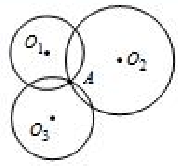
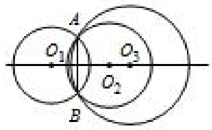
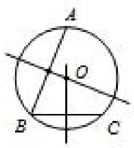
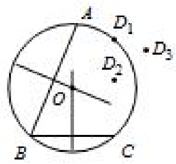
24.2 点和圆、直线和圆的位置关系

【学习任务】

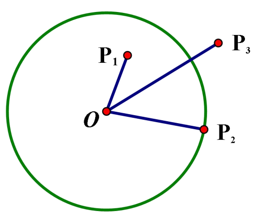
1. 了解点和圆的三种位置关系，能够做出过不共线三点的圆.
2. 掌握直线和圆的三种关系，掌握切线的判定定理和性质定理.

【知识梳理】

1. 确定圆的条件

条件	依据及作法	图示	结论
过一点作圆	经过一个点 A 作圆，只要以点 A 以外的任意一点为圆心，以这一点与点 A 的距离为半径作圆就可以作出，这样的圆有无数多个，如图所示.		不在同一条直线上的三个点确定一个圆.
过两点作圆	经过两个点 A、B 作圆，只要以与点 A、B 距离相等的点为圆心，即以线段 AB 的垂直平分线上任意一点为圆心，以这一点与点 A 或点 B 的距离为半径作圆就可以，这样的圆也有无数多个，如图所示.		
过不在同一条直线上的三点作圆	经过不在同一条直线上的三点 A、B、C 作圆，圆心到这三个点的距离相等，因此，圆心在线段 AB，BC 的垂直平分线的交点 O 处，以 O 为圆心，以 OA（或 OB，OC）为半径可作出经过 A、B、C 三点的圆，这样的圆有且只有一个，如图所示.		
过不在同一条直线上的任意四点作圆	要想过四点作圆，应先作出经过不在同一直线上的三点的圆，如果第四个点到圆心的距离等于半径，则第四个点在圆上，否则不在圆上.如图所示，点 D_1 到圆心的距离等于半径，则点 D_1 在圆上；点 D_2、D_3 到圆心的距离不等于半径，则点 D_2、D_3 不在圆上.		

点和圆的位置关系



设⊙O 的半径为 r，点 P 到圆心的距离 OP=d，则有：

点 P1 在圆内 ⇔ d<r；

点 P2 在圆上 ⇔ d=r；

点 P3 在圆外 ⇔ d>r.

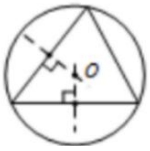
三角形的外接圆和外心

经过三角形的三个顶点可以作一个圆，这个圆叫做三角形的外接圆（circumcircle），这个三角形叫做圆的内接三角形，外接圆的圆心是三角形三条边垂直平分线的交点，叫做这个三角形的外心（circumcenter）.

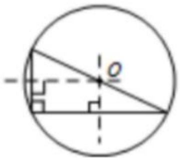
①三角形的外心到三角形三顶点的距离相等，等于外接圆的半径；

②一个三角形有且只有个外接圆，而一个圆却有无数个内接三角形；

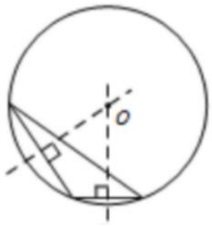
③三角形的外心的位置：锐角三角形的外心在三角形的内部，如图①；直角三角形的外心是斜边中点，如图②；钝角三角形的外心在三角形的外部，如图③.



①



②



③

直线与圆的位置关系的有关概念

直线和圆有两个公共点，那么这条直线和圆相交，这条直线叫做圆的割线.直线和圆只有一个公共点，那么这条直线和圆相切，这条直线叫做圆的切线（tangent line），这个点叫做切点.直线和圆没有公共点，那么这条直线和圆相离.

