24.3 正多边形和圆

【学习任务】

1、认识正多边形和圆的关系，了解正多边形及其相关概念.

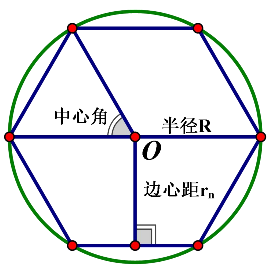
2、解决正多边形的问题可以通过解决其中一个小三角形来解决，学会这种通过部分求整体的方法.

3、掌握用等分圆周的方法画圆内接正多边形.

【知识梳理】

正多边形和圆的相关概念

一个正多边形的外接圆的圆心叫做这个正多边形的中心，外接圆的半径叫做正多边形的半径，正多边形每一边所对的圆心角叫做正多边形的中心角，中心到正多边形的一边的距离叫做正多边形的边心距.



名称	公式	说明
中心角	$\alpha=\frac{360°}{n}$	α 为中心角，n 为边数
边心距、边长、半径间的关系式	$R_n^2=r_n^2+\frac{1}{4}a_n^2$	R_n 为半径，r_n 为边心距，a_n 为边长
周长公式	$P_n=n\cdot a_n$	P_n 为正多边形周长，a_n 为边长
面积公式	$S_n=\frac{1}{2}P_n r_n$	P_n 为正多边形的周长，r_n 为边心距

【同步讲练】

一、选择题

1. 圆中内接正三角形的边长是半径的（　　）倍.

A. 2　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{3}$

2. 一个圆的内接正多边形中，一条边所对的圆心角为 $72°$，则该正多边形的边数是（　　）

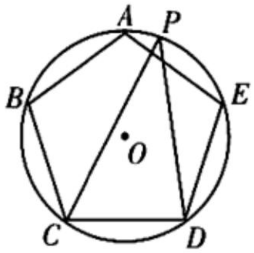
A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

3. 两圆的半径之比为 $1:3$，则小圆的外切正三角形与大圆的内接正三角形的面积之比为（　　）

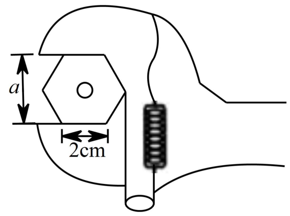
A. $1:9$　　B. $1:3$　　C. $2:3$　　D. $4:9$

4. 如图，$\odot O$ 是正五边形 $ABCDE$ 的外接圆，点 P 是 $\overset{\frown}{AE}$ 的一点，则 $\angle CPD$ 的度数是（　　）

A. 30°　　B. 36°　　C. 45°　　D. 72°



第 4 题图



第 5 题图

5. 如图，正六边形螺帽的边长为 2 cm，则这个扳手的开口宽度 a 为（　　）

A. $2\sqrt{3}$ cm　　B. $\sqrt{3}$ cm　　C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm　　D. 1 cm

6. 用 48 m 长的篱笆在空地上围成一个正六边形绿地，绿地的面积是（　　）

A. $96\sqrt{3}\ \mathrm{m}^2$　　B. $64\sqrt{3}\ \mathrm{m}^2$　　C. $32\sqrt{3}\ \mathrm{m}^2$　　D. $16\sqrt{3}\ \mathrm{m}^2$

7. 若正八边形绕着它的中心旋转一个度数后能与原图形重合，则旋转的这个角度至少为（　　）

A. 180°　　B. 45°　　C. 90°　　D. 60°

8. 正多边形的一边所对的中心角与该多边形的一个内角的关系（　　）

A. 两角互余　　B. 两角互补

C. 两角互余或互补　　D. 不能确定

9. 正六边形的半径与边心距之比为（　　）

A. $1:\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{3}:1$　　C. $\sqrt{3}:2$　　D. $2:\sqrt{3}$

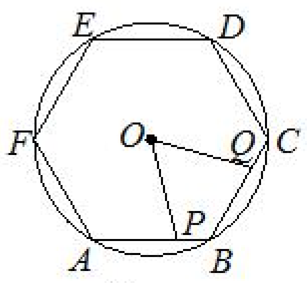
10. 以半径为 1 的圆内接正三角形、正方形、正六边形的边心距为三边作三角形，则（　　）

A. 不能构成三角形　　B. 这个三角形是钝角三角形

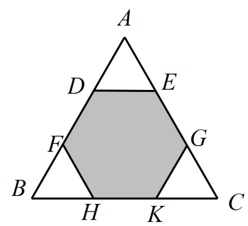
C. 这个三角形是等腰三角形　　D. 这个三角形是直角三角形

二、填空题

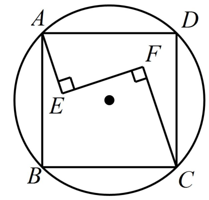
11. 如图，已知 P，Q 分别是 $\odot O$ 的内接正六边形 $ABCDEF$ 的边 AB，BC 上的点，$AP=BQ$，则 $\angle POQ$ 的度数为________.



