27.1 图形的相似 27.2 相似三角形+相似模型

【学习内容】

1、了解平行线分线段成比例定理.

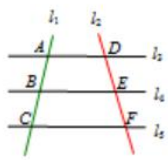
2、掌握三角形的判定定理，会判定三角形的相似，能利用相似三角形的性质解决实际问题.

【知识梳理】

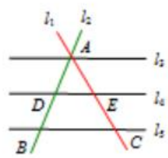
平行线分线段成比例定理

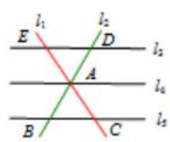
描述 **平行线分线段成比例定理**：三条平行线截两条直线，所得的对应线段的比相等.

如图，当 $l_3 \parallel l_4 \parallel l_5$ 时，就可以得到 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}, \frac{BC}{AB}=\frac{EF}{DE}, \frac{AB}{AC}=\frac{DE}{DF}, \frac{BC}{AC}=\frac{EF}{DF}$.



如图，在三角形中 l_3 和 l_4 看成平行于 $\triangle ABC$ 的边 BC 的直线，可得到平行于三角形一边的直线截其它两边（或两边延长线），所得的对应线段的比相等.





相似三角形的性质

①相似三角形的对应边成比例，对应角相等；

②相似三角形的对应高的比、对应中线的比、对应角平分线的比都等于相似比；

③相似三角形周长的比等于相似比，相似多边形周长的比也等于相似比；

④相似三角形面积的比等于相似比的平方，相似多边形面积的比也等于相似比的平方.

相似三角形的判定

①平行于三角形一边的直线和其他两边（或两边的延长线）相交，所构成的三角形与原三角形相似.

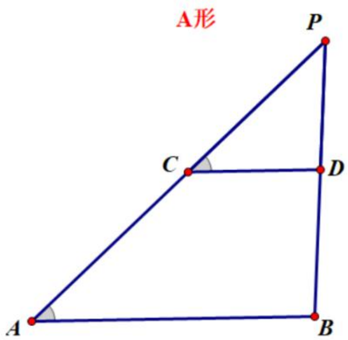
②如果两个三角形的三组对应边的比相等，那么这两个三角形相似.

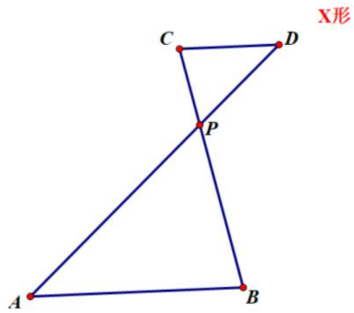
③如果两个三角形的两组对应边的比相等，并且相应的夹角相等，那么这两个三角形相似.

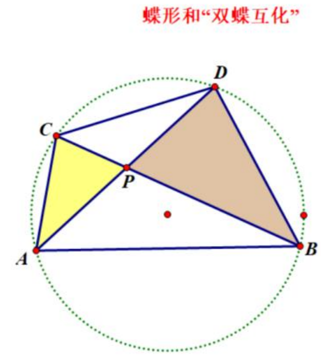
④如果一个三角形的两个角与另一个三角形的两个角对应相等，那么这两个三角形相似.

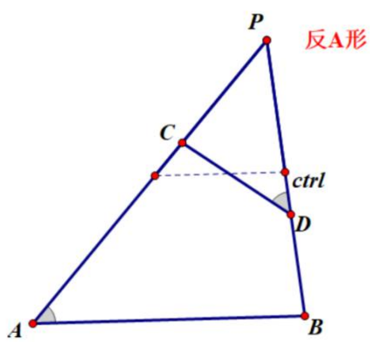
⑤斜边和一条直角边对应成比例的两个直角三角形.