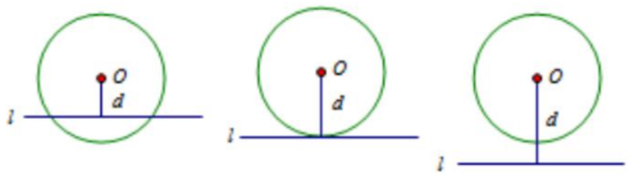
直线与圆的位置关系

设⊙O 的半径为 r，圆心到直线 l 的距离为 d，则有：

直线 l 和⊙O 相交 ⇔ $d<r$；

直线 l 和⊙O 相切 ⇔ $d=r$；

直线 l 和⊙O 相离 ⇔ $d>r$



切线的性质：圆的切线垂直于过切点的半径.

切线的判定：经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

证明相切关系的方法：

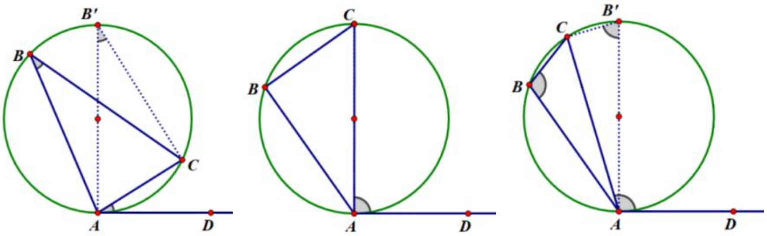
① 定义法（有唯一公共点）；

② 已知公共点，连接圆心和公共点，作半径，证明垂直关系；

③ 未明确是否有公共点（或未标注），过圆心作直线的垂线段，证明 $d=r$

弦切角的定义：顶点在圆上，一边和圆相交，另一边和圆相切的角叫做弦切角.

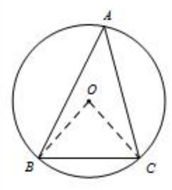
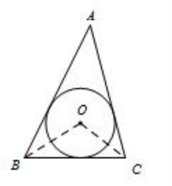
弦切角定理：弦切角的度数等于它所夹的弧所对的圆周角的度数.



三角形内切圆和内心

与三角形各边都相切的圆叫做三角形的内切圆（inscribed circle），内切圆的圆心是三角形三条角平分线的交点，叫做三角形的内心（incenter）.

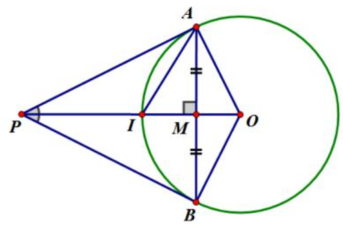
三角形的外心、内心的区别

图形	名称	性质	位置	角度关系
	外心	三角形的外心到三角形的三个顶点的距离相等	外心不一定在三角形内	$\angle BOC=2\angle A$
	内心	三角形的内心到三角形的三边距离相等	内心一定在三角形内	$\angle BOC=90°+\frac{1}{2}\angle A$

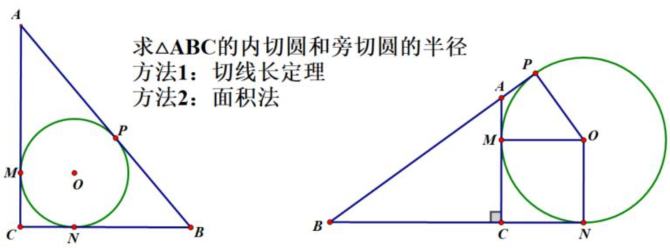
切线长定义：经过圆外一点作圆的切线，这点和切点之间的线段长，叫做这点到圆的切线长.

切线长定理：从圆外一点可以引圆的两条切线，它们的切线长相等，这一点和圆心的连线平分两条切线的夹角.

