24.1 圆的有关性质

【学习任务】

1、了解圆及圆中的一些相关概念，理解圆既是轴对称图形又是中心对称图形.

2、理解垂径定理及其推论，并能够应用垂径定理解决实际问题.

3、理解弧、弦、圆心角之间的关系，理解掌握圆周角定理及推论，并能灵活运用.

【知识梳理】

一、垂径定理

- 垂径定理

  垂直于弦的直径平分弦，并且平分弦所对的两条弧.

- 垂径定理的推论

  推论 1

  平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧.

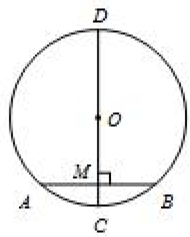
  弦的垂直平分线经过圆心，并且平分弦所对的两条弧.

  平分弦所对的一条弧的直径，垂直平分弦，并且平分弦所对的另一条弧.

  推论 2

  在同圆或等圆中，圆的两条平行弦所夹的弧相等.

- 对垂径定理的总结

名称	文字语言	符号语言	图示
垂径定理	垂直于弦的直径平分弦，并且平分弦所对的两条弧	$\left.\begin{array}{l}CD\text{是直径}\\ CD\perp AB\text{于点}M\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}AM=BM\\ \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}\\ \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}\end{cases}$	
垂径定理的推论	平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧	$\left.\begin{array}{l}CD\text{是直径}\\ CD\text{交}AB\text{于点}M\\ (AB\text{不是直径})\\ AM=BM\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}\\ \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}\\ CD\perp AB\end{cases}$	
拓展	平分弦所对的一条弧的直径垂直平分弦，并且平分弦所对的另一条弧	$\left.\begin{array}{l}CD\text{是直径}\\ CD\text{交}AB\text{于点}M\\ \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}\\ CD\perp AB\\ AM=BM\end{cases}$	
	弦的垂直平分线经过圆心，并且平分弦所对的两条弧	$\left.\begin{array}{l}CD\perp AB\text{于点}M\\ AM=BM\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}\\ \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}\\ CD\text{是直径}\end{cases}$	
归纳	对于一个圆和一条直线，如果具备下列五个条件中的任意两个，那么一定具备其他三个：①过圆心；②垂直于弦；③平分弦（非直径）；④平分弦所对的劣弧；⑤平分弦所对的优弧.简记为“知二推三”.		

二、弧、弦、圆心角的关系定理

- 圆心角

  顶点在圆心的角叫做圆心角（central angle）.

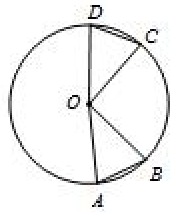
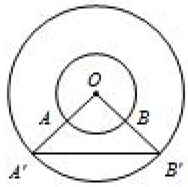
- 弧弦角关系定理

  ① 在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦也相等；

② 在同圆或等圆中，如果两条弧相等，那么它们所对的圆心角相等，所对的弦也相等；

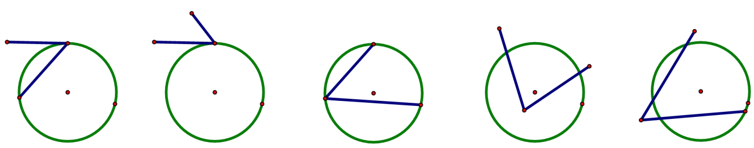
③ 在同圆或等圆中，如果两条弦相等，那么它们所对的圆心角相等，所对的优弧或劣弧也相等.

- 弧、弦、圆心角之间的关系

名称	文字语言	符号语言	图示
定理	在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦也相等	$\angle AOB=\angle COD\Rightarrow\begin{cases}\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}\\AB=CD\end{cases}$	
重要结论	在同圆或等圆中，如果两条弧相等，那么它们所对的圆心角相等，所对的弦相等	$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}\Rightarrow\begin{cases}\angle AOB=\angle COD\\AB=CD\end{cases}$	
	在同圆或等圆中，如果两条弦相等，那么它们所对的圆心角相等，所对的优弧、劣弧相等	$AB=CD\Rightarrow\begin{cases}\angle AOB=\angle COD\\\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}\\\overset{\frown}{ADB}=\overset{\frown}{CBD}\end{cases}$	
注意	不能忽略“在同圆或等圆中”这个前提条件，如果丢掉了这个前提条件，即使圆心角相等，所对的弧、弦也不一定相等.如右图所示，两个圆的圆心相同，$\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{A'B'}$ 对应同一个圆心角，但 $\overset{\frown}{AB}\ne\overset{\frown}{A'B'}$， $AB\ne A'B'$		
规律总结	在同圆或等圆中，两条弧（一般同为优弧或劣弧）、两条弦、两个圆心角中，只要有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量也分别相等		