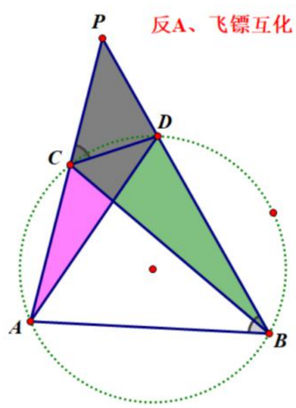
常见的相似三角形模型

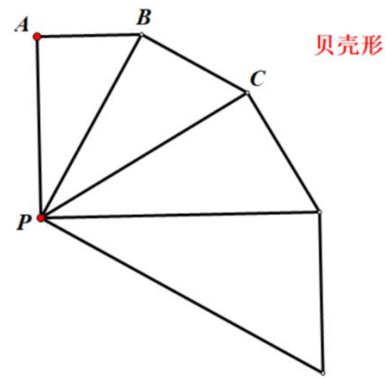

A形
P
C
D
A
B

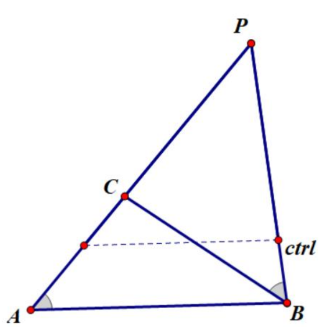

X形
C
D
P
A
B

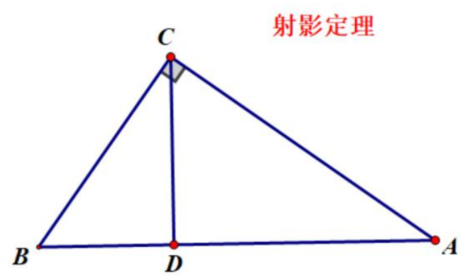

蝶形和“双蝶互化”
D
C
P
A
B


反A形
P
C
ctrl
D
A
B

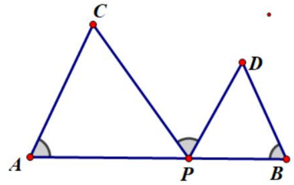

反A、飞镖互化
P
D
C
A
B

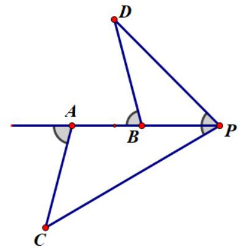

贝壳形
A
B
C
P

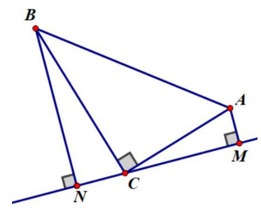

P
C
ctrl
A
B

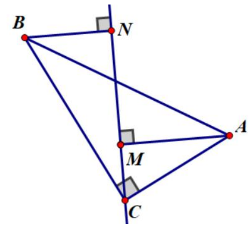

射影定理
C
B
D
A

一线三等角+一线三垂直

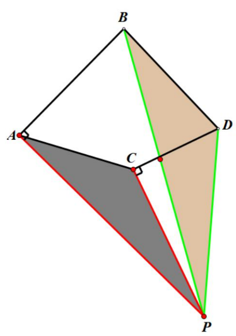


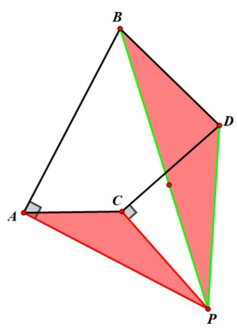


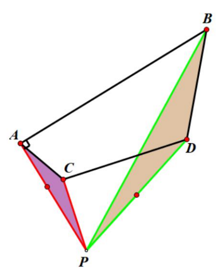


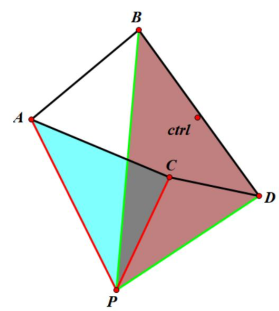


手拉手相似





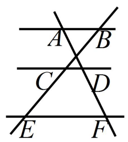




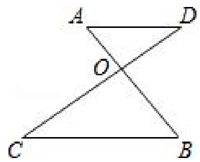
一、选择题

1. 如图，已知 $AB \parallel CD \parallel EF$ ，那么下列结论正确的是 (　　)