切线长定理的拓展：如图，PA、PB 是⊙O 的切线，A、B 是切点，则 PO 垂直平分 AB；点 I 是△PAB 的内心



内切圆半径（直角三角形）

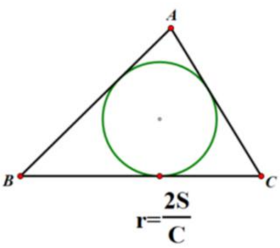


基本结论&方法：

左图（内心）$r=\frac{a+b-c}{2}$； $r=\frac{ab}{a+b+c}$

右图（旁心）$r=\frac{c+b-a}{2}$； $r=\frac{ab}{a+c-b}$

内切圆半径（任意三角形）



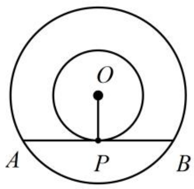
例题：已知一个三角形的三边长分别为 5、7、8，则其内切圆的半径为_______

答案：$\sqrt{3}$

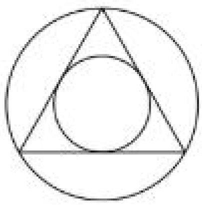
【同步讲练】

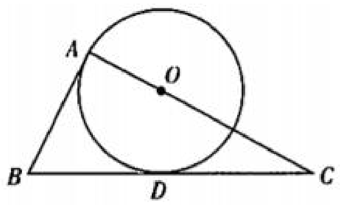
一、选择题

1. 圆的直径为 $10\ \mathrm{cm}$，如果点 P 到圆心 O 的距离是 d，则（　　）
   A. 当 $d=8\ \mathrm{cm}$ 时，点 P 在 $\odot O$ 外
   B. 当 $d=10\ \mathrm{cm}$ 时，点 P 在 $\odot O$ 上
   C. 当 $d=5\ \mathrm{cm}$ 时，点 P 在 $\odot O$ 内
   D. 当 $d=0\ \mathrm{cm}$ 时，点 P 在 $\odot O$ 上
2. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=3$，$BC=4$，以点 C 为圆心，r 为半径作 $\odot C$，则下列说法正确的是（　　）
   A. 当 $r=2$ 时，直线 AB 与 $\odot C$ 相交
   B. 当 $r=3$ 时，直线 AB 与 $\odot C$ 相离
   C. 当 $r=2.4$ 时，直线 AB 与 $\odot C$ 相切
   D. 当 $r=4$ 时，直线 AB 与 $\odot C$ 相切
3. 如图，以点 O 为圆心的两个同心圆中，大圆的弦 AB 是小圆的切线，点 P 是切点，$AB=12\sqrt{3}$，$OP=6$，则大圆的半径长为（　　）
   A. 6　　B. $6\sqrt{3}$　　C. $6\sqrt{2}$　　D. 12



第 3 题图


第 4 题图



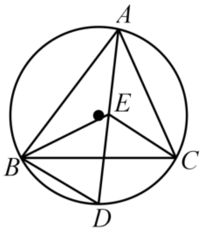
第 5 题图

4. 设边长为 a 的等边三角形的高、内切圆的半径、外接圆的半径分别为 h，r，R，则下列结论不正确的是（　　）
   A. $h=R+r$　　B. $R=2r$　　C. $r=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$　　D. $R=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$
5. 如图，过圆外一点 B 引 $\odot O$ 的两条切线 BA，BD，切点分别是 A，D，连接 AO 并延长，交 BD 的延长线于点 C，若 $AB=5$，$BC=13$，则 $\odot O$ 的半径为（　　）
   A. $\dfrac{7}{3}$　　B. $\dfrac{10}{3}$　　C. 3　　D. $\dfrac{60}{17}$

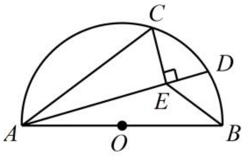
二、填空题

6. 在平面直角坐标系中有 A，B，C 三点，$A(1,3)$，$B(3,3)$，$C(5,1)$．现在要画一个圆同时经过这三点，则圆心坐标为________________.

7. 如图，点 E 是 $\triangle ABC$ 的内心，AE 的延长线和 $\triangle ABC$ 的外接圆相交于点 D，连接 BD，BE，CE，若 $\angle CBD = 32^\circ$，则 $\angle BEC$ 的度数为______________.