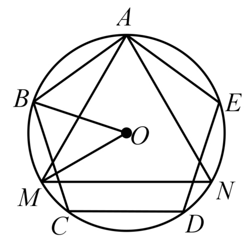
第 11 题图



第 12 题图



第 13 题图



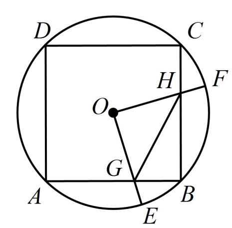
第 14 题图

12. 如图，正三角形的边长为 $12\ \text{cm}$，剪去三个角后成为一个正六边形，则这个正六边形的内部任意一点到各边的距离和为________ cm.

13. 如图，在正方形 $ABCD$ 内有一折线段，其中 $AE\perp EF$，$EF\perp FC$，并且 $AE=3$，$EF=4$，$FC=5$，则正方形 $ABCD$ 的外接圆的半径是________.

14. 如图，正五边形 $ABCDE$ 和正三角形 AMN 都是 $\odot O$ 的内接多边形，则 $\angle BOM=$ ________.

15. 如图，边长为 4 的正方形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，点 E 是 $\overset{\frown}{AB}$ 上的一动点（不与 A，B 重合），点 F 是 $\overset{\frown}{BC}$ 上的一点，连接 OE，OF，分别与 AB，BC 交于点 G，H，且 $\angle EOF=90^\circ$，有下列结论：



① $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BF}$；

② $\triangle OGH$ 是等腰直角三角形；

③四边形 $OGBH$ 的面积随着点 E 位置的变化而变化；

④ $\triangle GBH$ 周长的最小值为 $4+\sqrt{2}$.

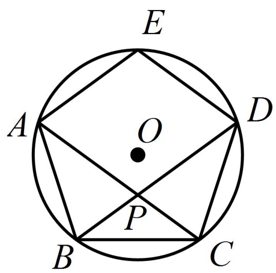
其中正确的是________.（把你认为正确结论的序号都填上）.

三、解答题

16. 如图所示，$\odot O$ 是正五边形 $ABCDE$ 的外接圆，对角线 AC，BD 相交于点 P.

（1）求 $\angle ABP$ 的度数；

（2）求证：$AC = AB + BP$.



17. 阅读下面的材料：

小伟遇到这样一个问题：如图 1，在正三角形 ABC 内有一点 P，且 $PA = 3$ ，$PB = 4$ ，$PC = 5$ ，求 $\angle APB$ 的度数.

小伟是这样思考的：如图 2，利用旋转和全等的知识构造 $\triangle AP'C$ ，连接 PP'，得到两个特殊的三角形，从而将问题解决.

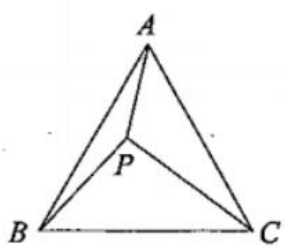


图 1

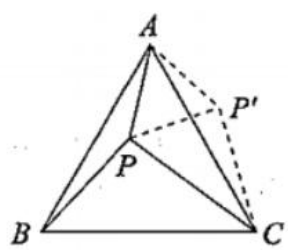


图 2

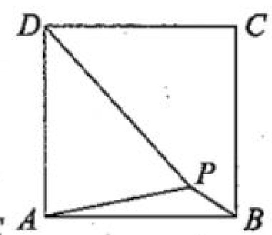


图 3

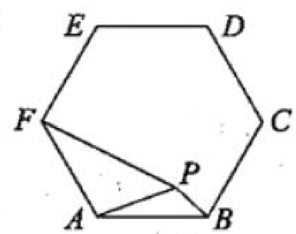


图 4

（1）请你回答：图 1 中 $\angle APB$ 的度数等于________.