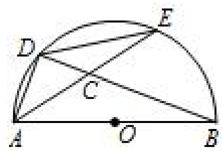
A. $\dfrac{AD}{DF}=\dfrac{BC}{CE}$　　B. $\dfrac{BC}{CE}=\dfrac{DF}{AD}$　　C. $\dfrac{CD}{EF}=\dfrac{BC}{BE}$　　D. $\dfrac{CD}{EF}=\dfrac{AD}{AF}$



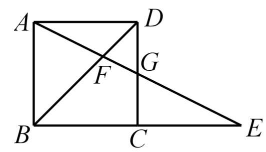
第 1 题图



第 4 题图



第 5 题图



第 6 题图

2. 下列各组图形一定相似的是 (　　)

A. 任意两个等腰三角形

B. 斜边和一条直角边对应成比例的两个直角三角形

C. 两条边成比例的两个直角三角形

D. 两条边之比为 $2:3$ 的两个直角三角形

3. 若一个三角形各边的长度都扩大到原来的 2 倍，则扩大后的三角形各角的度数都 (　　)

A. 缩小到原来的 $\dfrac{1}{2}$　　B. 不变

C. 扩大到原来的 2 倍　　D. 扩大到原来的 4 倍

4. 如图，AB，CD 相交于点 O，$AD \parallel CB$ ，若 $AO=2$ ，$BO=3$ ，$CD=6$ ，则 CO 等于 (　　)

A. 2.4　　B. 3　　C. 3.6　　D. 4

5. 如图，AB 是半圆 O 的直径，D，E 是半圆上任意两点，连接 AD，DE，AE 与 BD 相交于点 C，要使 $\triangle ADC$ 与 $\triangle ABD$ 相似，可以添加一个条件．下列添加的条件其中错误的是 (　　)

A. $\angle ACD=\angle DAB$　　B. $AD=DE$

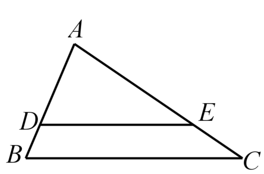
C. $AD^2=BD\cdot CD$　　D. $AD\cdot AB=AC^2$

6. 如图所示，在正方形 $ABCD$ 中，G 为 CD 边中点，连接 AG 并延长交 BC 边的延长线于 E 点，对角线 BD 交 AG 于 F 点，已知 $FG=2$ ，则线段 AE 的长度为 (　　)

A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 12

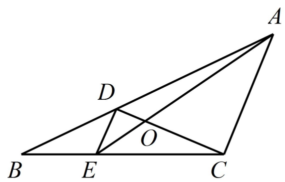
7. 如图，平行于 BC 的直线 DE 把 $\triangle ABC$ 分成面积相等的两部分，则 $\dfrac{BD}{AD}$ 的值为 (　　)

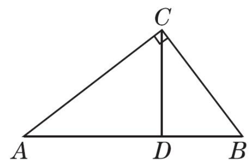
A. 1　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\sqrt{2}-1$　　D. $\sqrt{2}+1$

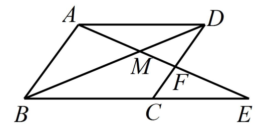


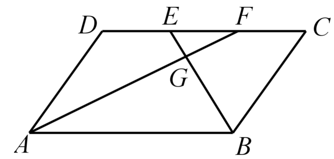
8. 如图，D，E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 BC 上的点，且 $DE \parallel AC$ ，AE 、 CD 相交于点 O，若 $S_{\triangle DOE} : S_{\triangle COA} = 1 : 25$ ，则 $S_{\triangle BDE}$ 与 $S_{\triangle CDE}$ 的比是 (　　)

