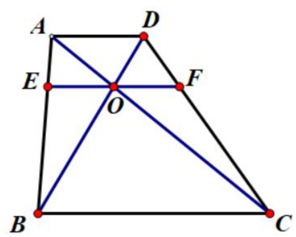
27.2 相似三角形 典例汇编（1）

1、如图，四边形 ABCD 中，AD∥BC，AC、BD 交于点 O，过点 O 作 EF 分别交 AB、CD 于 E、F，且 EF∥BC，求证：OE=OF



$\because AD /\!/ BC, EF /\!/ BC,$

$\therefore \dfrac{BO}{BD}=\dfrac{CO}{AC},$

$\because AD /\!/ BC,$

$\therefore \triangle BOE \backsim \triangle BDA, \triangle COF \backsim \triangle CAD,$

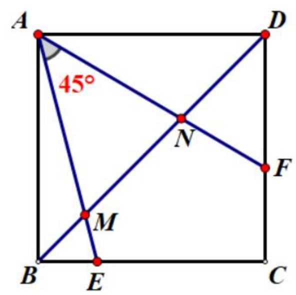
$\therefore \dfrac{OE}{AD}=\dfrac{BO}{BD}, \dfrac{OF}{AD}=\dfrac{OC}{AC},$

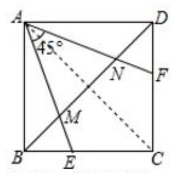
$\therefore \dfrac{OE}{AD}=\dfrac{OF}{AD},$

$\therefore OE=OF.$

2、如图，正方形 ABCD，∠EAF=45°，AE、AF 分别交 BC、CD 于 E、F，交 BD 于 M、N，求证：

$AE=\sqrt{2}\bullet AN$





证明：连接AC，

$\because$四边形$ABCD$是正方形

$\therefore \angle ACE=\angle ADN=\angle CAD=45^\circ,$

$\therefore AC=\sqrt{2}AD,$

$\because \angle EAF=45^\circ,$

$\therefore \angle EAF=\angle CAD,$

$\therefore \angle EAF-\angle CAF=\angle CAD-\angle CAF,$

$\therefore \angle EAC=\angle NAD,$

$\therefore \triangle EAC \backsim \triangle NAD,$

$\therefore AE:AN=AC:AD,$

$\therefore AE:AN=\sqrt{2}:1,$

$\therefore AE=\sqrt{2}AN.$

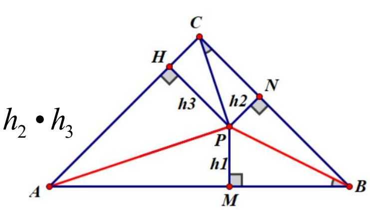
另解：连 NE，使用“双蝶互化模型”证明△ANE 为等腰直角三角形

3、如图，在 Rt△ABC 中，∠ACB=90°，AC=BC，P 为△ABC 内部一点，且∠APB=∠BPC=135°.

（1）求证：△PAB∽△PBC;

（2）求证：PA=2PC;

（3）若点 P 到三角形的边 AB、BC、CA 的距离分别为 h_1、h_2、h_3，求证：$h_1^2=h_2\bullet h_3$



证明：(1) $\because \angle ACB=90^\circ, AC=BC,$

$\therefore \angle ABC=45^\circ=\angle PBA+\angle PBC.$

又 $\because \angle APB=135^\circ, \therefore \angle PAB+\angle PBA=45^\circ,$

$\therefore \angle PBC=\angle PAB.$

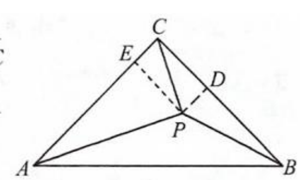
又 $\because \angle APB=\angle BPC=135^\circ, \therefore \triangle PAB \backsim \triangle PBC.$

(2) $\because \triangle PAB \backsim \triangle PBC, \therefore \dfrac{PA}{PB}=\dfrac{PB}{PC}=\dfrac{AB}{BC}.$

在 Rt△ABC 中，$BC=AC$，

$\therefore \dfrac{AB}{BC}=\sqrt{2}, \therefore PB=\sqrt{2}PC, PA=\sqrt{2}PB, \therefore PA=2PC.$

(3) 如图，过点 P 作 $PD\perp BC$，$PE\perp AC$，分别交 BC，AC 于点 D，E.



