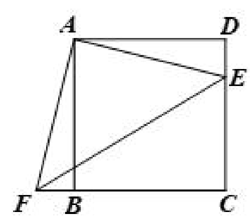
7. 如图所示的四个图案，能通过基本图形旋转得到的有 (　　)



①　②　③　④

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

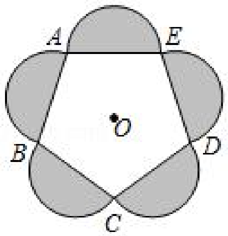
8. 如图，点 E 是正方形 $ABCD$ 中 CD 上的一点，把 $\triangle ADE$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 到 $\triangle ABF$ 的位置，若四边形 $AECF$ 的面积为 16，$DE=1$，则 EF 的长是 (　　)



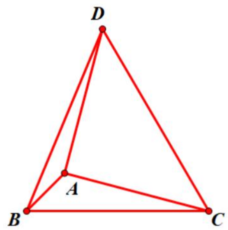
A. 4　　B. 5　　C. $2\sqrt{17}$　　D. $\sqrt{34}$

二、填空题

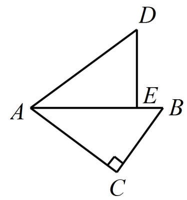
9. 点 O 是正五边形 $ABCDE$ 的中心，分别以各边为直径向正五边形的外部作半圆，组成了一幅美丽的图案（如图）．这个图案绕点 O 至少旋转________。后能与原来的图案互相重合．



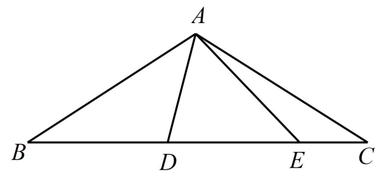
第 9 题图



第 10 题图



第 11 题图



第 12 题图

10. 如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=45^\circ$，$AB=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$，$BC=12$，以 AC 为直角边，A 为直角顶点作等腰直角 $\triangle ACD$，则 BD 的长为________.

11. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=4$，$BC=3$．将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转，使点 C 落在线段 AB 上的点 E 处，点 B 落在点 D 处，则 B，D 两点间的距离为________.

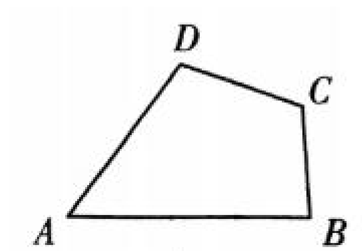
12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC=2\sqrt{3}$，$\angle BAC=120^\circ$，点 D，E 都在边 BC 上，$\angle DAE=60^\circ$．若 $BD=2CE$，则 DE 的长为________.

三、解答题

13. 如图，已知四边形 $ABCD$，点 A 与点 B 关于点 O 中心对称．

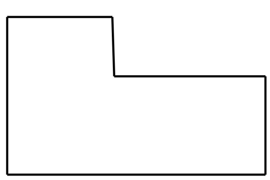
（1）试找出对称中心点 O；

（2）画出四边形 $ABCD$ 关于点 O 中心对称的图形．



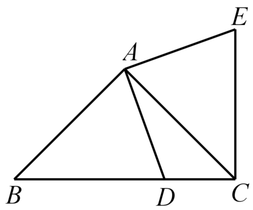
14. 如图：已知三角形 ABC 和三角形 $A'B'C'$ 关于某点成中心对称，请找出这个对称中心．

15. 画一条直线，你能将下面的图形分割成面积相等的两部分吗?动手画一画．

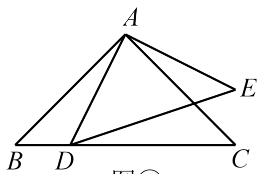


16. （1）. 问题：如图①，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，D 为 BC 边上一点（不与点 B，C 重合），将线段 AD 绕点 A 逆时针旋转 90° 得到 AE，连接 EC，则线段 BC，DC，EC 之间满足的等量关系式为________；

