24.4 弧长和扇形面积

【学习任务】

1、会计算扇形的弧长和面积.

2、了解圆柱、圆锥的形成，会求侧面积和全面积.

3、会利用平移及旋转求不规则图形的面积.

【知识梳理】

弧长的计算

描述　**弧长公式**

$l=\dfrac{n\pi R}{180}$.

扇形面积的计算

描述　**扇形面积公式**

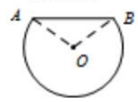
$S_{扇形}=\dfrac{n\pi R^2}{360}=\dfrac{1}{2}lR$.

弓形面积的计算

如图①，$S_{弓形}=S_{扇形AOB}-S_{\triangle AOB}$；

如图②，$S_{弓形}=S_{扇形AOB}+S_{\triangle AOB}$.

①



②

圆锥的计算

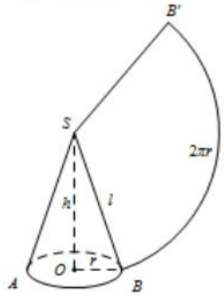
描述　**圆锥的基本概念**

连接圆锥顶点和底面圆周上任意一点的线段叫做**圆锥的母线**，连接圆锥顶点与底面圆心的线段叫做**圆锥的高**.

圆锥的侧面积和全面积

侧面积公式：$S_{侧}=\pi lr$.

全面积公式：$S_{全}=\pi lr+\pi r^2$（l 为圆锥的母线，r 为底面圆半径）.



$$展开图扇形圆心角度数=\frac{圆锥底面半径}{圆锥母线}\cdot 360°$$

$$n=\frac{r}{l}\cdot 360°$$

【同步讲练】

一、选择题

1. 已知圆锥的底面半径是 3，高是 4，则这个圆锥的全面积是（　　）

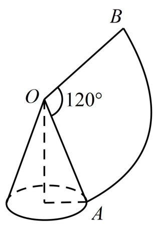
A. 12π　　B. 15π　　C. 24π　　D. 30π

2. 已知圆锥的侧面积是 $20\pi\ \text{cm}^2$ ，母线长为 5 cm，则圆锥的底面半径为（　　）

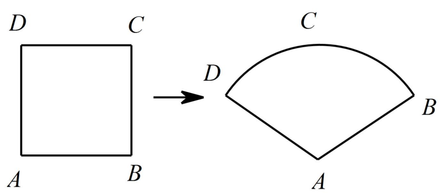
A. 2 cm　　B. 3 cm　　C. 4 cm　　D. 6 cm

3. 如图，有一圆心角为 $120°$，半径长为 6 cm 的扇形，若将 OA，OB 重合后围成一圆锥侧面，那么圆锥的高是（　　）

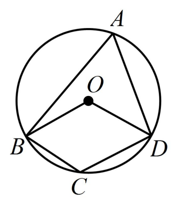
A. $4\sqrt{2}$ cm　　B. $\sqrt{35}$ cm　　C. $2\sqrt{6}$ cm　　D. $2\sqrt{3}$ cm



第 3 题图



第 4 题图



第 5 题图

4. 如图，将边长为 2 的正方形铁丝框 $ABCD$，变形为以 A 为圆心，AB 为半径的扇形（忽略铁丝的粗细），则所得的扇形 ADB 的面积为（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 6　　D. 8

5. 如图，$\odot O$ 的半径为 3，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，连接 OB，OD，若 $\angle BOD=\angle BCD$，则 $\overset{\frown}{BD}$ 的长为（　　）

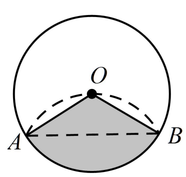
A. π　　B. $\frac{3}{2}\pi$　　C. 2π　　D. 3π

6. 一个圆锥的底面半径 $r=10$，高 $h=20$，则这个圆锥的侧面积是（　　）

A. $100\sqrt{3}\pi$　　B. $200\sqrt{3}\pi$　　C. $100\sqrt{5}\pi$　　D. $200\sqrt{5}\pi$

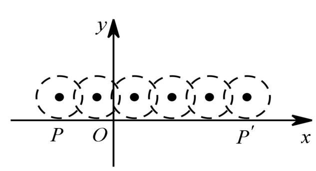
7. 如图，将半径为 3 cm 的圆形纸片沿 AB 折叠后，圆弧恰好能经过圆心 O，用图中阴影部分的扇形围成一个圆锥的侧面，则这个圆锥的高为（　　）

