24.1 圆的有关性质

【学习任务】

1、了解圆及圆中的一些相关概念，理解圆既是轴对称图形又是中心对称图形.

2、理解垂径定理及其推论，并能够应用垂径定理解决实际问题.

3、理解弧、弦、圆心角之间的关系，理解掌握圆周角定理及推论，并能灵活运用.

【知识梳理】

一、垂径定理

- 垂径定理

  垂直于弦的直径平分弦，并且平分弦所对的两条弧.

- 垂径定理的推论

  推论 1

  平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧.

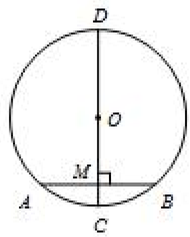
  弦的垂直平分线经过圆心，并且平分弦所对的两条弧.

  平分弦所对的一条弧的直径，垂直平分弦，并且平分弦所对的另一条弧.

  推论 2

  在同圆或等圆中，圆的两条平行弦所夹的弧相等.

- 对垂径定理的总结

名称	文字语言	符号语言	图示
垂径定理	垂直于弦的直径平分弦，并且平分弦所对的两条弧	$\left.\begin{array}{l}CD是直径\\CD\perp AB于点M\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}AM=BM\\\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}\\\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}\end{array}\right.$	
垂径定理的推论	平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧	$\left.\begin{array}{l}CD是直径\\CD交AB于点M\\（AB不是直径）\\AM=BM\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}\\\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}\\CD\perp AB\end{array}\right.$	
拓展	平分弦所对的一条弧的直径垂直平分弦，并且平分弦所对的另一条弧	$\left.\begin{array}{l}CD是直径\\CD交AB于点M\\\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}\\CD\perp AB\\AM=BM\end{array}\right.$	
	弦的垂直平分线经过圆心，并且平分弦所对的两条弧	$\left.\begin{array}{l}CD\perp AB于点M\\AM=BM\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}\\\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}\\CD是直径\end{array}\right.$	
归纳	对于一个圆和一条直线，如果具备下列五个条件中的任意两个，那么一定具备其他三个：①过圆心；②垂直于弦；③平分弦（非直径）；④平分弦所对的劣弧；⑤平分弦所对的优弧.简记为“知二推三”.		

二、弧、弦、圆心角的关系定理

- 圆心角

  顶点在圆心的角叫做圆心角（central angle）.

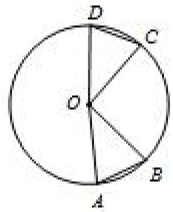
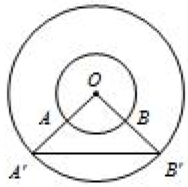
- 弧弦角关系定理

  ① 在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦也相等；

② 在同圆或等圆中，如果两条弧相等，那么它们所对的圆心角相等，所对的弦也相等；

③ 在同圆或等圆中，如果两条弦相等，那么它们所对的圆心角相等，所对的优弧或劣弧也相等.

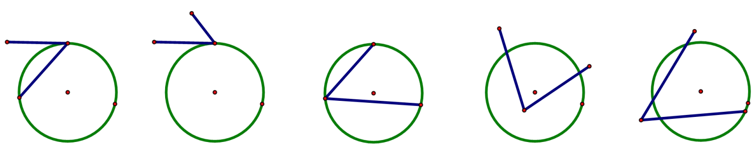
-
- 弧、弦、圆心角之间的关系

名称	文字语言	符号语言	图示
定理	在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦也相等	$\angle AOB=\angle COD\Rightarrow\begin{cases}\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}\\AB=CD\end{cases}$	
重要结论	在同圆或等圆中，如果两条弧相等，那么它们所对的圆心角相等，所对的弦相等	$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}\Rightarrow\begin{cases}\angle AOB=\angle COD\\AB=CD\end{cases}$	
	在同圆或等圆中，如果两条弦相等，那么它们所对的圆心角相等，所对的优弧、劣弧相等	$AB=CD\Rightarrow\begin{cases}\angle AOB=\angle COD\\\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}\\\overset{\frown}{ADB}=\overset{\frown}{CBD}\end{cases}$	
注意	不能忽略“在同圆或等圆中”这个前提条件，如果丢掉了这个前提条件，即使圆心角相等，所对的弧、弦也不一定相等.如右图所示，两个圆的圆心相同，$\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{A'B'}$ 对应同一个圆心角，但 $\overset{\frown}{AB}\neq\overset{\frown}{A'B'}$， $AB\neq A'B'$		
规律总结	在同圆或等圆中，两条弧（一般同为优弧或劣弧）、两条弦、两个圆心角中，只要有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量也分别相等		