（2）. 探索：如图②，在 Rt$\triangle ABC$ 与 Rt$\triangle ADE$ 中，$AB = AC$，$AD = AE$，将 $\triangle ADE$ 绕点 A 旋转，使点 D 落在 BC 边上，试探索线段 AD，BD，CD 之间满足的等量关系，并证明你的结论；



图①

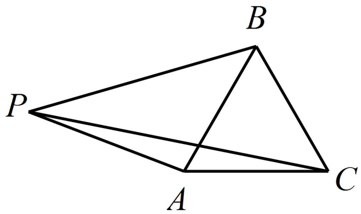


图②

17. 如图，点 P 是等边 $\triangle ABC$ 外一点，$PA=3$ ，$PB=4$ ，$PC=5$.

（1）将 $\triangle APC$ 绕点 A 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle AP_1C_1$ ，画出旋转后的图形；

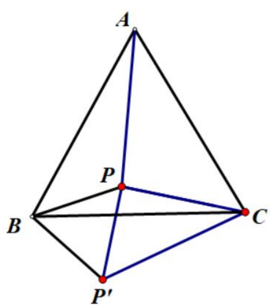
（2）在（1）所得的图形中，求 $\angle APB$ 的度数.



18. 如图已知，P 为等边三角形 ABC 内一点，且 $BP=3$ ，$PC=4$ ，将 BP 绕点 B 顺时针旋转 60° 至 BP' 的位置.

（1）试判断 $\triangle BPP'$ 的形状，并说明理由；

（2）若 $\angle BPC=150^\circ$ ，求 PA 的长度.



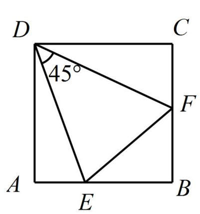
19. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，E 为直线 AB 上的动点（不与 A，B 重合），作射线 DE 并绕点 D 逆时针旋转 45°，交直线 BC 边于点 F，连接 EF.

（1）探究：当点 E 在边 AB 上，求证：$EF=AE+CF$.

（2）应用：

（i）当点 E 在边 AB 上，且 $AD=2$ 时，则 $\triangle BEF$ 的周长是________.

（ii）当点 E 不在边 AB 上时（如图 2、3），EF，AE，CF 三者的数量关系是______.



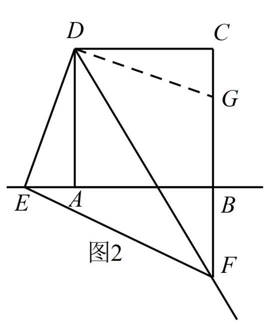


图2

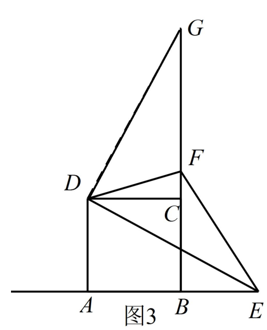


图3

20. 如图，在平面直角坐标系中，$A(0,a)$，$B(b,0)$，$C(c,0)$，且 $\sqrt{a-2}+|b-2|+(c+2)^2=0$．

（1）直接写出 A，B，C 各点的坐标：A ________，B ________，C ________；

（2）过 B 作直线 $MN\perp AB$，P 为线段 OC 上的一动点，$AP\perp PH$，PH 交直线 MN 于点 H，证明：$PA=PH$．

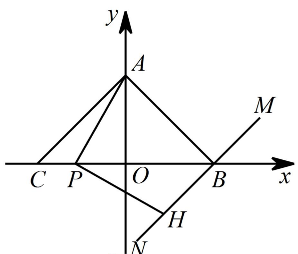


图1

21. 如图，E 是正方形 $ABCD$ 中 CD 边上的一点，AE 交对角线 BD 于点 P，过点 P 作 AE 的垂线交 BC 于点 G，连接 AG 交对角线 BD 于点 Q．

（1）求证：$AP=PG$；

（2）线段 BQ，PQ，PD 有何数量关系?证明你的结论；

（3）若 $AB=4$，过点 G 作 $GF\perp BD$ 于 F，直接写出 $GF+PD=$ ________.