三、圆内接四边形的性质

- 圆内接多边形：如果一个多边形的所有顶点都在同一个圆上，这个多边形叫做圆内接多边形，这个圆叫做这个多边形的外接圆.
- 圆内接四边形的性质：圆内接四边形的对角互补.　圆内接四边形的外角等于它的内对角.
- 圆周角：顶点在圆上，并且两边都与圆相交的角叫做圆周角（angle in a circular segment）.
  圆周角必须具备两个特征：第一，顶点在圆上；第二，两边都与圆相交，如图，只有图 ③ 中的角是圆周角.



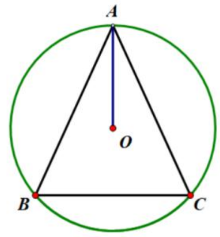
①　②　③　④　⑤

- 圆周角定理
  在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等，都等于这条弧所对的圆心角的一半.
- 圆周角定理的推论
  ① 在同圆或等圆中，如果两个圆周角相等，它们所对的弧一定相等；
  ② 半圆（或直径）所对的圆周角是直角， 90° 的圆周角所对的弦是直径.

【同步讲练】

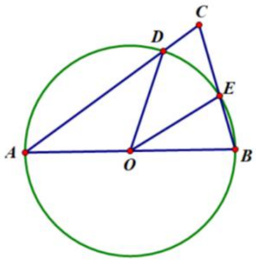
一. 圆的基本概念

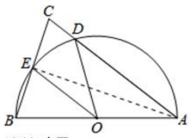
1、如图 AB、AC 是⊙O 的两条弦，且 AB=AC，求证：AO⊥BC



【解析】延长 AO 交 BC 于 M，用垂径定理推论即可。

2、如图，在△ABC 中，以 AB 为直径的⊙O 交 AC 于 D，交 BC 于 E，若∠C=70°，求∠DOE 的度数。





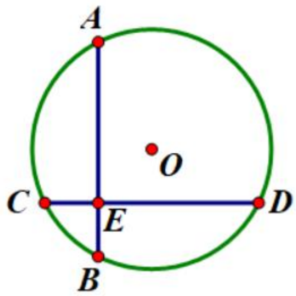
连接AE，
$\because AB$是⊙O的直径，
$\therefore \angle AEB = 90^\circ$，
$\therefore AE \perp BC$，

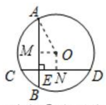
$\because BE = CE$，
$\therefore AB = AC$，
$\therefore \angle B = \angle C = 70^\circ$，$\angle BAC = 2\angle CAE$
，
$\therefore \angle BAC = 40^\circ$，
$\therefore \angle DOE = 2\angle CAE = \angle BAC = 40^\circ$.

3、已知⊙O 的半径为 8，点 P 是⊙O 内一点，且 PO=6，则点 P 与⊙O 上一点的最大距离为__14__，最小距离为__2__。（直接写结果）

二. 垂径定理

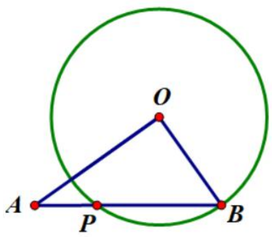
1、如图，⊙O 的两条弦 AB、CD 互相垂直，垂足为 E，且 AB=CD，CE=1，ED=3，求⊙O 的半径。



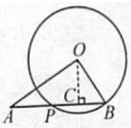


过点O分别作AB、CD的垂线OM、ON，
则四边形$OMEN$是矩形，连接OA.
$\because AB = CD$，$AB \perp CD$，
$\therefore OM = ON$，
$\therefore$矩形$OMEN$是正方形.
$\because CE = 1$，$ED = 3$，
$\therefore CD = 1 + 3 = 4$，
$\because ON \perp CD$
$\therefore CN = \frac{1}{2}CD = 2$，
$\therefore EN = OM = 1$，
同理：$AM = 2$.
在直角$\triangle AMO$中，
$OA = \sqrt{AM^2 + OM^2} = \sqrt{5}$.