-

三、圆内接四边形的性质

- 圆内接多边形：如果一个多边形的所有顶点都在同一个圆上，这个多边形叫做圆内接多边形，这个圆叫做这个多边形的外接圆.
- 圆内接四边形的性质：圆内接四边形的对角互补. 圆内接四边形的外角等于它的内对角.
- 圆周角：顶点在圆上，并且两边都与圆相交的角叫做圆周角（angle in a circular segment）.
  圆周角必须具备两个特征：第一，顶点在圆上；第二，两边都与圆相交，如图，只有图 ③ 中的角是圆周角.



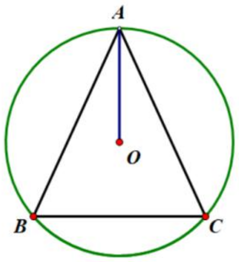
① ② ③ ④ ⑤

-
- 圆周角定理
  在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等，都等于这条弧所对的圆心角的一半.
- 圆周角定理的推论
  ① 在同圆或等圆中，如果两个圆周角相等，它们所对的弧一定相等；
  ② 半圆（或直径）所对的圆周角是直角， 90° 的圆周角所对的弦是直径.

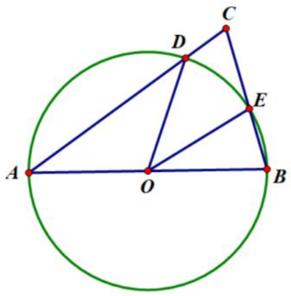
【同步讲练】

一．圆的基本概念

1、如图 AB、AC 是⊙O 的两条弦，且 AB=AC，求证：AO⊥BC



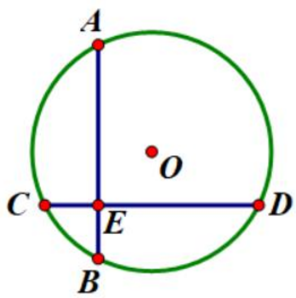
2、如图，在△ABC 中，以 AB 为直径的⊙O 交 AC 于 D，交 BC 于 E，若∠C=70°，求∠DOE 的度数。



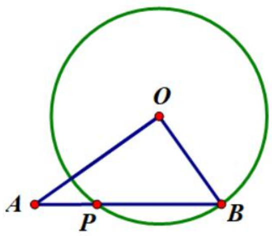
3、已知⊙O 的半径为 8，点 P 是⊙O 内一点，且 PO=6，则点 P 与⊙O 上一点的最大距离为______，最小距离为______。（直接写结果）

二．垂径定理

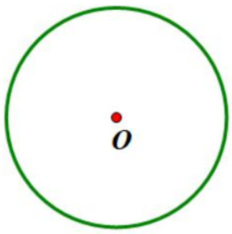
1、如图，⊙O 的两条弦 AB、CD 互相垂直，垂足为 E，且 AB=CD，CE=1，ED=3，求⊙O 的半径。

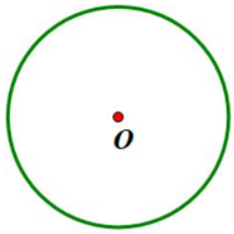


2、如图，在 Rt△ABO 中，∠O=90°，AO=$\sqrt{2}$，BO=1，以 O 为圆心，OB 为半径的圆交 AB 于点 P，求 PB 的长。

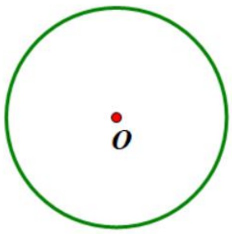


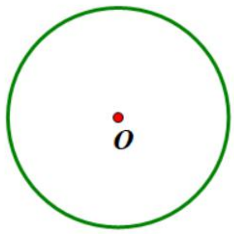
3、在半径为 5 的⊙O 中，弦 AB=6，弦 CD=8，且 AB∥CD，求 AB 与 CD 之间的距离。





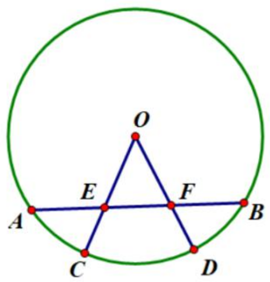
4、已知△ABC 内接于⊙O，AB=AC，且 O 到 BC 的距离为 6，⊙O 的半径为 10，求 AB 的长。