$\because \angle CPB+\angle APB=135^\circ+135^\circ=270^\circ,$

$\therefore \angle APC=90^\circ,$

$\therefore \angle EAP+\angle ACP=90^\circ.$

又 $\because \angle ACB=\angle ACP+\angle PCD=90^\circ,$

$\therefore \angle EAP=\angle PCD, \therefore \mathrm{Rt}\triangle AEP \backsim \mathrm{Rt}\triangle CDP,$

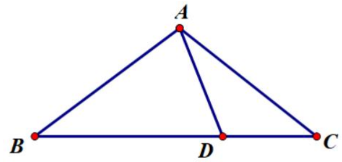
$\therefore \dfrac{PE}{DP}=\dfrac{AP}{PC}=2$，即 $\dfrac{h_3}{h_2}=2, \therefore h_3=2h_2.$

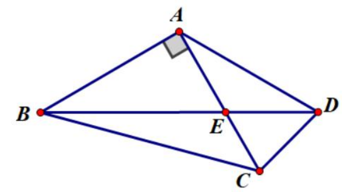
$\because \triangle PAB \backsim \triangle PBC, \therefore \dfrac{h_1}{h_2}=\dfrac{AB}{BC}=\sqrt{2}$，即 $h_1=\sqrt{2}h_2.$

$\therefore h_1^2=2h_2^2=2h_2\cdot h_2=h_2\cdot h_3.$

4、（1）如图 1，在△ABC 中，点 D 在线段 BC 上，∠BAD=75°，∠CAD=30°，AD=2，BD=2DC，求 AC 的长。

（2）如图 2，在四边形 ABCD 中，∠BAC=90°，∠CAD=30°，∠ADC=75°，AC 与 BD 交于点 E，AE=2，BE=2ED，求 BC 的长。

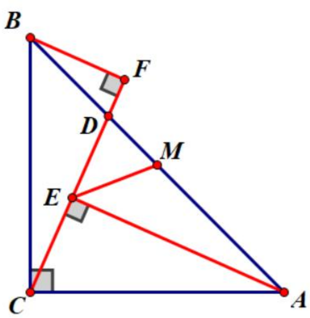




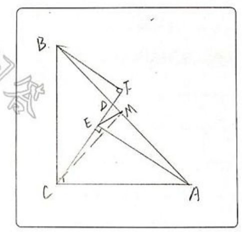
(1)过点 C 作 $CE\parallel AB$，交 AD 的延长线于点 E，$\triangle ABD\backsim\triangle CED$，$\angle ACE=75^\circ$，$\therefore AC=AE=3$；

(2)$\angle ACE$ 的度数为 75°，AC 的长为 3，过点 D 作 $DF\parallel AB$ 于 F，$\because \angle BAC=90^\circ$，$\therefore AB\parallel DF$，$\therefore \triangle ABE\backsim\triangle FDE$，$\therefore \frac{AB}{DF}=\frac{AE}{EF}=\frac{BE}{ED}=2$，$\therefore EF=1$. $\because$ 在 $\triangle ACD$ 中，$\angle CAD=30^\circ$，$\angle ADC=75^\circ$，$\therefore \angle ACD=75^\circ$，$\therefore AC=AD$. $\because DF\perp AC$，$\therefore \angle AFD=90^\circ$，在 $\triangle AFD$ 中，$AF=2+1=3$，$\angle FAD=30^\circ$. $\therefore BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=2\sqrt{6}$.

5、如图，在 Rt△ABC 中，CA=CB，M 是 AB 的中点，点 D 在 BM 上，AE⊥CD，BF⊥CD，垂足分别为 E、F，连接 EM. 求证：CF • DM=BM • DE



解析



连接 CM. ∵M是AB的中点

则 CM=BM（直角三角形斜边的中线是斜边的一半）.

∵ BM=CM. ∴ ∠MBC=∠BCM.

而 CB=CA ∠BAC=90°

则 ∠CBM=45° ∴ ∠BCM=45°

则 ∠BMC=90° 即 CM⊥AB

∵ ∠CDM=∠ADE，∠CMD=∠AED=90° ∴ △CDM∽△ADE

∴ $\frac{CM}{AE}=\frac{DM}{DE}$

∵ ∠ACB=90°. ∴ ∠BCF+∠ACE=90° ∵ ∠BCF+∠CBF=90°

∴ ∠ACE=∠CBF.

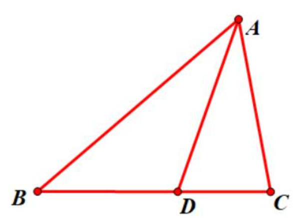
又∵ ∠BFD=90°=∠AEC. AC=BC

∴ △BCF≌△CAE（AAS） ∴ AE=CF

∵ $\frac{CM}{AE}=\frac{DM}{DE}$ AE=CF，CM=BM

∴ $\frac{BM}{CF}=\frac{DM}{DE}$ 即 CF·DM=BM·DE

6、如图，在△ABC 中，∠BAC=60°，AD 平分∠BAC 交 BC 于 D 点，求 $\frac{AD}{AB}+\frac{AD}{AC}$ 的值



过B点作$BE//AC$交AD的延长线于E点。

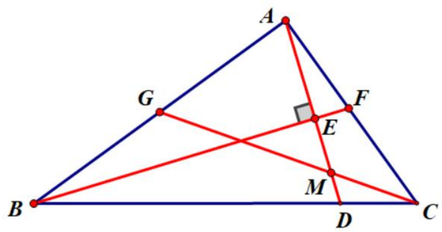
则$\triangle BDE\backsim\triangle CDA$。

$\therefore \frac{AD}{AC}=\frac{DE}{BE}$，又$\because BE=AB$，

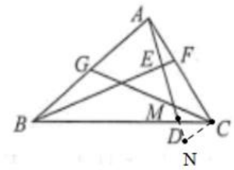
$\therefore \frac{AD}{AB}+\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}=\sqrt{3}$。

