26.1 反比例函数

【学习任务】

1、理解反比例函数的概念和意义，会判定给定的函数是否为反比例函数.

2、根据已知条件会用待定系数法求出反比例函数的解析式.

3、掌握反比例函数图象的性质.

【知识梳理】

反比例函数的概念

描述　一般的，形如 $y=\frac{k}{x}$（k 是常数，$k\neq 0$）的函数，叫做**反比例函数**（inverse function）.

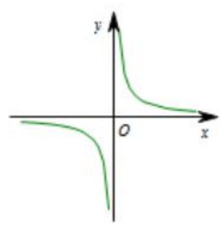
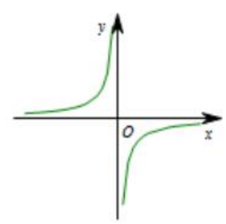
例题　下列函数中哪些是反比例函数?

① $y=-\frac{x}{3}$；② $y=\frac{1}{3x}+1$；③ $y=\frac{3}{2x}$；④ $y=\frac{1}{x+1}$；⑤ $y=kx^{-1}$；⑥ $xy=2$.

解：③⑥ 是反比例函数.

k对反比例函数的图象及性质的影响

描述　**反比例函数的图象与性质**

	$k>0$	$k<0$
图象		
性质	① x的取值范围是 $x\neq 0$，y的取值范围是 $y\neq 0$； ② 函数图象的两个分支分别在第一、三象限； ③ 在每个象限内，y随 x的增大而减小.	① x的取值范围是 $x\neq 0$，y的取值范围是 $y\neq 0$； ② 函数图象的两个分支分别在第二、四象限； ③ 在每个象限内，y随 x的增大而增大.

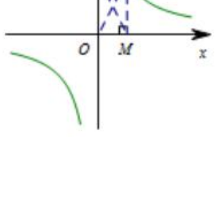
反比例函数图象特点

反比例函数图象是中心对称图形.

反比例函数系数k的几何意义

描述　**比例系数 k 的几何意义：**

如图过双曲线上任一点 P 作 x 轴、y 轴的垂线 PM，PN 所得的矩形 $PMON$ 的面积 $S=PM\cdot PN=|y|\cdot|x|=|xy|$. 因为 $y=\frac{k}{x}$，所以 $k=xy$，故 $S=|k|$. 连接 PO，MN，则 $\triangle PMO$ 和 $\triangle MON$ 和 $\triangle PNO$ 的面积都相等，其值为 $\frac{1}{2}|k|$.



反比例函数与方程、不等式

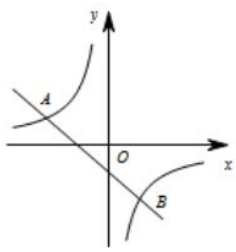
描述 **反比例函数与方程**

在用图象求函数 $y=ax+b$（$a\neq 0$）与 $y=\frac{m}{x}$（$m\neq 0$）的交点时，可将两个函数看成是以 x 、 y 为未知数的方程组 $\begin{cases} y=ax+b, \\ y=\frac{m}{x}, \end{cases}$ 则它的解就是这两个函数交点的横、纵坐标．反之，两个函数交点的横纵坐标也是对应方程组的解．

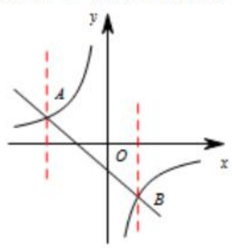
反比例函数与不等式

$ax+b>\frac{m}{x}$（$ma\neq 0$）的解集可以通过函数 $y=ax+b$ 与函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图象得到解集．

例题 如图，点 $A(-4,2)$ 和 $B(2,-4)$ 是一次函数 $y=kx+b$ 的图象和反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图象的两个交点，则不等式 $kx+b<\frac{m}{x}$ 的解集是____．