参考小伟同学思考问题的方法，解决下列问题：

如图 3，在正方形 $ABCD$ 内有一点 P，且 $PA = 2\sqrt{2}$ ，$PB = 1$ ，$PD = \sqrt{17}$ ，则 $\angle APB =$ ________，$AB =$ ________.

（2）如图 4，在正六边形 $ABCDEF$ 内有一点 P，且 $PA = 2$ ，$PB = 1$ ，$PF = \sqrt{13}$ ，则 $\angle APB =$ ________，$AB =$ ________.

24.3 正多边形和圆 答案

第一部分

1. C　2. C　3. D　4. B　5. A　6. A　7. B　8. B　9. D　10. D

第二部分

11. $60°$　12. $12\sqrt{3}$　13. $2\sqrt{5}$　14. $48°$　15. ①②

【解析】①连接 OA，OB，如图 1，

根据正方形的性质，知 $\angle AOB = 90° = \angle EOF$，

$\angle AOB - \angle BOE = \angle EOF - \angle BOE$，

即 $\angle AOE = \angle BOF$，

根据相等的圆心角所对的弧相等，可得 $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BF}$；

故①正确；

②连接 OB，OC，如图 2，则 $OB = OC$，

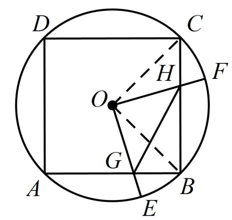


图2

由①知 $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BF}$，$\because ABCD$ 为正方形，$\therefore AB = BC$，

$\therefore \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$，$\therefore \overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{BF}$，即 $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CF}$，

$\therefore \angle BOG = \angle COH$，又 $\because \angle OBG + \angle OBC = 90°$，

$\angle OCH + \angle OBC = 90°$，$\therefore \angle OBG = \angle OCH$，

在 $\triangle OGB$ 和 $\triangle OHC$ 中，

$$\begin{cases} \angle OBG = \angle OCH, \\ \angle BOG = \angle COH, \\ OB = OC. \end{cases} \quad \therefore \triangle OGB \cong \triangle OHC，\therefore OG = OH，$$

又 $\because \angle EOF = 90°$，$\therefore \triangle OGH$ 是等腰直角三角形；

故②正确；

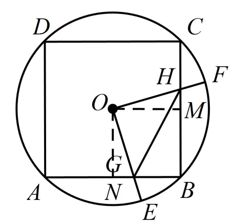


图3

③如图 3，过点 O 作 $OM \perp BC$，$ON \perp AB$，

又 $\because$ 正方形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，

$\therefore OM = ON$，

由②知，$OG = OH$，在 $\mathrm{Rt}\triangle OGN$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle OHM$ 中，

$$\begin{cases} OG = OH, \\ OM = ON. \end{cases} \quad \therefore \mathrm{Rt}\triangle OGN \cong \mathrm{Rt}\triangle OHM，\therefore S_{\triangle OGN} = S_{\triangle OHM}，$$

又 $\because$ 四边形 $BMOG$ 公共 $\therefore$ 不管点 E 的位置如何变化，四边形 $OGBH$ 的面积不变；

故③错误；

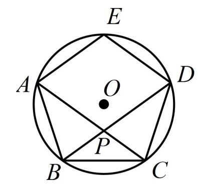
④当点 H，G 分别为 BC，AB 中点时，$\triangle GBH$ 周长有最小值 $4 + 2\sqrt{2}$．

故④错误．

综上，①②正确，③④错误．

第三部分

16. （1） 如图所示.



$\because$ $\odot O$ 是正五边形 $ABCDE$ 的外接圆，

$\therefore$ $\angle ABP=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times 360^\circ=72^\circ$.

（2） $\because$ $\odot O$ 是正五边形 $ABCDE$ 的外接圆，

$\therefore$ $\angle BAC=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times 360^\circ=36^\circ$ ，

$\therefore$ $\angle APB=180^\circ-72^\circ-36^\circ=72^\circ$ ，

$\therefore$ $\angle ABP=\angle APB$ ，

$\therefore$ $AB=AP$.

同理可证：$\angle PBC=\angle PCB=36^\circ$ ，

$\therefore$ $PB=PC$.

$\therefore$ $AC=AP+PC=AB+BP$.

17. （1） 150°；135°；$\sqrt{13}$

（2） 120°；$\sqrt{7}$