2、如图，在 Rt△ABO 中，∠O=90°，AO=$\sqrt{2}$，BO=1，以 O 为圆心，OB 为半径的圆交 AB 于点 P，求 PB 的长。

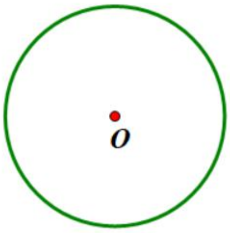


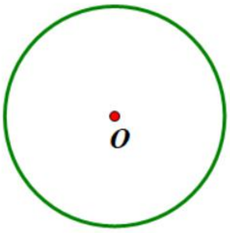
2.解：过 O 作 $OC \perp AB$ 于 C，如图，在 Rt$\triangle ABO$ 中，$AO=\sqrt{2}$，$BO=1$，$\therefore AB=\sqrt{AO^2+BO^2}=\sqrt{3}$.设 $BC=x$，则 $CA=\sqrt{3}-x$，由勾股定理得 $AO^2-CA^2=OC^2=BO^2-BC^2$，即$(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}-x)^2=1^2-x^2$，解得 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$，即 $BC=\frac{\sqrt{3}}{3}$，由垂径定理得 $PB=2BC=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

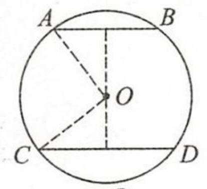


3、在半径为 5 的⊙O 中，弦 AB=6，弦 CD=8，且 AB∥CD，求 AB 与 CD 之间的距离。

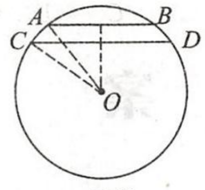
①AB,CD 在圆心 O 的两侧，易得 AB 与 CD 之间的距离为 7；如图②AB,CD 在圆心 O 的同侧，易得 AB 与 CD 之间的距离为 1.





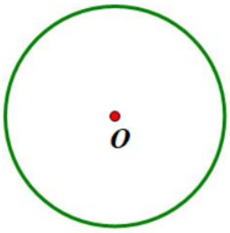


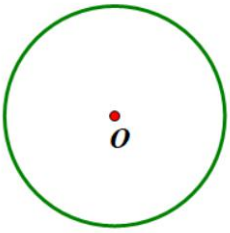
图①



图②

4、已知△ABC 内接于⊙O，AB=AC，且 O 到 BC 的距离为 6，⊙O 的半径为 10，求 AB 的长。



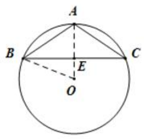


如图所示：$OE=6$，$OB=OA=10$

$\therefore BE=\sqrt{OB^2-OE^2}=8$

$\because AE=OA-OE=4$

$\therefore AB=\sqrt{BE^2+AE^2}=4\sqrt{5}$

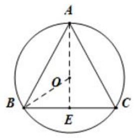


如图所示：$OB=OA=10$，$OE=6$

$\therefore BE=\sqrt{OB^2-OE^2}=8$

$\because AE=OA+OE=16$

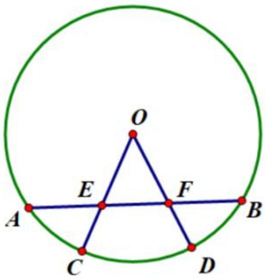
$\therefore AB=\sqrt{AE^2+BE^2}=8\sqrt{5}$

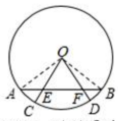


综上所述，腰长为$5\sqrt{5}$或$8\sqrt{5}$

三．垂径定理的应用

1、如图，AB 是⊙O 的弦，半径 OC，OD 分别交 AB 于 E，F，且 AE=BF，求证：OE=OF





证明：连接OA，OB，

$\because OA=OB$，

$\therefore \angle OAB=\angle OBA$.

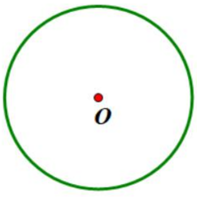
在$\triangle OAE$和$\triangle OBF$中，

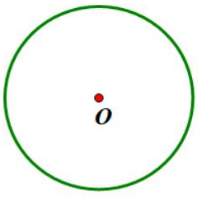
$\begin{cases} AE=BF \\ \angle OAB=\angle OBA, \\ OA=OB \end{cases}$

$\therefore \triangle OAE \cong \triangle OBF\,(SAS)$.

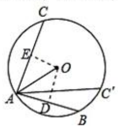
$\therefore OE=OF$.