如图，在四部分观察即可得到答案．



解： $-4<x<0$ 或 $x>2$．

【同步讲练】

一、选择题

1. 下面四个关系式中，y 是 x 的反比例函数的是（　　）

A. $y=\frac{1}{x^2}$　　B. $yx=-\sqrt{3}$　　C. $y=5x+6$　　D. $\sqrt{x}=\frac{1}{y}$

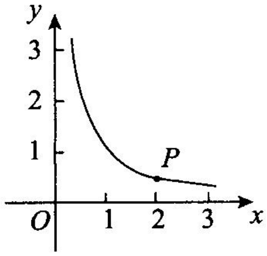
2. 反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 图象上有三个点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，(x_3,y_3)，其中 $x_1<x_2<0<x_3$，则 y_1，y_2，y_3 的大小关系是（　　）

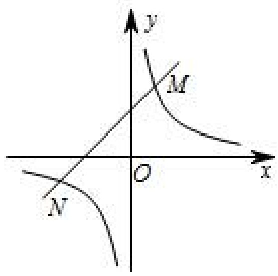
A. $y_1<y_2<y_3$　　B. $y_2<y_1<y_3$　　C. $y_3<y_1<y_2$　　D. $y_3<y_2<y_1$

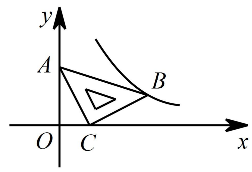
3. 如图，点 P 在反比例函数 $y=\frac{1}{x}\,(x>0)$ 的图象上，且横坐标为 2．若将点 P 先向右平移两个单位，再向上平移一个单位后得到点 P'．则在第一象限内，经过点 P' 的反比例函数图象的解析式是（　　）

A. $y=-\frac{5}{x}\,(x>0)$　　B. $y=\frac{5}{x}\,(x>0)$

C. $y=-\frac{5}{x}\,(x>0)$　　D. $y=\frac{6}{x}\,(x>0)$







第 3 题图　　　　第 4 题图　　　　第 6 题图

4. 如图，双曲线 $y=\dfrac{m}{x}$ 与直线 $y=kx+b$ 相交于点 M，N，且点 M 的坐标为 $(1,3)$，点 N 的纵坐标为 -1．根据图象信息可得关于 x 的方程 $\dfrac{m}{x}=kx+b$ 的解为(　　)

A. -3，1　　B. -3，3　　C. -1，1　　D. -1，3

5. 若点 $A(a-1,y_1)$，$B(a+1,y_2)$ 在反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(k<0)$ 的图象上，且 $y_1>y_2$，则 a 的取值范围是(　　)

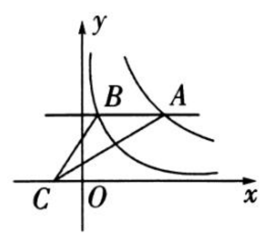
A. $a<-1$　　B. $-1<a<1$

C. $a>1$　　D. $a<-1$ 或 $a>1$

6. 在平面直角坐标系 xOy 中，将一块含 45° 角的直角三角板如图放置，直角顶点 C 的坐标为 $(1,0)$，顶点 A 的坐标为 $(0,2)$，顶点 B 恰好落在第一象限的双曲线上，现将直角三角板沿 x 轴正方向平移，当顶点 A 恰好落在该双曲线上时停止运动，则此点 C 的对应点 C' 的坐标为(　　)

A. $\left(\dfrac{3}{2},0\right)$　　B. $(2,0)$　　C. $\left(\dfrac{5}{2},0\right)$　　D. $(3,0)$

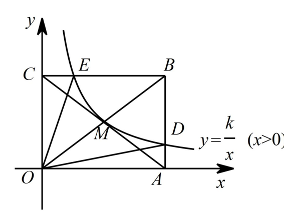
7. 如图，平行于 x 轴的直线与函数 $y=\dfrac{k_1}{x}$（$k_1>0$，$x>0$），$y=\dfrac{k_2}{x}$（$k_2>0$，$x>0$）的图象分别交于 A，B 两点，点 A 在点 B 的右侧，C 为 x 轴上的一个动点．若 $\triangle ABC$ 的面积为 4，则 k_1-k_2 的值为(　　)