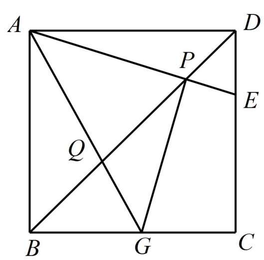


图1

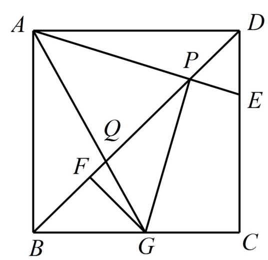


图2

22. 已知正方形 $ABCD$ 和正方形 $CGEF$，且 D 点在 CF 边上，连接 AE，M 为 AE 的中点，连接 MD，MF.

（1）. 如图 1，请直接写出线段 MD，MF 的数量及位置关系________；

（2）. 如图 2，把正方形 $CGEF$ 绕点 C 顺时针旋转 $45°$，使得 B，C，E 三点在同一条直线上，则（1）中的结论是否成立？若成立，请证明；若不成立，请给出你的结论并证明；

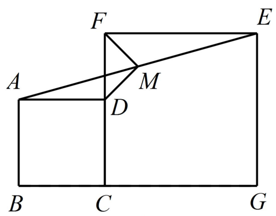


图1

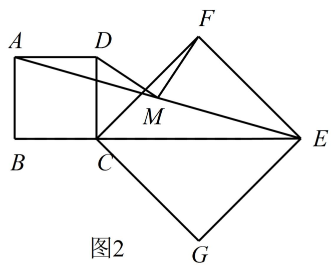


图2

23.1 图形的旋转 23.2 中心对称 答案

第一部分

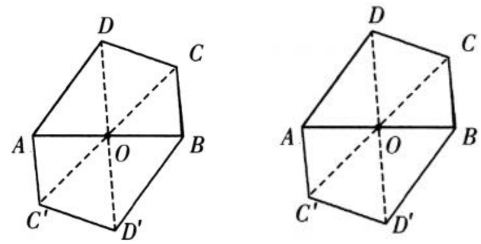
1. B 2. D 3. A 4. B 5. A 6. D 7. D 8. D

第二部分

9. 72【解析】连接 OA，OE，则这个图形至少旋转 $\angle AOE$ 才能与原图象重合，$\angle AOE=\dfrac{360^\circ}{5}=72^\circ$.

10. 13 11. $\sqrt{10}$ 12. $3\sqrt{3}-3$

第三部分

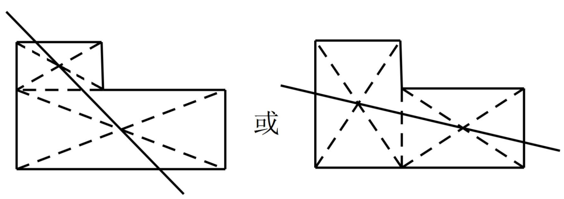


13.（1）如图所示.

（2）如图所示.

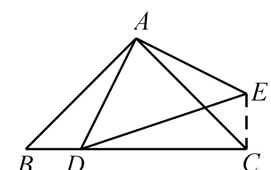
14. 略

15. 答案不唯一，举例如图.



16 (1) $DC+EC=BC$

(2) 线段 AD，BD，CD 之间满足的等量关系是 $BD^2+CD^2=2AD^2$.



图①

证明：如图①，连接 EC，$\because \angle BAC=\angle BAD+\angle DAC=90^\circ$，

$AB=AC$，$\therefore \angle ABC=\angle ACB=45^\circ$，

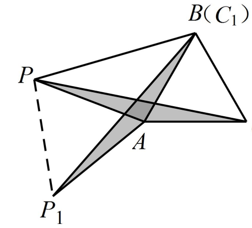
$\because \angle DAE=\angle CAE+\angle DAC=90^\circ$，$\therefore \angle BAD=\angle CAE$.