A. $2\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{10}$　　D. $\frac{3}{2}$



第 7 题图

第 8 题图



第 9 题图

8. 如图，粮仓的顶部是圆锥形状，这个圆锥底面的半径长为 3 m，母线长为 6 m，为防止雨水，需在粮仓顶部铺上油毡，如果油毡的市场价是每平方米 10 元钱，那么购买油毡所需要的费用是（　　）

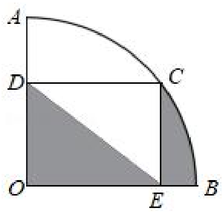
A. 540π 元　　B. 360π 元　　C. 180π 元　　D. 90π 元

9. 如图，半径为 1 个单位长度的圆从点 $P(-2,0)$ 沿 x 轴向右滚动一周，圆上的一点由 P 点到达 P' 点，则点 P' 的横坐标是（　　）

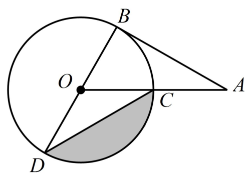
A. 4　　B. 2π　　C. $\pi-2$　　D. $2\pi-2$

10. 如图，半径为 10 的扇形 AOB 中，$\angle AOB=90^\circ$，C 为 $\overset{\frown}{AB}$ 上一点，$CD\perp OA$，$CE\perp OB$，垂足分别为 D，E．若 $\angle CDE$ 为 36°，则图中阴影部分的面积为（　　）

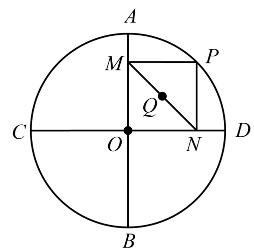
A. 10π　　B. 9π　　C. 8π　　D. 6π



第 10 题图



第 11 题图



第 12 题图

11. 如图，AB 为 $\odot O$ 的切线，切点为 B，连接 AO 与 $\odot O$ 交于点 C，BD 为 $\odot O$ 的直径，连接 CD，若 $\angle A=30^\circ$，$OA=2$，则图中阴影部分的面积为（　　）

A. $\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　　B. $\dfrac{4\pi}{3}-2\sqrt{3}$　　C. $\pi-\sqrt{3}$　　D. $\dfrac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$

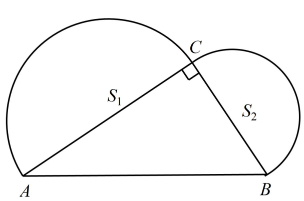
12. 如图，$\odot O$ 的半径为 2，AB，CD 是互相垂直的两条直径，点 P 是 $\odot O$ 上任意一点（P 与 A，B，C，D 不重合），经过 P 作 $PM\perp AB$ 于点 M，$PN\perp CD$ 于点 N，点 Q 是 MN 的中点，当点 P 沿着圆周转过 45° 时，点 Q 走过的路径长为（　　）

A. $\dfrac{\pi}{4}$　　B. $\dfrac{\pi}{2}$　　C. $\dfrac{\pi}{6}$　　D. $\dfrac{\pi}{3}$

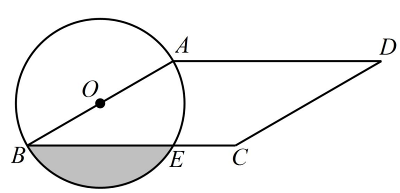
二、填空题

13. 一个扇形的弧长是 20π cm，面积是 240π cm^2，则这个扇形的圆心角是________度．

14. 如图，已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$AB=8$，分别以 AC，BC 为直径作半圆，面积分别记为 S_1，S_2，则 S_1+S_2 的值等于________．