7、已知 Rt△ABC 中，∠BAC=90°，点 D 在 BC 上，BD=4DC，BF⊥AD 交 AD 于 E，交 AC 于 F，点 G 为 AB 的中点，CG 交 AD 于 M，

AF • AC=4，求 AB 的长。



作$CN \parallel AB$,交AD的延长线于N,



$\because AB \parallel CN$

$\therefore \triangle CDN \backsim \triangle BDA$

$\therefore \dfrac{CN}{AB}=\dfrac{CD}{BD}$

$\because BD=4CD$

$\therefore AB=4CN$

$\because G$是AB的中点

$\therefore AG=\dfrac{1}{2}AB$

$\therefore AG=2CN$

$\because BF \perp AD$

$\therefore \angle AEF=90^\circ$

$\therefore \angle EAF+\angle AFE=90^\circ$

$\because \angle BAF=90^\circ$

$\therefore \angle ABF+\angle AFB=90^\circ$

$\therefore \angle CAD=\angle ABF$

$\because CN \parallel AB$

$\therefore \angle BAC+\angle ACN=180^\circ$

$\therefore \angle ACN=90^\circ$

$\because \angle ACN=\angle BAC, \angle CAD=\angle ABF$

$\therefore \triangle ABF \backsim \triangle CAN$

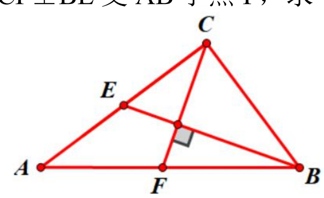
$\therefore \dfrac{AF}{CN}=\dfrac{AB}{AC}$

$\therefore \dfrac{AF}{AB}=\dfrac{\frac{1}{4}AB}{AC}$

$\therefore AF \cdot AC=\dfrac{1}{4}AB^2$

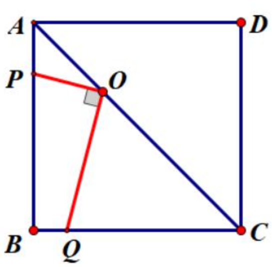
$\therefore AB=4$

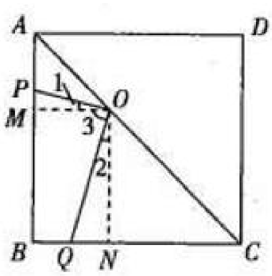
8、如图，在 Rt△ACB 中，AC⊥BC，$\frac{BC}{AC}=\frac{3}{4}$，点 E 在 AC 上，且 CE=AE，CF⊥BE 交 AB 于点 F，求 $\frac{AF}{BF}$ 的值。



【解析】过 A 作 AM⊥AC 交 CF 的延长线于 M，易证 $\frac{AF}{BF}=\frac{8}{9}$

9、如图，四边形 ABCD 为正方形，直角∠POQ 的顶点在正方形对角线 AC 上，直角的两边分别交 AB、BC 于 P、Q 两点，OC=2 • OA，求 $\frac{OP}{OQ}$ 的值





解：过点 O 作 $OM \perp AB$ 于点 M，$ON \perp BC$ 于点 N，如答图，

$\because$四边形 $ABCD$ 为正方形，$\therefore \angle BAC=\angle BCA=45^\circ$，

$\therefore \triangle AMO$ 和 $\triangle CNO$ 都是等腰直角三角形，$\therefore AO=\sqrt{2}OM$，$OC=\sqrt{2}ON$，

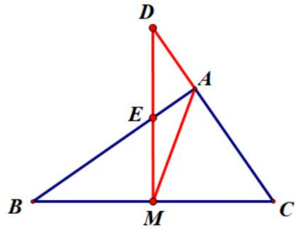
而 $OC=2OA$，$\therefore ON=2OM$.

$\because \angle POQ=90^\circ$，即$\angle 1+\angle 3=90^\circ$，

而$\angle 3+\angle 2=90^\circ$，$\therefore \angle 1=\angle 2$.

$\because \angle OMP=\angle ONQ=90^\circ$，$\therefore \triangle OPM \backsim \triangle OQN$，$\therefore \dfrac{OP}{OQ}=\dfrac{OM}{ON}=\dfrac{1}{2}$.