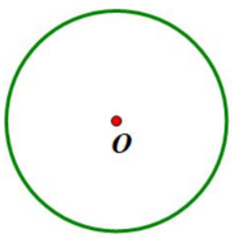


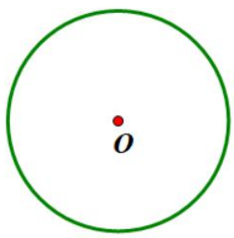
三．垂径定理的应用

1、如图，AB 是⊙O 的弦，半径 OC，OD 分别交 AB 于 E，F，且 AE=BF，求证：OE=OF



2、如图，⊙O 的半径 OA=1，弦 AB，AC 的长分别是 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，求∠BAC 的度数。

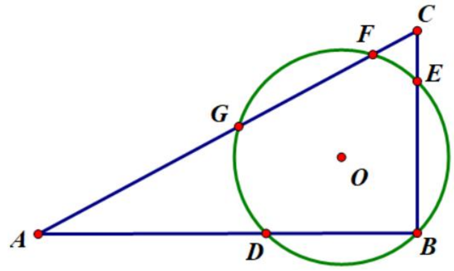




3、如图，在 Rt△ABC 中，∠ABC=90°，O 为△ABC 的角平分线的交点，以 O 为圆心，OB 为半径的⊙O 与△ABC 的三边分别相交于 D，E，F，G

（1）求证：BD=BE=GF

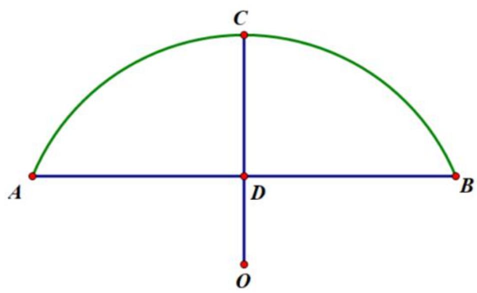
（2）若 AD=9，CF=2，求△ABC 的周长



4、如图，某地有一座圆弧形的拱桥，桥下水面宽度 AB 为 7.2m，拱高 CD 为 2.4m

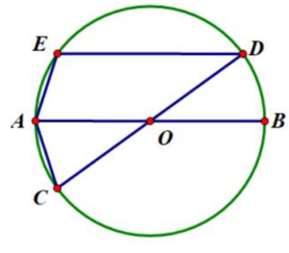
（1）求拱桥的半径

（2）现有一艘宽 3m、船舱顶部为长方形并高出水面 2m 的货船要经过这里，此货船能顺利通过拱桥吗？

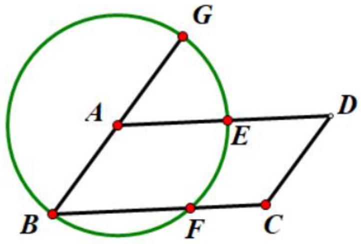


四．弧、弦、圆心角

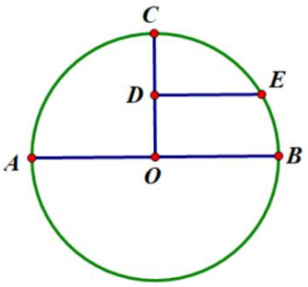
1、如图，AB、CD 是⊙O 直径，弦 DE∥AB，求证：AC=AE



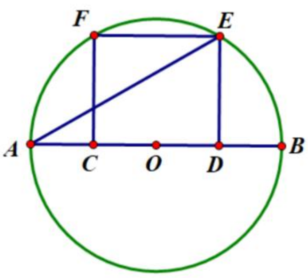
2、如图，以▱ABCD 的顶点 A 为圆心，AB 为半径作⊙A，⊙A 交 AD，BC 于 E，F，延长 BA 交⊙A 于 G，
求证：$\widehat{GE}=\widehat{EF}$



3、如图，⊙O 中，AB 是直径，C 是⊙O 上一点，CO⊥AB，D 是 CO 的中点，DE∥AB，
求证：$\widehat{EC}=2\widehat{BE}$