2、如图，⊙O 的半径 OA=1，弦 AB，AC 的长分别是$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，求∠BAC 的度数。





根据题意画出图形，如图所示，分别作OD⊥AB，OE⊥AC，垂足分别是D、E.



∵OE⊥AC，OD⊥AB，

∴AE= $\frac{1}{2}$AC= $\frac{\sqrt{3}}{2}$，AD= $\frac{1}{2}$AB= $\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴sin∠AOE= $\frac{AE}{AO}$ = $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$，sin∠AOD= $\frac{AD}{OA}$ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴∠AOE=60°，∠AOD=45°，

∴∠BAO=45°，∠CAO=90°-60°=30°，

∴∠BAC=45°+30°=75°，或

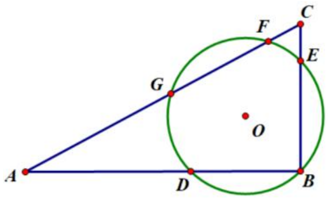
∠BAC'=45°-30°=15°.

∴∠BAC=15°或75°.

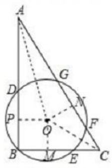
3、如图，在 Rt△ABC 中，∠ABC=90°，O 为△ABC 的角平分线的交点，以 O 为圆心，OB 为半径的⊙O 与△ABC 的三边分别相交于 D，E，F，G

（1）求证：BD=BE=GF

（2）若 AD=9，CF=2，求△ABC 的周长



分别过O点作△ABC三边的垂线，垂足分别为点P、M、N，连OA、OC，如图，



∵O为$\triangle ABC$的角平分线的交点，

∴OP=OM=ON，

∴DB=BE=GF，

∴DP=PB=BM=ME=FN=NG，

∵$\begin{cases}OP=ON\\AO=AO\end{cases}$，$\begin{cases}OC=OC\\OM=ON\end{cases}$，

∴Rt△OAP≌Rt△OAN，Rt△OCM≌Rt△OCN，

∴AP=AN，CM=CN，

∴AD=AG=9，CE=CF=2，

设BD=x，则AB=9+x，BC=2+x，AC=11+x，

∵$AC^2=AB^2+BC^2$，

∴$(11+x)^2=(9+x)^2+(2+x)^2$，

∴$x^2=36$，

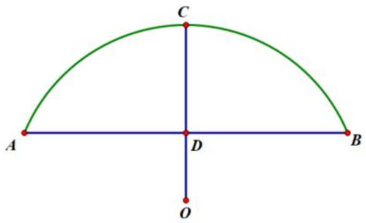
∴x=6，

∴△ABC的周长=9+x+2+x+11+x=3x+22=40．

4、如图，某地有一座圆弧形的拱桥，桥下水面宽度 AB 为 7.2m，拱高 CD 为 2.4m

（1）求拱桥的半径

（2）现有一艘宽 3m、船舱顶部为长方形并高出水面 2m 的货船要经过这里，此货船能顺利通过拱桥吗？



解：(1)连接OB.

∵OC⊥AB，∴D为AB的中点.

∴BD = $\frac{1}{2}$AB = 3.6(m).

设OB = OC = r，则OD = (r - 2.4)m.

在Rt△BOD中，$OB^2=OD^2+BD^2$，即$r^2 = (r - 2.4)^2 + 3.6^2$，解得r = 3.9.

∴拱桥的半径为3.9 m.

(2)作出拱桥下的矩形，交拱桥于M，N，交CD于E，连接ON.

∵CD = 2.4 m，DE=2 m，

∴CE = CD - DE = 0.4(m).

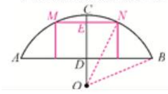
∴OE = OC - CE = 3.9 - 0.4 = 3.5(m).

在Rt△OEN中，EN = $\sqrt{ON^2-OE^2}$ = $\sqrt{3.9^2-3.5^2}$ = $\sqrt{2.96}$ (m^2)，

∵OD⊥MN，

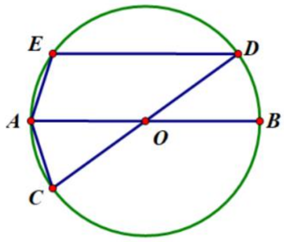
∴MN = 2EN = 2×$\sqrt{2.96}$ ≈3.44 m>3 m.

∴此货船能顺利通过拱桥.