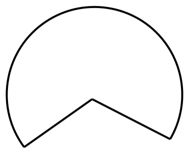
第 14 题图



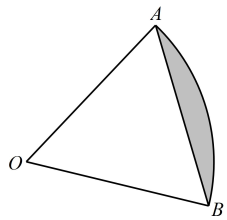
第 15 题图

15. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB<AD$，$\angle D=30^\circ$，$CD=4$，以 AB 为直径的 $\odot O$ 交 BC 于点 E，则阴影部分的面积为________．

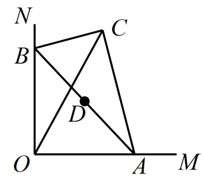
16. 用如图所示的扇形纸片制作一个圆锥的侧面，要求圆锥的高是 4 cm ，底面周长是 6π cm ，则扇形的半径为________.



第 16 题图



第 17 题图



第 18 题图

17. 如图，扇形 OAB 中，$\angle AOB=60^{\circ}$ ，$OA=6$ cm ，则图中阴影部分的面积是________.

18. 如图，在 Rt$\triangle ACB$ 中，$BC=2$ ，$\angle BAC=30^{\circ}$ ，斜边 AB 的两个端点分别在相互垂直的射线 OM，ON 上滑动，下列结论：

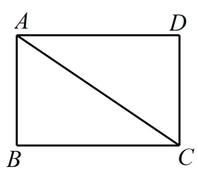
①若 C，O 两点关于 AB 对称，则 $OA=2\sqrt{3}$ ；　②C，O 两点距离的最大值为 4；

③若 AB 平分 CO，则 $AB\perp CO$ ；　④斜边 AB 的中点 D 运动路径的长为 $\frac{\pi}{2}$.

其中正确的是 ________.

三、解答题

19. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=1$ ，若 Rt$\triangle ABC$ 绕 AB 所在的直线旋转一周所得圆锥的侧面积和矩形 $ABCD$ 绕 AB 所在直线旋转一周所得圆柱的侧面积相等，求 BC 的长.

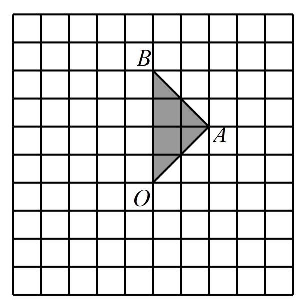


20. 如图，正方形网格中的每个小正方形的边长都是 1，每个小正方形的顶点叫做格点．$\triangle ABO$ 的三个顶点 A，B，O 都在格点上.

（1）画出 $\triangle ABO$ 绕点 O 逆时针旋转 90° 后得到的 $\triangle A_1B_1O$ 三角形；

（2）点 B 的运动路径的长；

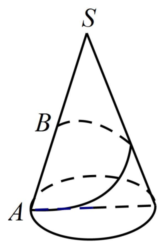
（3）求 $\triangle ABO$ 在上述旋转过程中所扫过的面积.



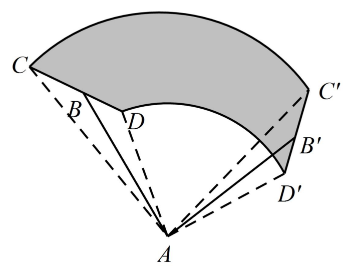
21. 如图所示，已知圆锥底面半径 $r=10\ \mathrm{cm}$ ，母线长为 $40\ \mathrm{cm}$.

（1）求它的侧面展开图的圆心角和表面积；

（2）若一甲虫从 A 点出发沿着圆锥侧面绕行到母线 SA 的中点 B，请你动脑筋想一想它所走的最短路线长是多少?为什么?