A. $1:3$　　B. $1:4$　　C. $1:5$　　D. $1:25$


第 8 题图


第 9 题图


第 10 题图


第 12 题图

9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$ ，$CD \perp AB$ 于点 D，则图中的相似三角形共有 (　　)

A. 1 对　　B. 2 对　　C. 3 对　　D. 0 对

10. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle A'B'C'$ 中，$\angle C = \angle C' = 90°$ ，若添加一个条件，使得 $\mathrm{Rt}\triangle ABC \sim \mathrm{Rt}\triangle A'B'C'$ ，则下列条件中不符合要求的是 (　　)

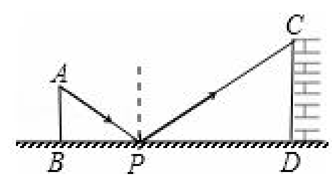
A. $\angle A = \angle A'$　　B. $\angle B = \angle B'$

C. $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$　　D. $\dfrac{AB}{A'C'} = \dfrac{AC}{B'C'}$

11. 如图，四边形 $ABCD$ 为平行四边形，E，F 为 CD 边的两个三等分点，连接 AF，BE 交于点 G，则 $S_{\triangle EFG} : S_{\triangle ABG} =$ (　　)

A. $1:3$　　B. $3:1$　　C. $1:9$　　D. $9:1$

12. 如图是小明设计用手电筒来测量某古城墙高度的示意图．在地面上点 P 处放一水平的平面镜，光线从点 A 出发经平面镜反射后刚好射到古城墙 CD 的顶端 C 处，已知 $AB \perp BD$ ，$CD \perp BD$ ，且测得 $AB = 1.2$ 米，$BP = 1.8$ 米，$PD = 18$ 米，那么该古城墙的高度是 (　　)



A. 6 米　　B. 8 米　　C. 12 米　　D. 24 米

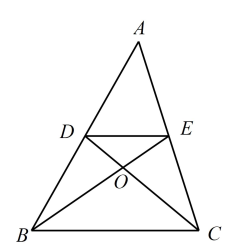
13. 一斜坡长 70 米，它的高为 5 米，将重物从斜坡起点推到坡上 20 米处停下，停下地点的高度为 (　　)

A. $\dfrac{35}{2}$ 米　　B. 2 米　　C. $\dfrac{10}{7}$ 米　　D. $\dfrac{3}{2}$ 米

14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，中线 BE，CD 相交于点 O，连接 DE，下列结论：

①$\dfrac{DE}{BC} = \dfrac{1}{2}$ ；②$\dfrac{S_{\triangle DOE}}{S_{\triangle COB}} = \dfrac{1}{2}$ ；③$\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{OE}{OB}$ ；④$\dfrac{S_{\triangle ODE}}{S_{\triangle ADE}} = \dfrac{1}{3}$ ．

其中正确的个数有 (　　)

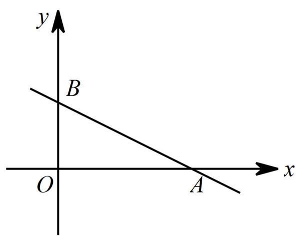


A. 1 个　　B. 2 个

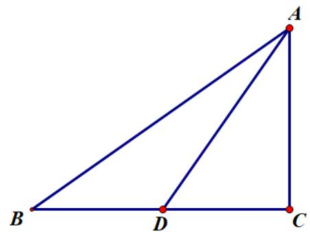
C. 3 个　　D. 4 个

二、填空题

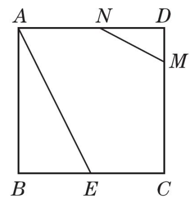
15. 如图，已知直线 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 与 x 轴交于点 A，与 y 轴交于点 B，在 x 轴上有一点 C，使 B，O，C 构成的三角形与 $\triangle AOB$ 相似，则点 C 的坐标为________.