A. 8　　B. -8

C. 4　　D. -4

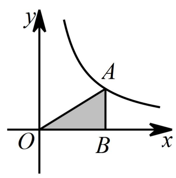
8. 如图，反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(x>0)$ 的图象经过矩形 $OABC$ 对角线的交点 M，分别与 AB、BC 交于点 D、E，若四边形 $ODBE$ 的面积为 9，则 k 的值为(　　)



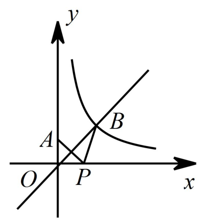
A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

二、填空题

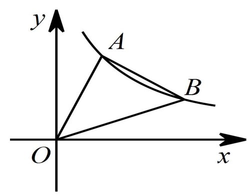
9. 如图，点 A 在双曲线 $y=\dfrac{k}{x}$ 上，$AB\perp x$ 轴于 B，且 $S_{\triangle AOB}=2$ ，则 $k=$ ________.



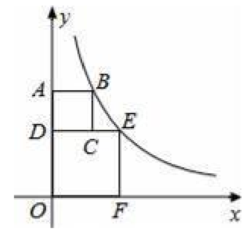
第 9 题图



第 10 题图



第 11 题图



第 12 题图

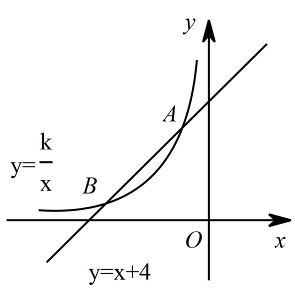
10. 如图，平面直角坐标系中，已知 A 点坐标 $(0,1)$ ，反比例函数 $y=\dfrac{k^2}{x}(k>0,x>0)$ 的图象与直线 $y=x$ 相交于点 B，P 是 x 轴上的动点，如果 $PA+PB$ 的最小值是 5，那么 k 的值是________.

11. 如图，在平面直角坐标系中，$OA=AB$ ，$\angle OAB=90^\circ$ ，反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(x>0)$ 的图象经过 A，B 两点，若点 A 的坐标为 $(n,1)$ ，则 k 的值为________.

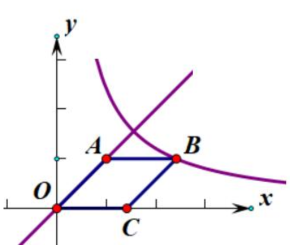
12. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，四边形 $ODEF$ 和四边形 $ABCD$ 都是正方形，点 F 在 x 轴的正半轴上，点 C 在边 DE 上，反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0,x>0)$ 的图象过点 B，E．若 $AB=4$ ，则 k 的值为________.

13. 如图，直线 $y=x+4$ 与双曲线 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$ 相交于 $A(-1,a)$ 、B 两点，在 y 轴上找一点 P，当 $PA+PB$ 的值最小时，点 P 的坐标为________.

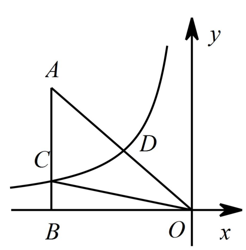
14. 如图，$OABC$ 为菱形，点 C 在 x 轴上，点 A 在直线 $y=x$ 上，点 B 在 $y=\dfrac{k}{x}(k>0)$ 的图象上，若 $S_{\text{菱形}\,OABC}=\sqrt{2}$ ，则 k 的值为________.



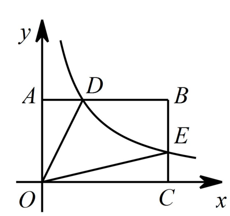
第 13 题图



第 14 题图



第 15 题图



第 16 题图

15. 如图，已知双曲线 $y=\dfrac{k}{x}(k<0)$ 经过直角三角形 OAB 斜边 OA 的中点 D，且与直角边 AB 相交于点 C．若点 A 的坐标为 $(-8,6)$ ，则 $\triangle AOC$ 的面积为________.