22. 当汽车在雨天行驶时，司机为了看清楚道路，要启动前方挡风玻璃上的雨刷器．如图所示是某汽车的一个雨刷器的转动示意图，雨刷器杆 AB 与雨刷 CD 在 B 处固定连接（不能转动），当杆 AB 绕 A 点转动 $90°$ 时，雨刷 CD 扫过的面积如图所示，现量得 $CD=80\ \mathrm{cm}$，$\angle DBA=20°$，$AC=115\ \mathrm{cm}$，$DA=35\ \mathrm{cm}$，试从以上信息中选择所需要的数据，求出雨刷扫过的面积.

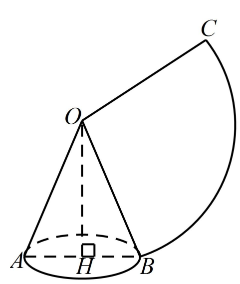


23. 如图，扇形 OBC 是圆锥的侧面展开图，圆锥的母线 $OB=l$，底面圆的半径 $HB=r$.

（1）当 $l=2r$ 时，求 $\angle BOC$ 的度数；

（2）当 $l=3r$，$l=4r$ 时，分别求 $\angle BOC$ 的度数（直接写出结果）；

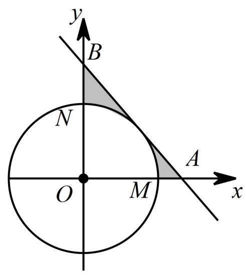
（3）当 $l=mr$（m 为大于 1 的整数）时，猜想 $\angle BOC$ 的度数（直接写出结果）.



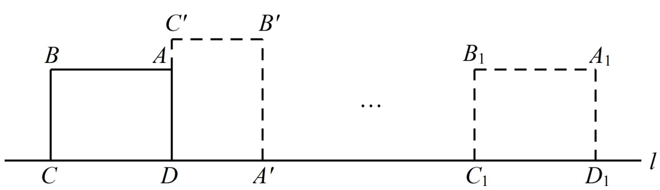
24. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，以点 O 为圆心的圆分别交 x 轴的正半轴于点 M，交 y 轴的正半轴于点 N．劣弧 $\overset{\frown}{MN}$ 的长为 $\frac{6}{5}\pi$，直线 $y=-\frac{4}{3}x+4$ 与 x 轴、y 轴分别交于点 A、B．

（1）求证：直线 AB 与 $\odot O$ 相切；

（2）求图中所示的阴影部分的面积（结果用 π 表示）



25. 如图，矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=3$，边 CD 在直线 l 上，将矩形 $ABCD$ 沿直线 l 作无滑动翻滚，当点 A 第一次翻滚到点 A_1 的位置时，求出点 A 经过的路线长为多少?



24.4 弧长和扇形面积 答案

第一部分

1. C　2. C　3. A　4. B　5. C　6. C　7. A　8. C　9. D　10. A　11. A　12. A

第二部分

13. 150　14. 8π　15. $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$　16. 5 cm　17. $\left(6\pi-9\sqrt{3}\right)\ \mathrm{cm}^2$

【解析】$\because OA=OB=6$，$\angle AOB=60^\circ$，

$\therefore \triangle AOB$ 是等边三角形.

$\therefore S_{阴影}=S_{扇形\ OAB}-S_{\triangle AOB}=\frac{60\pi\cdot 6^2}{360}-\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 6^2=\left(6\pi-9\sqrt{3}\right)\ \mathrm{cm}^2$　　2000π.

18 ①②

第三部分

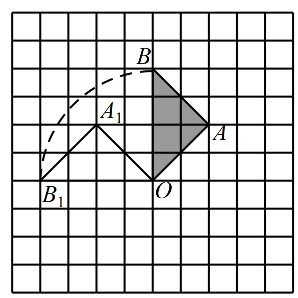
19. $\because S_{圆锥侧}=\pi\cdot BC\cdot AC$，$S_{圆柱侧}=2\pi\cdot BC\cdot CD$，$S_{圆锥侧}=S_{圆柱侧}$，

$\therefore \pi\cdot BC\cdot AC=2\pi\cdot BC\cdot CD$．$\therefore AC=2CD$．$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