10、如图，△ABC 中，∠BAC=90°，M 为 BC 的中点，DM⊥BC 交 CA 的延长线于 D，交 AB 于 E，求证：$AM^2=MD \bullet ME$



$\because \angle BAC=90^\circ$，$M$为$BC$的中点，

$\therefore AM=BM=CM$，

$\therefore \angle B=\angle BAM$，

$\because \angle B+\angle C=90^\circ$，

$\therefore \angle BAM+\angle C=90^\circ$，

$\because \angle C+\angle D=90^\circ$，

$\therefore \angle BAM=\angle D$，

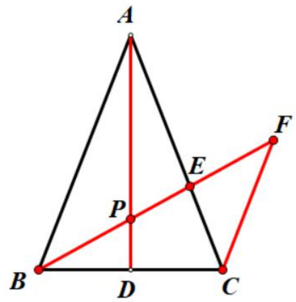
$\because \angle AME=\angle DMA$，

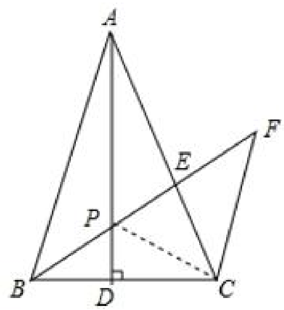
$\therefore \triangle AME \backsim \triangle DMA$，

$\therefore \dfrac{AM}{DM}=\dfrac{ME}{AM}$，

$\therefore AM^2=MD \cdot ME$.

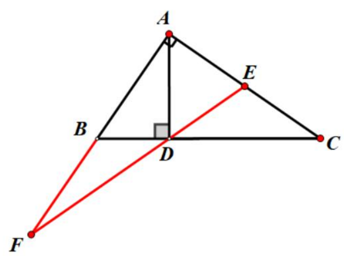
11、如图，△ABC 中，AB=AC，AD 是中线，P 是 AD 上一点，过 C 作 CF∥AB，延长 BP 交 AC 于 E，交 CF 于 F，求证：$BP^2=PE\bullet PF$





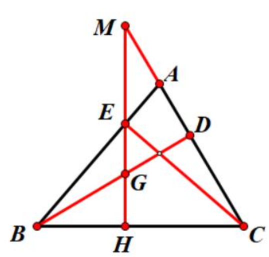
证明：连接PC，
$\because AB=AC$，AD是中线，
$\therefore AD$是$\triangle ABC$的对称轴.
$\therefore PC=PB$，$\angle PCE=\angle ABP$.
$\because CF\parallel AB$，
$\therefore \angle PFC=\angle ABP$(两直线平行，内错角相等)，
$\therefore \angle PCE=\angle PFC$.
又$\because \angle CPE=\angle EPC$，
$\therefore \triangle EPC\backsim\triangle CPF$.
$\therefore \dfrac{PC}{PE}=\dfrac{PF}{PC}$(相似三角形的对应边成比例)。
$\therefore PC^2=PE\cdot PF$.
$\because PC=BP$，
$\therefore BP^2=PE\cdot PF$.

12、如图，在△ABC 中，已知∠BAC=90°，AD⊥BC 于 D，E 为直角边 AC 的中点，过 D、E 作直线交 AB 的延长线于 F，求证：AB • AF=AC • DF



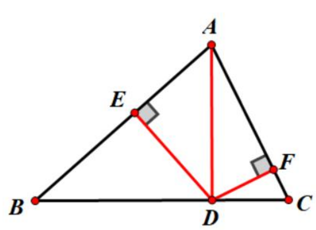
证明：∵∠BAC=90°，AD⊥BC，
∴△ABD∽△CAD，
∴∠C=∠FAD，
∴ $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AD}{BD}$，
∴AB:AC=BD:AD①.
∵E为AC的中点，AD⊥BC，
∴ED=$\dfrac{1}{2}$AC=EC，
∴∠C=∠EDC.
∵∠EDC=∠FDB，
∴∠FAD=∠FDB，∠F为公共角，
∴△DBF∽△ADF，
∴BD:AD=DF:AF②.
根据①②得AB:AC=DF:AF，
∴AB·AF=AC·DF.

13、如图，△ABC 中，BD、CE 是高，EH⊥BC 于 H，交 BD 于 G，交 CA 的延长线于 M，求证：$HE^2=HG\bullet MH$



证明:∵CE⊥BE,EH⊥BC,
∴由射影定理EH^2=BH·CH.
∵∠GBH+∠HCM=90°,∠M+∠HCM=90°,
∴∠GBH=∠M.
又∵∠BHG=∠MHC,
∴△BHG∽△MHC.
∴ $\dfrac{BH}{MH}=\dfrac{HG}{HC}$.
∴BH·HC=HG·MH.∴HE^2=HG·MH.