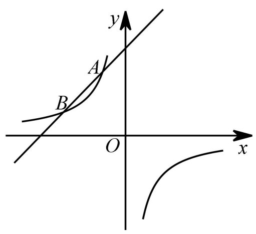
16. 如图，在平面直角坐标系中，反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}\ (x>0)$ 的图象交矩形 $OABC$ 的边 AB 于点 D，交边 BC 于点 E，且 $BE=2EC$．若四边形 $ODBE$ 的面积为6，则 $k=$ ________.

三、解答题

17. 如图，直线 $y=x+3$ 与双曲线 $y=\dfrac{m-3}{x}$ （m 为常数）交于 $A(a,2)$，B 两点.

（1）求 a，m 的值和 B 点坐标；

（2）双曲线 $y=\dfrac{m-3}{x}$ 上有三点 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$P(x_3,y_3)$，且 $y_1<y_2<0<y_3$，则 x_1，x_2，x_3 的大小关系是________（用“<”号连接）.

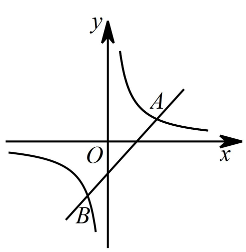


18. 如图，已知 $A(4,2)$，$B(n,-4)$ 是一次函数 $y=kx+b$ 的图象与反比例函数 $y=\dfrac{m}{x}$ 的图象的两个交点.

（1）求 m 的值和一次函数的解析式；

（2）结合图象直接写出不等式 $\dfrac{m}{x}-kx-b>0$ 的解集；

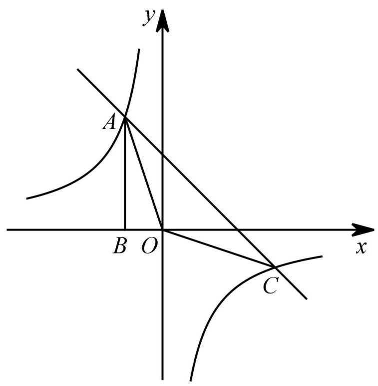
（3）若点 $M(t,y_1)$，$N(1,y_2)$ 是反比例函数 $y=\dfrac{m}{x}$ 的图象上两点，且 $y_1<y_2$，请你借助图象，直接写出 t 的取值范围.



19. 如图，$\mathrm{Rt}\triangle ABO$ 的顶点 A 是双曲线 $y=\dfrac{k}{x}$ 与直线 $y=-x-(k+1)$ 在第二象限的交点．双曲线与直线的另一交点为 C，$AB\perp x$ 轴于点 B，且 $S_{\triangle ABO}=\dfrac{3}{2}$ ．

（1）求这两个函数的解析式；

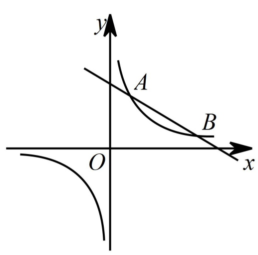
（2）求直线与双曲线的两个交点 A，C 的坐标和 $\triangle AOC$ 的面积．



20. 如图，双曲线 $y=\dfrac{k}{x}\,(k>0)$ 与直线 $y=-\dfrac{1}{2}x+4$ 相交于 A, B 两点．

（1）当 $k=6$ 时，求点 A，B 的坐标；

（2）在双曲线 $y=\dfrac{k}{x}\,(k>0)$ 的同一支上的三点 $M\left(x_1, y_1\right)$，$N\left(x_2, y_2\right)$，$P\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, y_0\right)$ ．请你借助图象，直接写出 y_0 与 $\dfrac{y_1+y_2}{2}$ 的大小关系．