$\therefore CD=AB=1$．$\therefore AC=2CD=2$．

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$．

20.（1）$\triangle A_1B_1O$ 如图所示：



（2）点 B 的运动路径的长 $=\frac{90\cdot\pi\cdot 4}{180}=2\pi$．

（3）扫过的面积 $=S_{扇形\ B_1OB}+S_{\triangle AOB}$

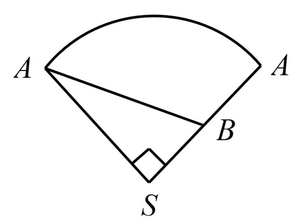
$=\frac{90\cdot\pi\cdot 4^2}{360}+\frac{1}{2}\times 4\times 2$

$=4\pi+4$.

21.（1）$\frac{n\pi\times 40}{180}=2\pi\times 10$，解得 $n=90$．

圆锥表面积 $=\pi\times 10^2+\pi\times 10\times 40=500\pi\ (\mathrm{cm}^2)$．

（2）画出圆锥的侧面展开图如图，



由图可知，甲虫从 A 点出发沿着圆锥侧面绕行到母线 SA 的中点 B 所走的最短路线长是线段 AB 的长.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ASB$ 中，$SA=40\ \mathrm{cm}$，$SB=20\ \mathrm{cm}$，

所以 $AB=\sqrt{40^2+20^2}=20\sqrt{5}\,(\mathrm{cm})$．

所以甲虫走的最短路线的长度是 $20\sqrt{5}\ \mathrm{cm}$．

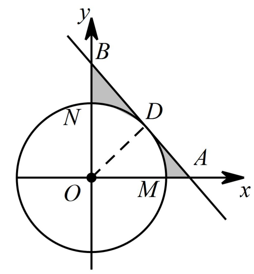
22. 由题意可知$\triangle ABD\cong\triangle AB'D'$，$\triangle ACD\cong\triangle AC'D'$，

且大扇形半径 $AC=115$ cm，小扇形半径 $AD=35$ cm，且圆心角都为直角，

所以雨刷 CD 扫过的面积为：$S_{扇形CAC'}-S_{扇形DAD'}=\frac{90\pi\times115^2}{360}-\frac{90\pi\times35^2}{360}=\frac{\pi}{4}(115+35)(115-35)=3000\pi(\mathrm{cm}^2)$.

23.（1）$\angle BOC=180°$．（2）分别为 120°，90°．（3）$\angle BOC=\frac{360°}{m}$.

24.（1）证明：作 $OD\perp AB$ 于 D 如图所示



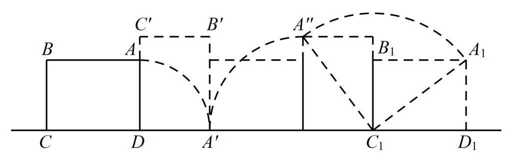
$\because$ 劣弧 $\overset{\frown}{MN}$ 的长为$\frac{6}{5}\pi$ $\therefore$ $\frac{90\pi\times OM}{180}=\frac{6}{5}\pi$ 解得：$MO=\frac{12}{5}$，

即 $\odot O$ 的半径为$\frac{12}{5}$ $\because$ 直线 $y=-\frac{4}{3}x+4$ 与 x 轴、y 轴分别交于 A、B，当 $y=0$ 时，$x=3$，当 $x=0$ 时，$y=4$，$\therefore$ $A(3,0),B(0,4)$ $\therefore$ $OA=3,OB=4$，

$\therefore$ $AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$， 因为$\triangle AOB$的面积$=\frac{1}{2}AB\cdot OD=\frac{1}{2}OA\cdot OB$ $\therefore$ $OD=\frac{OA\times OB}{AB}=\frac{12}{5}=$ 半径OM，$\therefore$ 直线 AB 与 $\odot O$ 相切.

（2）图中所示的阴影部分的面积 $=\triangle AOB$ 的面积 $-$ 扇形 OMN 的面积 $=\frac{1}{2}\times3\times4-\frac{1}{4}\pi\times\left(\frac{12}{5}\right)^2=6-\frac{36}{25}\pi$

25.（1）如图



（2）6π