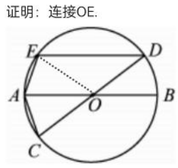


四．弧、弦、圆心角

1、如图，AB、CD 是⊙O 直径，弦 DE∥AB，求证：AC=AE



证明：连接OE.



∵OD=OE，

∴∠OED=∠ODE.

∵DE∥AB，

∴∠AOE=∠OED，∠BOD=∠ODE，

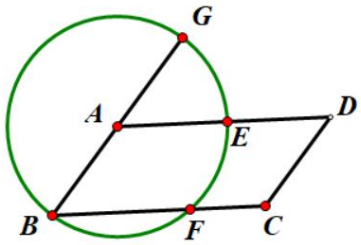
∴∠AOE=∠BOD.

∵∠AOC=∠BOD，

∴∠AOE=∠AOC，

∴AC=AE.

2、如图，以▱ABCD 的顶点 A 为圆心，AB 为半径作⊙A，⊙A 交 AD，BC 于 E，F，延长 BA 交⊙A 于 G，求证：$\widehat{GE}=\widehat{EF}$

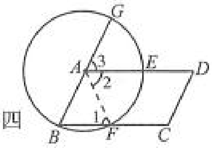


解：如图，连接 AF.

在⊙A 中，$AB=AF$，

$\therefore \angle B=\angle 1$.

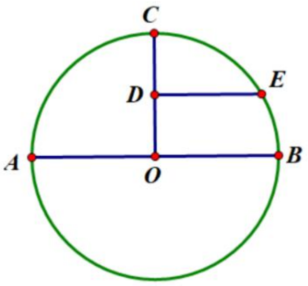
又四边形 $ABCD$ 是平行四边形，



$\therefore AD/\!/BC$. $\therefore \angle 1=\angle 2$，$\angle B=\angle 3$，

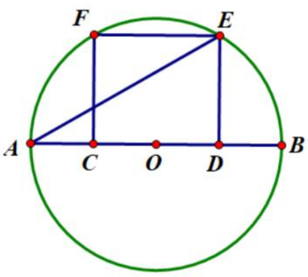
即 $\angle 2=\angle 3$. $\therefore \widehat{GE}=\widehat{EF}$.

3、如图，⊙O 中，AB 是直径，C 是⊙O 上一点，CO⊥AB，D 是 CO 的中点，DE∥AB，
求证：$\widehat{EC}=2\widehat{BE}$

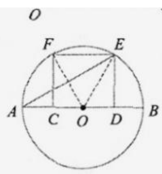


证明：连接 OE，CE，$\because$ DE 垂直平分 OC，$\therefore EC=EO$，又 $OC=OE$，$\therefore OC=OE=EC$，$\therefore$ $\triangle OCE$ 为等边三角形，$\therefore \angle COE=60°$，$\therefore \angle COB=90°$，$\therefore \angle BOE=30°$，$\therefore \widehat{EC}=2\widehat{BE}$.

4、如图，AB 为⊙O 的直径，C，D 分别是 OA，OB 的中点，CF⊥AB，ED⊥AB，点 E，F 都在⊙O 上
求证：（1）CF=DE　（2）$\widehat{AF}=\widehat{EF}=\widehat{BE}$　（3）AE=2CF



证明：(1) 连结 OF，OE，如图.



$\because AB$ 为⊙O 的直径，C，D 分别为 OA，OB 的中点，

$\therefore OC=OD$，而 $OF=OE$，$\therefore$Rt$\triangle OCF\cong$Rt$\triangle ODE$，$\therefore CF=DE$；

(2) 在 Rt$\triangle OCF$ 中，$OC=\frac{1}{2}OF$，$\therefore \angle CFO=30°$，$\therefore \angle COF=60°$.

$\therefore \angle BOE=60°$，$\therefore \angle EOF=180°-60°-60°=60°$.

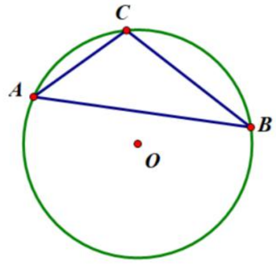
$\therefore \angle AOF=\angle FOE=\angle EOD$，$\therefore \widehat{AF}=\widehat{EF}=\widehat{BE}$；

(3) $\because OE=OA$，$\therefore \angle A=\angle OEA$.

$\because \angle DOE=\angle A+\angle OEA=60°$，$\therefore \angle A=30°$，$\therefore AE=2DE$，$\therefore AE=2CF$.