26.1 反比例函数 A 答案

第一部分

1. B　2. B　3. D　4. A　5. B　6. C　7. A　8. C

第二部分

9. 4

10. 3　11. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　12. $24+8\sqrt{5}$ 【解析】设正方形 $ODEF$ 的边长为 a，则 $E(a,a)$，

$B(4,a+4)$，$\because$ 点 B、E 均在反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象上，$\therefore \begin{cases} a=\dfrac{k}{a}, \\ a+4=\dfrac{k}{4}, \end{cases}$ 解得

$a=2+2\sqrt{5}$ 或 $a=2-2\sqrt{5}$（舍去）．当 $a=2+2\sqrt{5}$ 时，

$k=a^2=\left(2+2\sqrt{5}\right)^2=24+8\sqrt{5}$ ．

13. $\left(0,\dfrac{5}{2}\right)$ 【解析】把点 A 坐标代入 $y=x+4$ 得 $-1+4=a$，$a=3$.即 $A(-1,3)$，

把点 A 坐标代入双曲线的解析式，得 $3=-k$.解得 $k=-3$，联立两函数解析式，得 $\begin{cases} y=x+4, \\ y=-\dfrac{3}{x}, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x_1=-1, \\ y_1=3, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-3, \\ y_2=1, \end{cases}$ $\therefore$ 点 B 坐标为 $(-3,1)$.作出点 A 关于 y 轴的对称点 C，

连接 BC，与 y 轴的交点即为点 P，使得 $PA+PB$ 的值最小.则点 C 坐标为：$(1,3)$，

设直线 BC 的解析式为 $y=ax+b$.

把 B，C 的坐标代入得 $\begin{cases} -3a+b=1, \\ a+b=3. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=\dfrac{1}{2}, \\ b=\dfrac{5}{2}. \end{cases}$

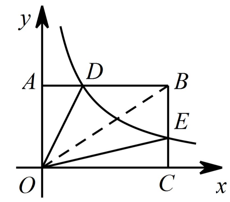
函数解析式为 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$.当 $x=0$ 时，$y=\dfrac{5}{2}$.则直线 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$ 与 y 轴的交点为 $\left(0,\dfrac{5}{2}\right)$.

14. $\sqrt{2}+1$ 【解析】$\because$ 直线 $y=x$ 经过点 A，$\therefore$ 设 $A(a,a)$，$\therefore OA^2=2a^2$，$\therefore AO=\sqrt{2}a$，
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\therefore AO=CO=CB=AB=\sqrt{2}a$，$\because$ 菱形 $OABC$ 的面积是 $\sqrt{2}$，
$\therefore \sqrt{2}a\cdot a=\sqrt{2}$，$\therefore a=1$，$\therefore AB=\sqrt{2}$，$A(1,1)$，$\therefore B\left(1+\sqrt{2},1\right)$，

设反比例函数解析式为 $y=\dfrac{k}{x}\ (k\neq 0)$，$\because B\left(1+\sqrt{2},1\right)$ 在反比例函数图象上，

$\therefore k=\left(1+\sqrt{2}\right)\times 1=\sqrt{2}+1$.

15. 18



16. 3 【解析】连接 OB .∵ 四边形 $OABC$ 是矩形，

$\therefore \angle OAD=\angle OCE=\angle DBE=90^\circ$ ，$S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OBC}$.

∵ D，E 在反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象上，

$\therefore S_{\triangle OAD}=S_{\triangle OCE}$ $\therefore S_{\triangle OBD}=S_{\triangle OBE}=\dfrac{1}{2}S_{四边形\ ODBE}=3$.

∵ $BE=2EC$ ，$\therefore S_{\triangle OCE}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle OBE}=\dfrac{3}{2}$.$\therefore k=3$.

