24.5 圆幂定理

【学习任务】

1、了解圆幂定理，会在**小题中**直接应用圆幂定理.

2、会用相似的知识证明圆幂定理.

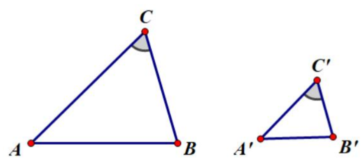
【知识梳理】

一、预备知识

1、相似三角形的判定定理（之一）

如果一个三角形的两个角与另一个三角形的两个角对应相等，那么这两个三角形相似

举例：△ABC 和△A'B'C' 中，若∠A ＝∠ A'，∠ B＝∠ B'，则有：$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$



2、相似三角形的性质定理（之一）

相似三角形的对应边成比例

举例：若$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，则有：$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$，或$\frac{AB}{AC}=\frac{A'B'}{A'C'}$，$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$，$\frac{AC}{BC}=\frac{A'C'}{B'C'}$

3、比例中项

比例中项是一种特殊的比例项，成比例的四个量（包括数或线段），如果内项相等，即比例式为 a:b=b:c，则内项 b 称为外项 a 和 c 的比例中项。**（内项要相等时才称为比例中项）**

或：若有$b^2=a\bullet c$，则b为a和c的比例中项。

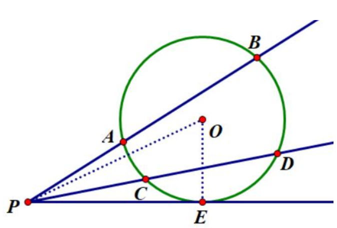
二、圆幂定理

圆幂定理

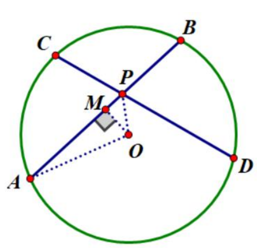
对于半径为 R 的定圆 O，若有两直线与该圆分别交于 A、B 和 C、D，且彼此相交于点 P，则有 $PA\bullet PB=PC\bullet PD=\left|OP^2-R^2\right|$.圆幂定理是相交弦定理、切割线定理、割线定理以及它们推论的统称。

相交弦定理

圆内的两条相交弦，被交点分成的两条线段长的积相等。即：下图（2）中有 $PA\bullet PB=PC\bullet PD$



图（1）



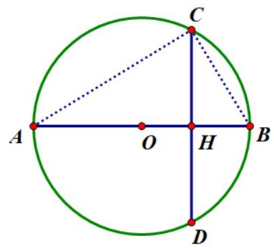
图（2）

圆幂定理证明：

在图 ⑴ 中证明$PA\bullet PB=PC\bullet PD=OP^2-R^2$

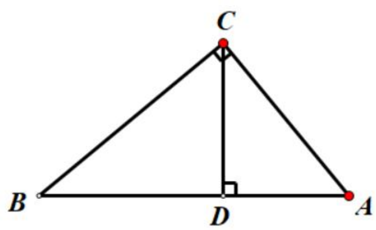
在图（2）中证明$PA\bullet PB=PC\bullet PD=R^2-OP^2$

当“相交弦定理”和“垂径定理”结合时，有：$CH^2 = HA \cdot HB$**，即：“射影定理”情形之一**



※ 知识链接：射影定理

射影定理：在直角三角形中，斜边上的高是两条直角边在斜边射影的比例中项，每一条直角边又是这条直角边在斜边上的射影和斜边的比例中项。



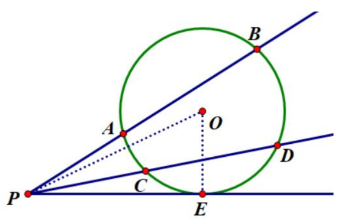
符号语言：

$CD^2 = AD \cdot BD$

$AC^2 = AD \cdot AB$

$BC^2 = BD \cdot BA$

切割线定理：从圆外一点引圆的切线和割线，切线长是这点到割线与圆交点的两条线段长的比例中项



符号语言：

$PE^2 = PA \cdot PB$

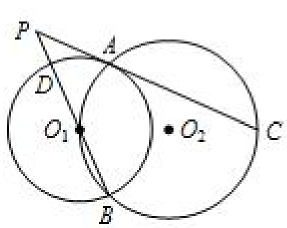
割线定理：从圆外一点 P 引两条割线分别与圆交于 A、B、C、D，则有 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

【同步讲练】

一、选择题

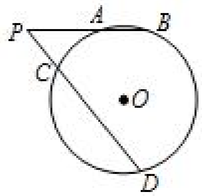
1. 如图，已知 $\odot O_1$，$\odot O_2$ 相交于 A，B 两点，且点 O_1 在 $\odot O_2$ 上．过 A 作 $\odot O_1$ 的切线 AC 交 BO_1 的延长线于点 P，交 $\odot O_2$ 于点 C，BP 交 $\odot O_1$ 于点 D，若 $PD = 1$，$PA = \sqrt{5}$，则 AC 的长为（　　）