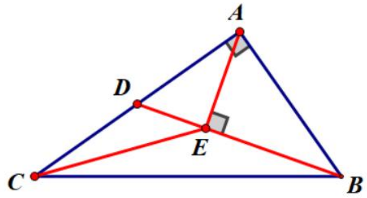
14、如图，在△ABC 中，AD⊥BC 于 D，DE⊥AB 于 E，DF⊥AC 于 F，求证：$\frac{AE}{AF}=\frac{AC}{AB}$



证明：$\because AD\perp BC$，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，
$\therefore \angle ADC=\angle ADB=\angle AED=\angle AFD=90^\circ$
，
$\therefore$易知$\triangle ADB\backsim\triangle AED$和$\triangle ADC\backsim\triangle AFD$，
$\therefore \dfrac{AE}{AD}=\dfrac{AD}{AB}$，$\dfrac{AF}{AD}=\dfrac{AD}{AC}$，
$\therefore AD^2=AE\cdot AB$，$AD^2=AF\cdot AC$，
$\therefore AE\cdot AB=AF\cdot AC$，
$\therefore \dfrac{AE}{AF}=\dfrac{AC}{AB}$.

15、如图，在△ABC 中，∠BAC=90°，D 为 AC 的中点，AE⊥BD，E 为垂足，

求证：∠CBD=∠ECD



证明：∵在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=90^\circ$，$AE\perp BD$，

$\therefore \angle AED=\angle BAD=90^\circ$，

$\because \angle ADE=\angle BDA$，

$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle BDA$，

$\therefore AD:BD=DE:AD$，

∵D为AC中点，

$\therefore AD=CD$，

$\therefore CD:BD=DE:CD$，

$\because \angle CDE=\angle BDC$，

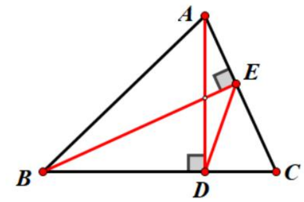
$\therefore \triangle CDE\backsim\triangle BDC$，

$\therefore \angle CBD=\angle ECD$.

16、如图，AD、BE 是△ABC 的两条高

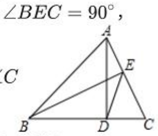
（1）求证：CE·CA=CD·CB

（2）若 EC=5，BC=13，求 $\frac{DE}{AB}$ 的值



(1) 证明：∵AD，BE是$\triangle ABC$的两条高

$\therefore \angle ADC=\angle BEC=90^\circ$，



又∵$\angle C=\angle C$

$\therefore \triangle ACD\backsim\triangle BCE$

$\therefore \frac{CE}{CD}=\frac{CB}{CA}$，即$CE\cdot CA=CD\cdot CB$；

(2) ∵$\frac{CE}{CD}=\frac{CB}{CA}$，

$\therefore \frac{CE}{CB}=\frac{CD}{AC}$，

又∵$\angle C=\angle C$，$EC=5$，$BC=13$，

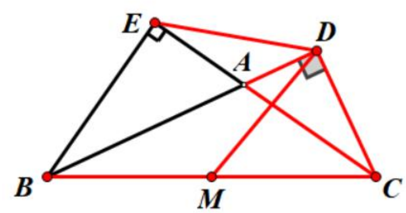
$\therefore \triangle CDE\backsim\triangle CAB$，

$\therefore \frac{DE}{AB}=\frac{CE}{BC}=\frac{5}{13}$.

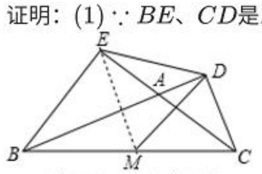
17、如图，BE、CD 是△ABC 的高，连 DE

（1）求证：AE·AC=AB·AD

（2）若∠BAC=120°，点 M 为 BC 的中点，求证：DE=DM



证明：(1) ∵BE、CD是$\triangle ABC$的高，



$\therefore \angle AEB=\angle ADC=90^\circ$，

而$\angle EAB=\angle DAC$，

$\therefore \triangle AEB\backsim\triangle ADC$，

$\therefore AB:AC=AE:AD$，

$\therefore AE\cdot AC=AB\cdot AD$；

(2) 连结ME，如图，

$\because \angle BAC=120^\circ$，

$\therefore \angle BAE=60^\circ$，

$\therefore \angle EBA=30^\circ$，

∵点M为BC的中点，

$\therefore MB=ME=MD=MC$，

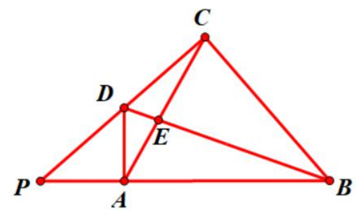
∴点B、E、D、C在以M点为圆心，MD为半径的圆上，

$\therefore \angle DME=2\angle EBD=2\times 30^\circ=60^\circ$，

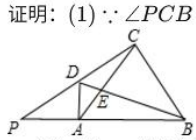
$\therefore \triangle MED$为等边三角形，

$\therefore DE=DM$.