在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle CAE$ 中，$\begin{cases} AB=AC, \\ \angle BAD=\angle CAE, \\ AD=AE, \end{cases}$ $\therefore \triangle BAD\cong\triangle CAE$ (SAS)，

$\therefore BD=CE$，$\angle ACE=\angle ABC=45^\circ$，$\therefore \angle BCE=\angle ACB+\angle ACE=90^\circ$，

$\therefore BD\perp CE$，$\because \angle EAD=90^\circ$，$AE=AD$，$\therefore ED=\sqrt{2}AD$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ECD$ 中，$ED^2=CE^2+CD^2$，$\therefore BD^2+CD^2=2AD^2$.



17.（1）如图所示，

（2）$\because \triangle AP_1C_1$ 是由 $\triangle APC$ 旋转所得，

$\therefore \triangle AP_1C_1 \cong \triangle APC$ ，$\therefore P_1C_1 = PC = 5$ ，$AP = AP_1 = 3$ ，

$\angle PAP_1 = 60°$ ，$\therefore \triangle APP_1$ 是等边三角形，

$\therefore PP_1 = AP = 3$ ，$\angle APP_1 = 60°$ ，$\because PB = 4$ ，$P_1B = 5$ ，

$PP_1 = 3$ ，$\therefore PB^2 + PP_1^2 = P_1B^2$ ，$\therefore \angle P_1PB = 90°$ ，

$\therefore \angle APB = \angle BPP_1 - \angle APP_1 = 90° - 60° = 30°$.

18.（1）$\triangle BPP'$ 为等边三角形，理由：由旋转的性质可知 $\angle PBP' = 60°$ ，$BP = BP'$ ，

$\therefore \triangle BPP'$ 为等边三角形.

（2）$\because \triangle ABC$ ，$\triangle PBP'$ 为等边三角形，$\therefore AB = BC$ ，$\angle ABC = 60°$ ，

$BP = BP' = PP'$ ，$\angle PBP' = \angle BPP' = 60°$ ，$\therefore \angle ABP = \angle CBP'$ ，

在 $\triangle ABP$ 和 $\triangle CBP'$ 中，$\begin{cases} AB = CB, \\ \angle ABP = \angle CBP', \\ BP = BP', \end{cases}$ $\therefore \triangle ABP \cong \triangle CBP'$ ．$\therefore PA = P'C$.

$\because \angle BPP' = 60°$ ，$\angle BPC = 150°$ ．$\therefore \angle CPP' = 90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PCP'$ 中，$PP' = BP = 3$ ，$PC = 4$ ，$\therefore P'C = 5$ ．$\therefore AP = 5$.

19.（1）如图 1，延长 BA 到点 G，使 $AG = CF$ ，连接 DG，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore DA = DC$ ，$\angle DAG = \angle DCF = 90°$ ，

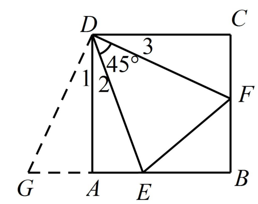


图1

在 $\triangle DAG$ 和 $\triangle DCF$ 中，$\begin{cases} AD = CD, \\ \angle DAG = \angle DCF, \\ AG = CF, \end{cases}$

$\therefore \triangle DAG \cong \triangle DCF\,(\mathrm{SAS})$ ，$\therefore \angle 1 = \angle 3$ ，$DG = DF$ ，

$\because \angle ADC = 90°$ ，$\angle EDF = 45°$ ，$\therefore \angle EDG = \angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 2 = 45° = \angle EDF$ ，

$\because DE = DE$ ，在 $\triangle GDE$ 和 $\triangle FDE$ 中，$\begin{cases} DG = DF, \\ \angle GDE = \angle FDE, \\ DE = DE, \end{cases}$ $\therefore \triangle GDE \cong \triangle FDE\,(\mathrm{SAS})$ ，

$\therefore EF = EG = AE + AG = AE + CF$.

（2）（i）4；（ii）$EF = CF - AE$ 或 $EF = AE - CF$

【解析】（i）$\triangle BEF$ 的周长 $= BE + BF + EF$ ，由探究得：$EF = AE + CF$ ，

$\therefore \triangle BEF$ 的周长 $= BE + BF + AE + CF = AB + BC = 2 + 2 = 4$.