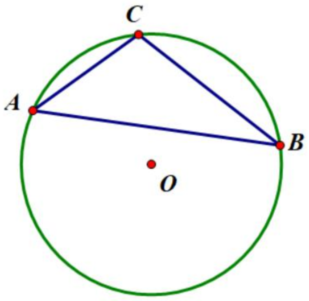


4、如图，AB 为⊙O 的直径，C，D 分别是 OA，OB 的中点，CF⊥AB，ED⊥AB，点 E，F 都在⊙O 上
求证：（1）CF=DE （2）$\widehat{AF}=\widehat{EF}=\widehat{BE}$ （3）AE=2CF



五．圆周角（一）

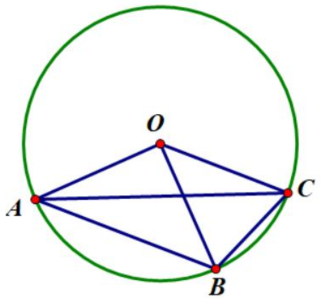
1、如图，⊙O 的半径为 4，∠CBA=30°，求 AC 的长



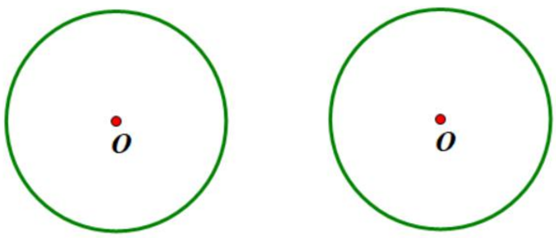
2、（2017 武汉元调）如图，OA，OB，OC 都是⊙O 的半径，∠AOB=2∠BOC

（1）求证：∠ACB=2∠BAC

（2）若 AC 平分∠OAB，求∠AOC 的度数。



3、已知 BC 为⊙O 的弦，BC=4，∠BOC=120°，$\widehat{AB}=\widehat{AC}$，求 $S_{\triangle ABC}$

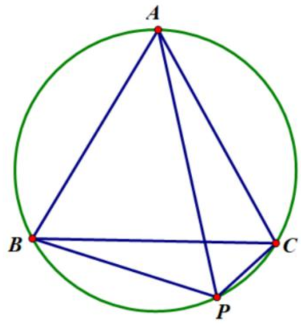


3、如图，ABPC 是⊙O 上的四个点，∠APB=∠APC=60°

（1）判断△ABC 的形状，并证明你的结论

（2）求证：PA=PB+PC

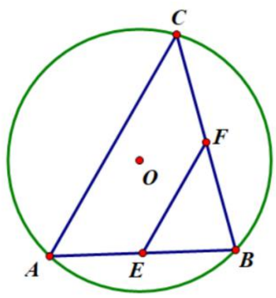
（3）求证：$S_{\triangle BPC}=\frac{\sqrt{3}}{4}PB\bullet PC$



六．圆周角（二）

1、在直径为 10cm 的⊙O 中，弦 AB=5cm，则弦 AB 所对的圆周角的度数是_____________。

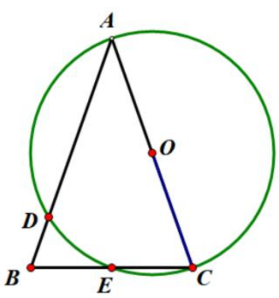
2、（2016 武汉四模）如图，AB 是⊙O 的弦，AB=6，点 C 是⊙O 上的一个动点，且∠ACB=45°，若点 E，F 分别是 AB，AC 的中点，则 EF 的最大值为_____________。



3、如图，在△ABC 中，AB=AC，以 AC 为直径的⊙O 交 AB 于点 D，交 BC 于点 E，

（1）求证：BE=CE

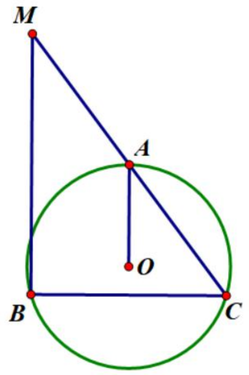
（2）若 BD=2，BE=3，求 AC 的长



4、如图，在⊙O 中，$\widehat{AB}=\widehat{AC}$，连 AO

（1）求证：OA⊥BC

（2）过 B 作 BM∥OA 交 CA 的延长线于 M，若 CM=16，OA=5，求 BM 的长。



5、如图，△ABC 内接于⊙O，且 AB＞AC，∠BAC 的外角平分线交⊙O 于 E，EF⊥AB，垂足为 F.

（1）求证：$\widehat{EB}=\widehat{EC}$；

（2）求证：AB-AC=2AF；

（3）若 AB=a，AC=b，则 BF= ________________（直接写出结果）.