18、如图，在△PBC 中，∠PCB=90°，D 为 PC 上一点，DA⊥PB 于 A 点，连 AC、BD 相交于 E 点，求证：（1）△PAD∽△PCB；（2）∠PCA=∠PBD；（3）△ADE∽△BCE



证明：(1) $\because \angle PCB = 90^\circ$，$DA \perp PB$，



$\therefore \angle PAD = \angle PCB$，

又$\because \angle P = \angle P$，

$\therefore \triangle PAD \backsim \triangle PCB$；

(2) $\because \triangle PAD \backsim \triangle PCB$，

$\therefore \dfrac{PA}{CP} = \dfrac{PD}{PB}$，

$\because \angle P = \angle P$，

$\therefore \triangle CPA \backsim \triangle BPD$，

$\therefore \angle PCA = \angle PBD$；

(3) $\because \angle ADB + \angle ABD = 90^\circ$，

$\angle PCA + \angle ACB = 90^\circ$，

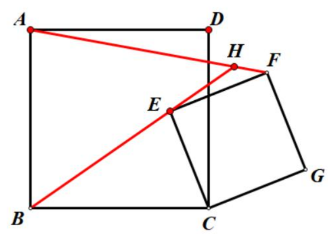
$\angle PCA = \angle PBD$；

$\therefore \angle ADB = \angle ECB$，

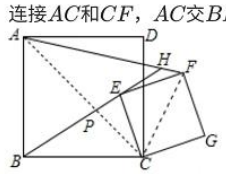
又$\because \angle DEA = \angle CEB$，

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle BCE$.

19、如图，正方形 ABCD 和正方形 CEFG，延长 BE 交 AF 于 H 点，求∠AHB 的大小



连接AC和CF，AC交BH于P点，如图，



$\because$四边形$ABCD$和四边形$CEFG$为正方形，

$\therefore \angle ACB = \angle FCE = 45^\circ$，

$\because \angle FCE + \angle ACE = \angle FCA$，

$\angle ACB + \angle ACE = \angle BCE$，

$\therefore \angle FCA = \angle BCE$，

又$\because \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{EC}{CF} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，

$\therefore \triangle BCE \backsim \triangle ACF$，

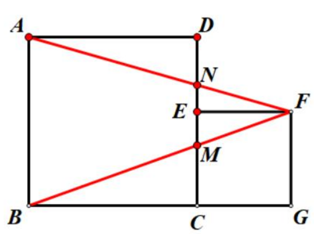
$\therefore \angle FAC = \angle EBC$，

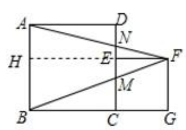
$\because \angle APH = \angle BPC$，

$\therefore \angle AHP = \angle PCB = 45^\circ$，

即$\angle AHB = 45^\circ$.

20、如图，正方形 ABCD，E 在 CD 上，以 CE 为边向外作正方形 CEFG，连 AF、BF 分别交 CD 于 N、M，求证：MN=CM





证明：延长FE交AB于点H，

$\because$四边形$ABCD$与四边形$CEFG$是正方形，

$\therefore AB = BC, EF = FG, AB /\!/ CD /\!/ FG$，

$FE \perp CD$，

$\therefore FE \perp AB$，

$\therefore$四边形$BGFH$是矩形，

$\therefore FH = BG$，

$\because AB /\!/ CD /\!/ FG$，

$\therefore \triangle FMN \backsim \triangle FBA, \triangle BCM \backsim \triangle BGF$，

$\therefore \dfrac{MN}{AB} = \dfrac{EF}{FH}, \dfrac{CM}{FG} = \dfrac{BC}{BG}$，

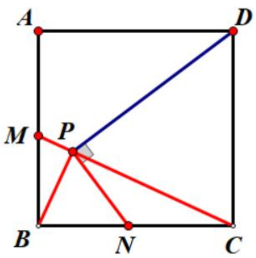
$\therefore \dfrac{MN}{BC} = \dfrac{FG}{BG}, \dfrac{CM}{BC} = \dfrac{FG}{BG}$，

$\therefore \dfrac{MN}{BC} = \dfrac{CM}{BC}$，

$\therefore MN = CM$.

27.2 相似三角形 典例汇编（2）

21、如图，M 为正方形 ABCD 边 AB 上一点，BP⊥CM 于 P 点，PN⊥PD 交 BC 于 N，求证：BM=BN



证明：∵BP⊥MC，

∴∠PBC+∠PCB=90°.

又∵∠PCB+∠PCD=90°，

∴∠PBC=∠PCD.

∵PD⊥PN，

∴∠DPN=90°.

∵∠BPC=∠BPN+∠CPN=90°，

∠DPN=∠DPC+∠CPN=90°，

∴∠BPN=∠DPC.

∴△PBN∽△PCD，

∴ $\frac{BN}{BP}=\frac{CD}{PC}$.

又∵BP⊥MC，

∴∠BPM=∠BPC.

∵∠MBP+∠BMP=90°，∠MBP+∠CBP=90°，

∴∠BMP=∠CBP，

∴△PBM∽△PCB，

∴ $\frac{BM}{BP}=\frac{BC}{PC}$.

∵BC=CD，

∴ $\frac{BN}{BP}=\frac{BM}{BP}$.