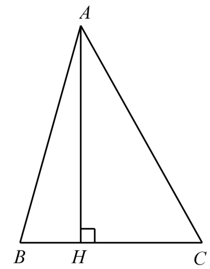
第 15 题图



第 16 题图



第 17 题图



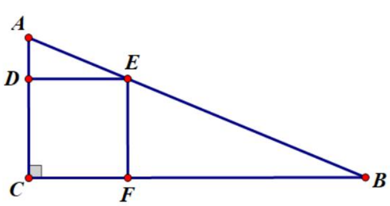
第 18 题图

16. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，点 D 在 BC 上，且 $\frac{AB}{DA}=\frac{BC}{AC}$，$\angle B=35^\circ$，则 $\angle BAD=$ ________.

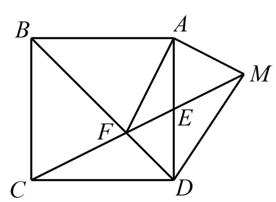
17. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 2，$BE=CE$，$MN=1$，线段 MN 的两端点在 CD，AD 上滑动，当 $MD=$ ________ 时，$\triangle ABE$ 与以 D，M，N 为顶点的三角形相似.

18. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=45^\circ$，$AH\perp BC$ 于 H（H 在边 BC 上），若 $BH=1$，$CH=2$，则 $AH=$ ________.

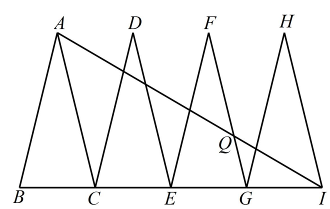
19. 《九章算术》是中国古代的数学专著，它奠定了中国古代数学的基本框架，以计算为中心，密切联系实际，以解决人们生产、生活中的数学问题为目的．书中记载了这样一个问题："今有勾五步，股十二步，问勾中容方几何?"其大意是：如图，Rt$\triangle ABC$ 的两条直角边的长分别为 5 和 12，则它的内接正方形 $CDEF$ 的边长为________.



第 19 题图



第 20 题图



第 21 题图

20. 边长为 1 的正方形 ABCD 中，E 为边 AD 的中点，连接线段 CE 交 BD 于点 F，点 M 为线段 CE 延长线上一点，且 $\angle MAF$ 为直角，则 DM 的长为________.

21. 如图，已知 $\triangle ABC$，$\triangle DCE$，$\triangle FEG$，$\triangle HGI$ 是 4 个全等的等腰三角形，底边 BC，CE，EG，GI 在同一条直线上，且 $AB=2$，$BC=1$．连接 AI，交 FG 于点 Q，则 $QI=$ ________.

27.2 相似三角形+模型 答案

1. A　2. B　3. B　4. C　【解析】如图．$\because AD\parallel CB$ ，$\therefore \dfrac{CO}{DO}=\dfrac{BO}{AO}$ ；$\because AO=2$ ，$BO=3$ ，$CD=6$ ，$\therefore \dfrac{CO}{6-CO}=\dfrac{3}{2}$ ，解得：$CO=3.6$ ．

5. D　6. D　7. C　8. B　【解析】$\because DE\parallel AC$ ，$\therefore \triangle DOE\backsim\triangle COA$ ，又 $S_{\triangle DOE}:S_{\triangle COA}=1:25$ ，$\therefore \dfrac{DE}{AC}=\dfrac{1}{5}$ ，$\because DE\parallel AC$ ，$\therefore \dfrac{BE}{BC}=\dfrac{DE}{AC}=\dfrac{1}{5}$ ，$\therefore \dfrac{BE}{EC}=\dfrac{1}{4}$ ，$\therefore S_{\triangle BDE}$ 与 $S_{\triangle CDE}$ 的比是 $1:4$ ．