五．圆周角（一）

1、如图，⊙O 的半径为 4，∠CBA=30°，求 AC 的长

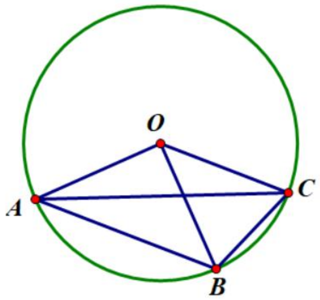


【解析】连接 OA、OC，证明△OAC 为等边三角形。

2、（2017 武汉元调）如图，OA，OB，OC 都是⊙O 的半径，∠AOB=2∠BOC

（1）求证：∠ACB=2∠BAC

（2）若 AC 平分∠OAB，求∠AOC 的度数。



（1）在⊙O中，由圆周角定理得：

$\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$，$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$.

∵∠AOB=2∠BOC，

∴∠ACB=2∠BAC.

（2）设∠BAC=x.

∵AC平分∠OAB，

∴∠OAB=2∠BAC=2x.

∵∠AOB=2∠ACB，∠ACB=2∠BAC，

∴∠AOB=2∠ACB=4∠BAC=4x.

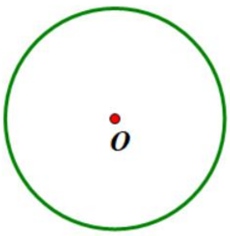
在△OAB中，∠AOB+∠OAB+∠OBA=180°，

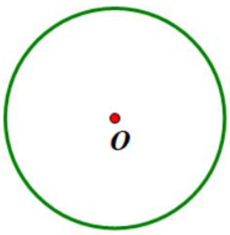
∴4x+2x+2x=180°，

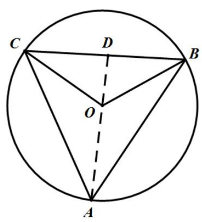
∴x=22.5°，

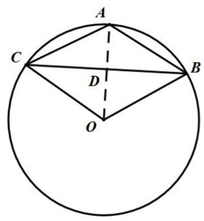
∴∠AOC=∠AOB+∠BOC=4x+2x=6x=135°.

3、已知 BC 为⊙O 的弦，BC=4，∠BOC=120°，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$，求 $S_{\triangle ABC}$









如图:连接AO,交BC于D,

$\because \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$

$\therefore AD\perp BC$

$\therefore CD=BD=\frac{1}{2}BC=2$

$\because \angle BOC=120^\circ$

$\therefore \angle OCB=\angle OBC$,

$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC=60^\circ$

$\because OC=OB$

$\therefore \angle OCB=\angle OBC=30^\circ$

$\therefore OC=2OD$

$\because CD^2+OD^2=OC^2$

$\therefore OD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $OC=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$\therefore AD=AO+OD=2\sqrt{3}$

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=4\sqrt{3}$

如图:连接AO,交BC于D,

$\because \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$

$\therefore AD\perp BC$

$\therefore CD=BD=\frac{1}{2}BC=2$

$\because \angle BOC=120^\circ$

$\therefore \angle OCB=\angle OBC$,

$\because OC=OB$

$\therefore \angle OCB=\angle OBC=30^\circ$

$\therefore OC=2OD$

$\because CD^2+OD^2=OC^2$

$\therefore OD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $OC=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$\therefore AD=AO-OD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

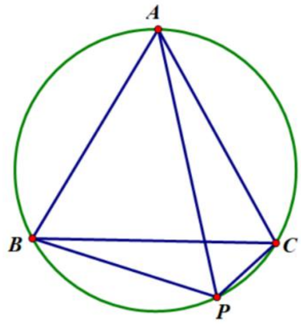
$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

3、如图，ABPC 是⊙O 上的四个点，∠APB=∠APC=60°

（1）判断△ABC 的形状，并证明你的结论

（2）求证：PA=PB+PC

（3）求证：$S_{\triangle BPC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}PB\cdot PC$



(1)等边三角形.