（ii）当点 E 不在边 AB 上时，分两种情况：①点 E 在 BA 的延长线上时，如图 2，

$EF=CF-AE$，理由是：在 CB 上取 $CG=AE$，连接 DG.

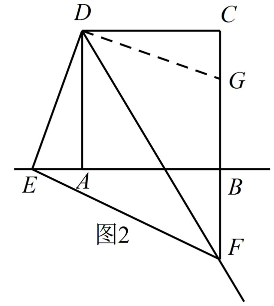


图2

在 $\triangle DAE$ 和 $\triangle DCG$ 中，$\begin{cases}AD=CD,\\ \angle DAE=\angle DCG,\\ AE=CG,\end{cases}$

$\therefore \triangle DAE\cong\triangle DCG\,(\text{SAS})$，$\therefore DE=DG$，$\angle EDA=\angle GDC$，$AE=CG$，$\because \angle ADC=90^\circ$，$\therefore \angle EDG=90^\circ$，

$\therefore \angle EDF+\angle FDG=90^\circ$，$\because \angle EDF=45^\circ$，

$\therefore \angle FDG=90^\circ-45^\circ=45^\circ$，$\therefore \angle EDF=\angle FDG=45^\circ$，

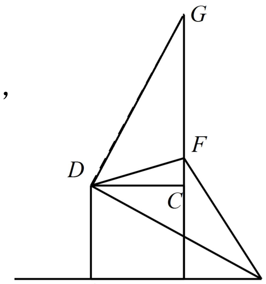


图3

在 $\triangle EDF$ 和 $\triangle GDF$ 中，$\begin{cases}DE=DG,\\ \angle EDF=\angle GDF,\\ DF=DF,\end{cases}$ $\therefore \triangle EDF\cong\triangle GDF\,(\text{SAS})$，

$\therefore EF=FG$，$\therefore EF=CF-CG=CF-AE$.

②当点 E 在 AB 的延长线上时，如图 3，$EF=AE-CF$，理由是：

把 $\triangle DAE$ 绕点 D 逆时针旋转 90° 至 $\triangle DCG$，可使 AD 与 DC 重合.

由旋转得：$DE=DG$，$\angle EDG=90^\circ$，$AE=CG$，

$\because \angle EDF=45^\circ$，$\therefore \angle GDF=90^\circ-45^\circ=45^\circ$，$\therefore \angle EDF=\angle GDF$，$\because DF=DF$，

在 $\triangle EDF$ 和 $\triangle GDF$ 中，$\begin{cases}DG=DE,\\ \angle EDF=\angle GDF,\\ DF=DF,\end{cases}$ $\therefore \triangle EDF\cong\triangle GDF\,(\text{SAS})$，

$\therefore EF=GF$，$\therefore EF=CG-CF=AE-CF$.

综上所述，当点 E 不在边 AB 上时，EF，AE，CF 三者的数量关系是：$EF=CF-AE$ 或 $EF=AE-CF$.

20.（1）$(0,2)$；$(2,0)$；$(-2,0)$

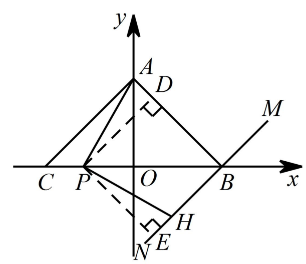


图1

（2）过点 P 作 $PD\perp AB$ 于点 D，$PE\perp MN$ 于点 E，如图 1，

因为 $A(0,2)$，$B(2,0)$，所以 $OA=OB=2$，所以 $\angle ABO=45^\circ$，

所以 $\angle EBC=90^\circ-45^\circ=45^\circ$. 所以 PB 平分 $\angle ABH$，

所以 $PD=PE$，因为 $\angle APH=\angle DPE=90^\circ$，

所以 $\angle APD=\angle HPE$，在 $\triangle PAD$ 和 $\triangle PHE$ 中，

$\begin{cases}\angle PDA=\angle PEH,\\ PD=PE,\\ \angle DPA=\angle EPH,\end{cases}$ 所以 $\triangle PAD\cong\triangle PHE$. 所以 $PA=PH$.