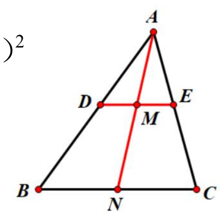
∴BN=BM.

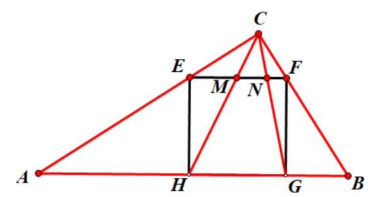
22、**【模型证明】**如图，DE∥BC.（1）若 DM=EM，求证：BN=NC；（2）求证：$\frac{DM}{ME}=\frac{BN}{CN}$

【模型运用】如图，在 Rt△ABC 中，∠ACB=90°，正方形 EFGH 的四个顶点分别在三边上，连 CH、CG 交 EF 于 M、N。求证：EM·FN=MN²

【解析】双 A 模型；$\frac{EM}{AH}=\frac{MN}{HG}=\frac{FN}{GB},\frac{EM}{AH}\cdot\frac{FN}{GB}=(\frac{MN}{HG})^2$

再证明 $AH\cdot GB=(HG)^2$ 即可

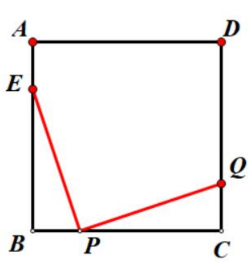




23、如图，正方形 ABCD 中，AB=12，点 E 在 AB 上，$AE=\frac{1}{4}AB$，点 P 在 BC 上运动（不与 B、C 重合），过点 P 作 PQ⊥EP，交 CD 于点 Q

（1）若 PB=3，求 CQ 的长

（2）求 CQ 的最大值



（1）证$\triangle BPE\backsim\triangle CQP$，$BE=9$，

$PB=3$，$CP=9$，$\therefore QC=3$；

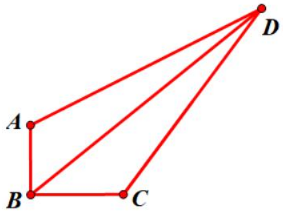
（2）设$BP=x$，$CQ=y$，则

$CP=12-x$，$\therefore \frac{9}{12-x}=\frac{x}{y}$，

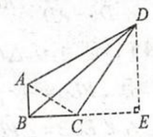
$y=-\frac{1}{9}(x^2-12x)=-\frac{1}{9}(x-6)^2+4$，$\therefore$

当$x=6$时，y有最大值为4。

24、如图，在四边形 ABCD 中，∠ABC=90°，AB=3，BC=4，CD=10，DA=$5\sqrt{5}$，求 BD 的长



4.解：如图，连接 AC，过点 D 作 $DE\perp BC$ 交 BC 的延长线于点 E.



由题意，可知 $\angle ABC=90°$，$AB=3$，$BC=4$，$\therefore AC=5$.

又$\because CD=10$，$DA=5\sqrt{5}$，$\therefore AC^2+CD^2=AD^2$.

$\therefore \angle ACD=90°$.$\therefore \angle ACB+\angle DCE=90°$.

$\because \angle ACB+\angle BAC=90°$，$\therefore \angle BAC=\angle DCE$.

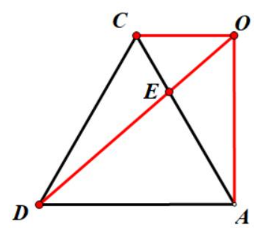
又$\because \angle ABC=\angle DEC=90°$，$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle CED$.

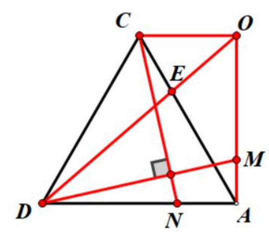
$\therefore \dfrac{AB}{CE}=\dfrac{BC}{DE}=\dfrac{AC}{CD}$，即$\dfrac{3}{CE}=\dfrac{4}{DE}=\dfrac{5}{10}$.解得 $CE=6$，$DE=8$.

$\therefore BE=BC+CE=4+6=10$.

在 $Rt\triangle BDE$ 中，$BD=\sqrt{BE^2+DE^2}=\sqrt{10^2+8^2}=2\sqrt{41}$.