第三部分

17.（1）把 $A(a,2)$ 代入 $y=x+3$ 得：$2=a+3$. 解得：$a=-1$. 即 $A(-1,2)$ ，

把 A 的坐标代入双曲线 $y=\dfrac{m-3}{x}$ 得：$m-3=-2$. 解得：$m=1$. 即 $y=-\dfrac{2}{x}$ ，

解方程组 $\begin{cases} y=x+3, \\ y=-\dfrac{2}{x} \end{cases}$ 得：$\begin{cases} x_1=-1, \\ y_1=2, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-2, \\ y_2=1, \end{cases}$ ∵ $A(-1,2)$ ，∴ $B(-2,1)$.

（2）$x_3<x_1<x_2$

18.（1）∵ 点 $A(4,2)$ 在反比例函数 $y=\dfrac{m}{x}$ 的图象上，

∴ $m=4\times2=8$ ，

∴ 反比例函数的解析式为 $y=\dfrac{8}{x}$. ∵ 点 $B(n,-4)$ 在反比例函数 $y=\dfrac{8}{x}$ 的图象上，

∴ $8=-4n$ ，解得：$n=-2$ ，∴ 点 B 的坐标为 $(-2,-4)$.

将点 $A(4,2)$ ，点 $B(-2,-4)$ 代入 $y=kx+b$ 中得：

$\begin{cases} 2=4k+b, \\ -4=-2k+b. \end{cases}$ 解得：$\begin{cases} k=1, \\ b=-2. \end{cases}$ ∴ 一次函数的解析式为 $y=x-2$.

（2）观察函数图象，发现：

当 $x<-2$ 或 $0<x<4$ 时，反比例函数图象在一次函数图象的上方，

∴ 不等式 $\dfrac{m}{x}-kx-b>0$ 的解集为 $x<-2$ 或 $0<x<4$.

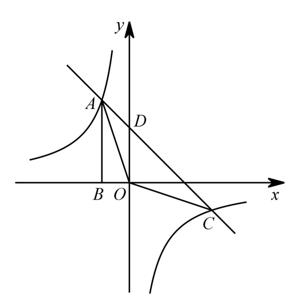
（3）当 $y_1<y_2$ 时，t 的取值范围为 $t<0$ 或 $t>1$.

19.（1）设 A 点坐标为 (x,y) ，且 $x<0$ ，$y>0$ ，则

$S_{\triangle ABO}=\dfrac{1}{2}\cdot|BO|\cdot|BA|=\dfrac{1}{2}\cdot(-x)\cdot y=\dfrac{3}{2}$ ，∴ $xy=-3$ ，

又 ∵ 点 A 在双曲线上，∴ $xy=k$ ，∴ $k=-3$.

∴ 所求的两个函数的解析式分别为 $y=-\dfrac{3}{x}$ ，$y=-x+2$ ；



（2）如图，设直线 AC 与 y 轴交点为 D，

在直线 $y=-x+2$ 中，令 $x=0$，得 $y=2$.

$\therefore$ 直线 $y=-x+2$ 与 y 轴的交点 D 的坐标为 $(0,2)$，

联立直线和双曲线的解析式，得：$\begin{cases} y=-x+2, \\ y=-\dfrac{3}{x}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_1=-1, \\ y_1=3, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=3, \\ y_2=-1, \end{cases}$ $\because$ $A(-1,3)$，

$C(3,-1)$，

$$\begin{aligned} \therefore S_{\triangle AOC} &= S_{\triangle ODA}+S_{\triangle ODC} \\ &= \frac{1}{2}OD\cdot(|x_1|+|x_2|) \\ &= \frac{1}{2}\times 2\times(3+1) \\ &= 4. \end{aligned}$$

20.（1）由方程 $\dfrac{6}{x}=-\dfrac{1}{2}x+4$．

解之得 $x=2$ 或 6，

$\therefore$ $A(2,3)$，$B(6,1)$．

（2）当三点在第一象限时，$y_0<\dfrac{y_1+y_2}{2}$；

当三点在第三象限时，$y_0>\dfrac{y_1+y_2}{2}$．