21. （1） 如图 1，作 $PH \perp AB$ 于 H，$PT \perp BC$ 于 T，

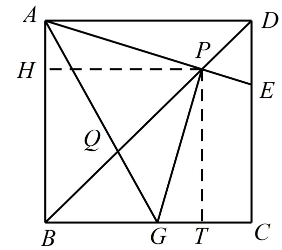


图1

$\therefore \angle PHA = \angle PTG = 90^\circ$，$\because$ BD 是 $\angle ABC$ 的平分线，

$\therefore$ $PH = PT$，$\because$ $AE \perp PG$，$\therefore$ $\angle APH + \angle HPG = 90^\circ$，

$\because$ $\angle TPG + \angle HPG = 90^\circ$，$\therefore$ $\angle APH = \angle GPT$．

在 $\triangle APH$ 和 $\triangle GPT$ 中，$\begin{cases} \angle APH = \angle GPT, \\ PH = PT, \\ \angle PHA = \angle PTG, \end{cases}$

$\therefore$ $\triangle APH \cong \triangle GPT$，$\therefore$ $PA = PG$．

（2） $PQ^2 = PD^2 + BQ^2$．证明如下：

作 $BM \perp BD$，$BM = PD$，连接 AM，MQ，

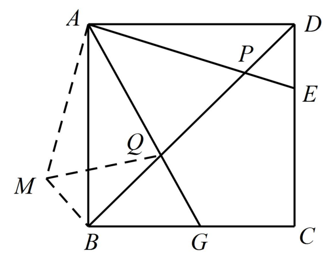


图2

易证 $\triangle ADP \cong \triangle ABM$，$\therefore$ $AM = AP$，$\angle BAM = \angle DAP$，

$\because$ $\angle PAQ = 45^\circ$，

$\therefore$ $\angle DAP + \angle BAQ = \angle BAM + \angle BAQ = 45^\circ$，

即 $\angle MAQ = 45^\circ$，易证 $\triangle MAQ \cong \triangle PAQ$，

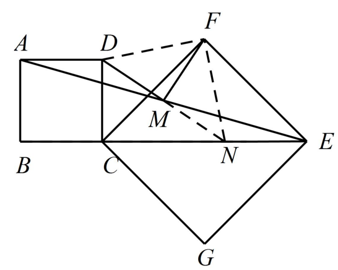
$\therefore$ $MQ = PQ$，$\therefore$ $MQ^2 = BM^2 + BQ^2$，

$\therefore$ $PQ^2 = PD^2 + BQ^2$．

（3） $2\sqrt{2}$

22 (1) $MD = MF$，$MD \perp MF$．

(2) $MD = MF$，$MD \perp MF$ 仍成立.



证明：如图，延长 DM 交 CE 于点 N，连接 FN，DF，

$\because CE$ 是正方形 $CFEG$ 的对角线，

$\therefore \angle FCN = \angle CEF = 45^\circ$，$\because \angle DCE = 90^\circ$，$\therefore \angle DCF = 45^\circ$，

$\because AD \parallel BC$，$\therefore \angle DAM = \angle NEM$，在 $\triangle ADM$ 和 $\triangle ENM$ 中，

$\begin{cases} \angle DAM = \angle NEM, \\ AM = EM, \\ \angle AMD = \angle EMN, \end{cases}$ $\therefore \triangle ADM \cong \triangle ENM$，$\therefore EN = AD$，

$DM = MN$，$\because AD = CD$，$\therefore CD = EN$，在 $\triangle CDF$ 和 $\triangle ENF$ 中，

$\begin{cases} CD = EN, \\ \angle DCF = \angle CEF, \\ CF = EF, \end{cases}$ $\therefore \triangle CDF \cong \triangle ENF$，$\therefore DF = NF$，$\angle CFD = \angle EFN$；

$\because \angle EFN + \angle CFN = 90^\circ$，$\therefore \angle CFD + \angle CFN = 90^\circ$，$\therefore \angle DFN = 90^\circ$，

$\therefore \triangle DFN$ 为等腰直角三角形，$\because DM = MN$，$\therefore FM = DM$，$FM \perp DM$．