第 7 题图



第 8 题图

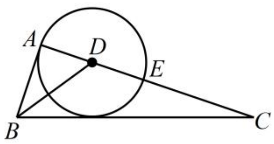
8. 如图，AB 是半 $\odot O$ 的直径，点 C 在半 $\odot O$ 上，$AB = 5\text{ cm}$，$AC = 4\text{ cm}$，D 是 $\overset{\frown}{BC}$ 上的一个动点，连接 AD，过点 C 作 $CE \perp AD$ 于 E，连接 BE．在点 D 移动的过程中，BE 的最小值为______________.

三、解答题

9. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle BAC = 90^\circ$，BD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，以点 D 为圆心，DA 为半径的 $\odot D$ 与 AC 相交于点 E．

（1）求证：BC 是 $\odot D$ 的切线；

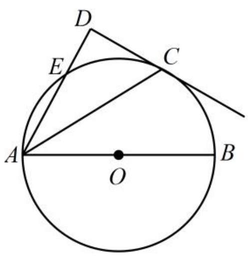
（2）若 $AB = 5$，$BC = 13$，求 CE 的长．



10. 如图，AB 为 $\odot O$ 的直径，C 为 $\odot O$ 上一点，AD 和过点 C 的切线互相垂直，垂足为 D，AD 交 $\odot O$ 于点 E．

（1）求证：AC 平分 $\angle DAB$；

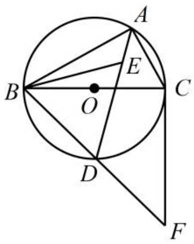
（2）连接 CE，若 $AE = 6$，$CE = 2\sqrt{5}$，求 $\odot O$ 的半径长及 CD 的长．



11. 如图，$\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，BC 为 $\odot O$ 的直径，点 E 为 $\triangle ABC$ 的内心，连接 AE 并延长交 $\odot O$ 于 D 点，连接 BD 并延长至 F，使得 $BD=DF$，连接 CF，BE.

（1）求证：$DB=DE$；

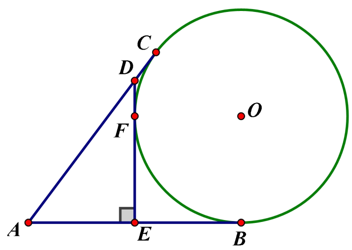
（2）求证：直线 CF 为 $\odot O$ 的切线.



12. 如图，$\odot O$ 与 $\triangle ADE$ 各边所在的直线分别相切于 B，F，C，$DE\perp AE$，$AD=10$，$AE=6$.

（1）求 $BE+CD$ 的值；

（2）求 $\odot O$ 的半径 r.



24.2 点和圆、直线和圆的位置关系 - A 答案

第一部分

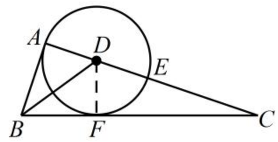
1. A　2. C　3. D　4. C　5. B

第二部分

6. $(2,0)$　7. 122°【解析】$\because E$ 是 $\triangle ABC$ 的内心，$\therefore AE$ 平分 $\angle BAC$，同理 BE 平分 $\angle ABC$，CE 平分 $\angle ACB$，$\because \angle CBD = 32^\circ$，$\therefore \angle CAD = \angle CBD = 32^\circ$，$\therefore \angle BAC = 2\angle CBD = 64^\circ$，$\therefore \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - 64^\circ = 116^\circ$，$\therefore \angle CBE + \angle BCE = \frac{1}{2} \times 116^\circ = 58^\circ$，$\angle BEC = 180^\circ - \angle CBE - \angle BCE = 122^\circ$．

8. $\left(\sqrt{13}-2\right)\text{cm}$

第三部分



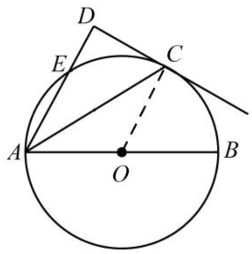
9. （1） 过点 D 作 $DF \perp BC$ 于点 F，如图，

$\because \angle BAD = 90^\circ$，$BD$ 平分 $\angle ABC$，$\therefore AD = DF$，$\because AD$ 是 $\odot D$ 的半径，$\therefore DF$ 是 $\odot D$ 的半径，$\because DF \perp BC$，$\therefore BC$ 是 $\odot D$ 的切线．