9. C　10. D　11. C　12. C　【解析】由题意知：$\angle APB=\angle CPD$ ，$\angle ABP=\angle CDP=90^\circ$ ，$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ABP\backsim\mathrm{Rt}\triangle CDP$ ，$\therefore \dfrac{AB}{BP}=\dfrac{CD}{PD}$ ，

$\therefore CD=\dfrac{1.2\times18}{1.8}=12$ （米）．

13. C　14. C　【解析】①$\because DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线，$\therefore DE=\dfrac{1}{2}BC$ ，即 $\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{1}{2}$ ；故①正确；②$\because DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线，$\therefore DE\parallel BC$ ，$\therefore \triangle DOE\backsim\triangle COB$

$\therefore \dfrac{S_{\triangle DOE}}{S_{\triangle COB}}=\left(\dfrac{DE}{BC}\right)^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ ，故②错误；③$\because DE\parallel BC$ $\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC$ ，$\therefore \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{OE}{BC}$ $\therefore \triangle DOE\backsim\triangle COB$ ，$\therefore \dfrac{OE}{OB}=\dfrac{DE}{BC}$ ，$\therefore \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{OE}{OB}$ ，故③正确；

④$\because \triangle ABC$ 的中线 BE 与 CD 交于点 O．$\therefore$ 点 O 是 $\triangle ABC$ 的重心，根据重心性质，$BO=2OE$ ，$\triangle ABC$ 的高 $=3\triangle BOC$ 的高，且 $\triangle ABC$ 与 $\triangle BOC$ 同底 (BC)，

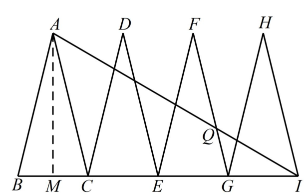
$\therefore S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle BOC}$ ，由②和③知，$S_{\triangle ODE}=\dfrac{1}{4}S\triangle COB$ ，$S_{\triangle ADE}=\dfrac{1}{4}S\triangle BOC$ ，

$\therefore \dfrac{S_{\triangle ODE}}{S_{\triangle ADE}}=\dfrac{1}{3}$ 故④正确.综上，①③④正确..

15. $(-4,0)$ 或 $(4,0)$ 或 $(-1,0)$ 或 $(1,0)$　　16. 20°　　17. $\dfrac{\sqrt5}{5}$ 或 $\dfrac{2}{5}\sqrt5$

18. $\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$　　19. $\dfrac{60}{17}$【解析】$\because$ 四边形 $CDEF$ 是正方形，$\therefore CD=ED$ ，$DE\parallel CF$ ，设 $ED=x$ ，则 $CD=x$ ，$AD=5-x$ ，$\because DE\parallel CF$ ，$\therefore \angle ADE=\angle C$ ，$\angle AED=\angle B$ ，$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ACB$ ，$\therefore \dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AD}{AC}$ ，$\therefore \dfrac{x}{12}=\dfrac{5-x}{5}$ ，$x=\dfrac{60}{17}$，故答案为：$\dfrac{60}{17}$.

20. $\dfrac{\sqrt{13}}{4}$



21. $\frac{4}{3}$【解析】过点 A 作 $AM \perp BC$ ．根据等腰三角形的性质，得

$MC=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}$ ．$\therefore MI=MC+CE+EG+GI=\frac{7}{2}$ ．

在 $Rt\triangle AMC$ 中，$AM^2=AC^2-MC^2=2^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{15}{4}$ ．

$AI=\sqrt{AM^2+MI^2}=\sqrt{\frac{15}{4}+\left(\frac{7}{2}\right)^2}=4$ 易证 $AC \parallel GQ$ ，则 $\triangle IAC \backsim \triangle IQG$ ，

$\therefore \frac{QI}{AI}=\frac{GI}{CI}$ ，即 $\frac{QI}{4}=\frac{1}{3}$ ，$\therefore QI=\frac{4}{3}$ ．