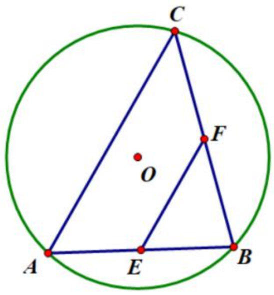
(2)在 PA 上截取 $PQ=PC$，易得△PQC 为正三角形，再证△AQC≌△BPC，∴$AQ=PB$，∴$PA=PB+PC$；

(3)作 $BE\perp PC$ 于 E，∵$\angle BPE=60°$，∴$BE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}PB$，∴$S_{\triangle BPC}=\dfrac{1}{2}PC\cdot BE=\dfrac{\sqrt{3}}{4}PB\cdot PC$；

六．圆周角（二）

1、在直径为 10cm 的⊙O 中，弦 AB=5cm，则弦 AB 所对的圆周角的度数是____30° 或 150°____。

2、（2016 武汉四模）如图，AB 是⊙O 的弦，AB=6，点 C 是⊙O 上的一个动点，且∠ACB=45°，若点 E，F 分别是 AB，AC 的中点，则 EF 的最大值为_ $3\sqrt{2}$ ___。

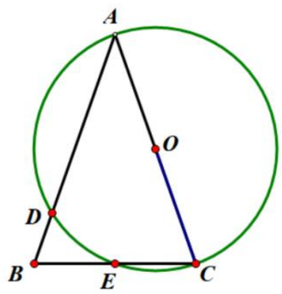


【解析】连 OA、OB，得△OAB 为等腰直角三角形，EF 是△ABC 的中位线

3、如图，在△ABC 中，AB=AC，以 AC 为直径的⊙O 交 AB 于点 D，交 BC 于点 E，

（1）求证：BE=CE

（2）若 BD=2，BE=3，求 AC 的长



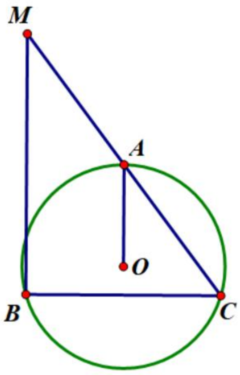
【解析】（1）连 AE，三线合一可证结论

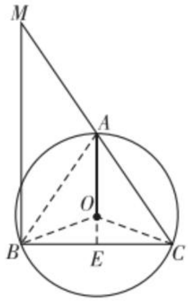
（2）连 CD，设 AC=x，则 AD=x-2，又 BC=6，$CD^2=AC^2-AD^2=BC^2-BD^2$

4、如图，在⊙O 中，$\widehat{AB}=\widehat{AC}$，连 AO

（1）求证：OA⊥BC

（2）过 B 作 BM∥OA 交 CA 的延长线于 M，若 CM=16，OA=5，求 BM 的长。





4. 解：(1)连接 AB，OB，OC，证△AOB≌△AOC(SSS)即可；

(2)易证∠$MBC=90°$，∵$AB=AC$，∴$MA=AC=8$，延长 AO 交 BC 于点 E，易证 $AE\perp BC$，设 $OE=x$，

∵$AB^2-AE^2=BE^2=OB^2-OE^2$，

∴$8^2-(5+x)^2=5^2-x^2$，∴$x=\frac{7}{5}$，

∴$AE=5+\frac{7}{5}=\frac{32}{5}$，

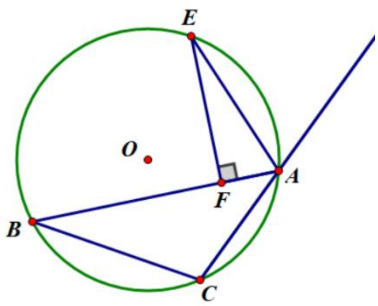
∵AE 为△BMC 的中位线，∴$BM=2AE=\frac{64}{5}$.

5、如图，△ABC 内接于⊙O，且 AB＞AC，∠BAC 的外角平分线交⊙O 于 E，EF⊥AB，垂足为 F.

（1）求证：$\widehat{EB}=\widehat{EC}$；

（2）求证：AB-AC=2AF；

（3）若 AB=a，AC=b，则 BF= ________________（直接写出结果）.



(1)证明：如图，连接 EB、EC.

∵△BAC 的外角平分线交⊙O 于点 E，且四边形 $EBCA$ 内接于⊙O，∴∠BAE=∠EBC.

∵∠EAB=∠ECB，∴∠EBC=∠ECB.

∴$\widehat{EB}=\widehat{EC}$.

(2)证明：如图，过点 E 作 $EM\perp CA$ 交 CA 延长线于点 M，

易得 $EM=EF$，易证△BEF≌△CEM.

∴$BF=CM$.

∴$AB-AC=AF+BF-AC=AF+AM=2AF$.

(3)$\frac{a+b}{2}$