（2） $\because \angle BAC = 90^\circ$，$\therefore AB$ 是 $\odot D$ 的切线，$\because BC$ 是 $\odot D$ 的切线，$\therefore AB = FB$，$\because AB = 5$，$BC = 13$，$\therefore CF = 8$，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，由勾股定理得：$AC = 12$

设 $DF = DE = r$，则 $r^2 + 64 = (12-r)^2$，解得：$r = \frac{10}{3}$，$\therefore CE = \frac{16}{3}$．

10. （1） 如图，连接 OC，

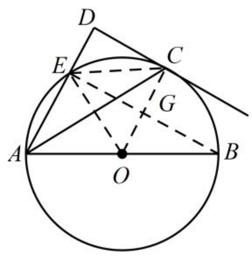


$\because CD$ 是 $\odot O$ 的切线，$\therefore CD \perp OC$，又 $\because CD \perp AD$，

$\therefore AD \parallel OC$，$\therefore \angle CAD = \angle ACO$，$\because OA = OC$，$\therefore \angle CAO = \angle ACO$，

$\therefore \angle CAD = \angle CAO$，即 AC 平分 $\angle DAB$；

（2） 连接 BE，OC 交于 G，连接 OE，



易证得四边形 $DEGC$ 是矩形，OG 是 $\triangle ABE$ 的中位线，$OG = \frac{1}{2}AE = 3$，$OG \perp BE$，$OE^2 - OG^2 = EG^2 = CE^2 - CG^2$，设半径 EO 为：x，

$x^2 - 3^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 - (x-3)^2$，解得：$x_1 = 5$，$x_2 = -2$（舍去），

则 $DC = EG = \sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2 - 2^2 = 4}$，

故半径长为 5，CD 的长为 4．

11. （1） $\because E$ 为 $\triangle ABC$ 的内心，$\therefore \angle DAC=\angle DAB$ ，$\angle CBE=\angle EBA$ ，

$\because \angle DBC=\angle DAC$ ，$\angle DBE=\angle DBC+\angle CBE$ ，$\angle DEB=\angle EAB+\angle EBA$ ，

$\therefore \angle DBE=\angle DEB$ ，$\therefore DB=DE$.

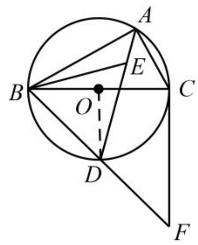
（2） 连接 OD，如图，

$\because BD=DF$ ，O 是 BC 的中点，$\therefore OD\parallel CF$ ，

$\because BC$ 为 $\odot O$ 的直径，$OB=OD$ ，

$\therefore \angle ODB=\angle DBO=\angle DAC=90^\circ\div 2=45^\circ$.

$\therefore \angle OCF=\angle BOD=90^\circ$. $\therefore OC\perp CF$ ，即直线 CF 为 $\odot O$ 的切线.



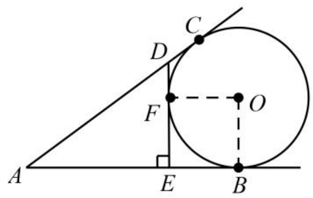
12. （1） 连接 OF，OB，

则四边形 $OFEB$ 是正方形，

因为 O 与 $\triangle ADE$ 各边所在的直线分别相切于 B，F，C，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中，$DE=\sqrt{AD^2-AE^2}=8$ ，

所以 $CD=DF$ ，$EF=BE$ ，所以 $DE=DF+EF=CD+BE=8$.



（2） 设圆的半径是 x，则 $EF=BE=x$ ，设 $DF=y$ ，则 $DF=CD=y$.

在直角 $\triangle ADE$ 中，$DE=\sqrt{AD^2-AE^2}=8$ ，

因为 $AB=AC$ ，所以 $x+y=8$ ，$10+y=6+x$ ，

解方程组：$\begin{cases} x+y=8, \\ 10+y=6+x, \end{cases}$ 解得：$\begin{cases} x=6, \\ y=2. \end{cases}$ 即 $\odot O$ 的半径是 6.