A. $\sqrt{5}$　　　B. $2\sqrt{5}$　　　C. $2+\sqrt{5}$　　　D. $3\sqrt{5}$



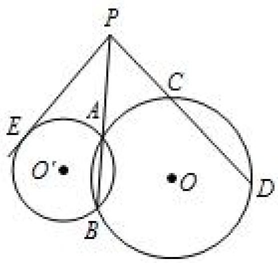
2. 如图，过点 P 作 $\odot O$ 的两条割线分别交 $\odot O$ 于点 A、B 和点 C、D，已知 $PA=3$，$AB=PC=2$，则 PD 的长是（　　）

A. 3　　B. 7.5　　C. 5　　D. 5.5



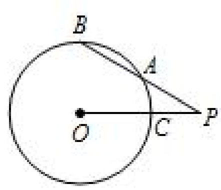
3. 如图，$\odot O$ 和 $\odot O'$ 都经过点 A 和点 B，点 P 在 BA 的延长线上，过 P 作 $\odot O$ 的割线 PCD 交 $\odot O$ 于 C，D，作 $\odot O'$ 的切线 PE 切 $\odot O'$ 于 E，若 $PC=4$，$CD=5$，则 PE 等于（　　）

A. 6　　B. $2\sqrt{5}$　　C. 20　　D. 36



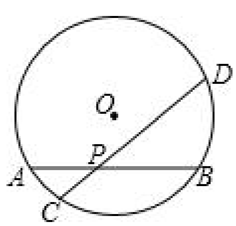
4. 如图，点 P 是 $\odot O$ 外一点，PAB 为 $\odot O$ 的一条割线，且 $PA=AB$，PO 交 $\odot O$ 于点 C，若 $OC=3$，$OP=5$，则 AB 长为（　　）

A. $\sqrt{10}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{6}$　　D. $\sqrt{5}$

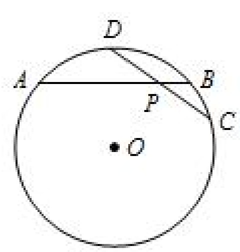


二、填空题

5. 如图，弦 AB 和 CD 交于内一点 P，若 $AP=3$，$PB=4$，$CP=2$，则 $PD=$ ________.



第 5 题图

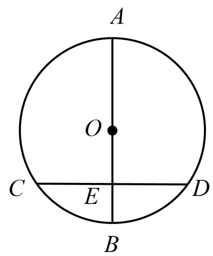


第 6 题图

6. 如图，在 $\odot O$ 中，若 AB 与 CD 相交于点 P，且 $PC=PD$，$PA=4$，$PB=1$，则 PC 的长是________.

三、解答题

7. 如图，已知 AB 是 $\odot O$ 的直径，弦 $CD \perp AB$ 于 E，$CD = 16\text{ cm}$，$AB = 20\text{ cm}$，求 AE 的长．

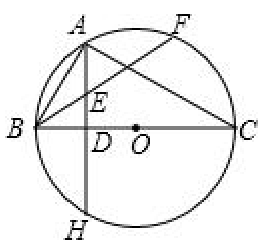


8. 如图，已知 BC 是 $\odot O$ 的直径，$AH \perp BC$，垂足为 D，点 A 为 $\overset{\frown}{BF}$ 的中点，BF 交 AD 于点 E，且 $BE \cdot EF = 32$，$AD = 6$．

（1）求证：$AE = BE$；

（2）求 DE 的长；

（3）求 BD 的长．



24.5 圆幂定理 答案

第一部分

1. B　2. B　3. A　4. B

第二部分

5. 6　　6. 2

第三部分

7. 因为 $CD=16\ \text{cm}$ ，

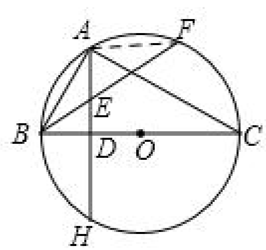
根据垂径定理可知 $CE=8\ \text{cm}$.

根据相交弦定理可得：

$64=BE\cdot AE=(AB-AE)\cdot AE$.

解方程得：$AE=16\,(\text{cm})$.

8.（1）



连 AF，因为 A 为 $\overset{\frown}{BF}$ 的中点，

所以 $\overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{AB}$.

又 $AH\perp BC$ ，BC 是直径，

$\therefore \overset{\frown}{BH}=\overset{\frown}{AB}$

$\therefore \overset{\frown}{BH}=\overset{\frown}{AF}$

$\therefore \angle ABE=\angle BAH$

$\therefore AE=BE$.

（2）设 $DE=x\,(x>0)$.

$\because AD=6$ ，$BE\cdot EF=32$ ，$AE\cdot EH=BE\cdot EF$ ，

$\therefore (6-x)(6+x)=32$ ，

解得 $x=2$ ，即 DE 的长为 2.

（3）由（1）、（2）有：$BE=AE=6-2=4$.

在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 中，$BD=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$.