25、如图，Rt△AOC 中，AO⊥OC，∠CAO=30°．





（1）△ADC 为等边三角形，连 OD，交 AC 于 E，求 $\frac{OE}{OD}$

（2）在（1）的条件下，CN⊥DM 交 AD 于 N 点，交 AO 于 M 点，求 $\frac{CN}{DM}$ 的值

（1）∵AO⊥OC，∠CAO=30°，

∴AC=2CO，∠ACO=60°，

∵△ADC为等边三角形，

∴AC=AD=2CO，∠DAC=60°，

∴∠ACO=∠DAC=60°，

∴CO∥AD，

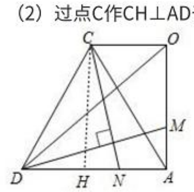
$\therefore \dfrac{CO}{AD}=\dfrac{OE}{DE}=\dfrac{1}{2}$，

∴DE=2OE，

∴DO=DE+OE=3OE，

$\therefore \dfrac{OE}{OD}=\dfrac{1}{3}$；

（2）过点C作CH⊥AD于H，



∵△ADC为等边三角形，CH⊥AD，

∴AH=DH=$\dfrac{1}{2}$AD，CH=$\sqrt{3}$AH，

∵CN⊥DM，OA⊥AD，

∴∠ADM+∠AMD=90°，

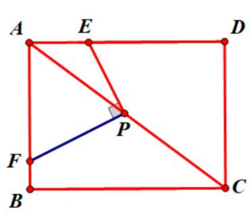
∠ADM+∠DNC=90°，

∴∠DNC=∠AMD，∠CHA=∠DAM=90°，

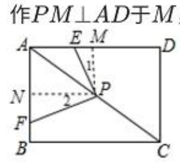
∴△ADM∽△HCN，

$\therefore \dfrac{CN}{DM}=\dfrac{CH}{AD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

26、如图，矩形 ABCD 中，AB=3，BC=4，点 P 为对角线 AC 上一动点，PE⊥PF 分别交 AD、AB 于 E、F，求 $\frac{PE}{PF}$ 的值



作$PM\perp AD$于M，$PN\perp AB$于N，如图，



$\because$四边形$ABCD$为矩形，

$\therefore \angle D=\angle B=90°$，$DC=AB=3$，

$\therefore PM\parallel DC, PN\parallel BC$，

$\therefore \triangle APM\backsim\triangle ACD, \triangle ANP\backsim\triangle ABC$，

$\therefore \dfrac{AP}{AC}=\dfrac{PM}{DC}$，$\dfrac{AP}{AC}=\dfrac{PN}{BC}$，

$\therefore \dfrac{PM}{DC}=\dfrac{PN}{BC}$，

$\therefore \dfrac{PM}{PN}=\dfrac{DC}{BC}=\dfrac{3}{4}$，

$\because PM\parallel DC, PN\parallel BC$，

$\therefore \angle MPN=90°$，即

$\angle 1+\angle EPN=90°$，

$\because PE\perp PF$，

$\therefore \angle EPF=90°$，即$\angle 2+\angle EPN=90°$，

$\therefore \angle 1=\angle 2$，

$\therefore Rt\triangle PME\backsim Rt\triangle PFN$，

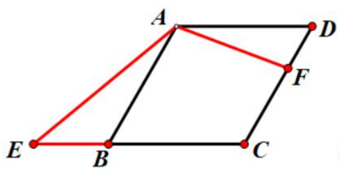
$\therefore \dfrac{PE}{PF}=\dfrac{PM}{PN}=\dfrac{3}{4}$.

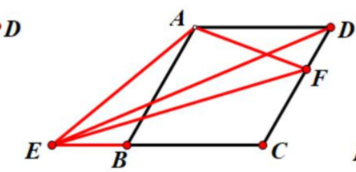
27、如图，菱形 ABCD 中，∠ABC=60°，E 是射线 CB 上一点，F 是 CD 上一点，且∠EAF=120°

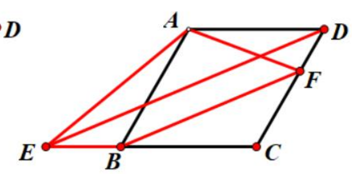
（1）如图 1，求证：$\frac{AE}{AF}=\frac{AB}{CF}$；

（2）如图 2，若△CEF 的面积为$2\sqrt{3}$，求 AB 的长；

（3）如图 3，求证：BF∥DE







1.(1)连 AC，易证△AEC∽△ACF，∴$\frac{AE}{AC}=\frac{AF}{CF}$，又∵AC=AB，∴$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{CF}$，即 $\frac{AE}{AF}=\frac{AB}{CF}$；

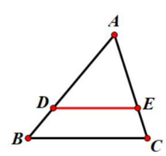
(2)过 F 作 FH⊥EC 交 EC 的延长线于 H，由(1)知$\frac{AE}{AF}=\frac{AB}{CF}$，∴CE·CF=$AC^2$，$\frac{1}{2}CE\cdot\frac{1}{2}CF=2\sqrt{3}$，$CE\cdot CF=8=AC^2$，∴$AC=AB=2\sqrt{2}$；

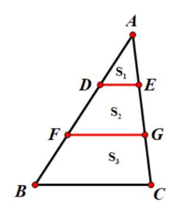
(3)由(1)知$\frac{CE}{BC}=\frac{CD}{CF}$，又∵∠C=∠C，∴△CDF∽△CED，∴∠CBF=∠CED，∴BF∥DE.

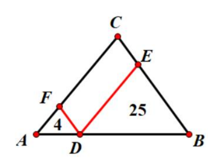
28、（1）如图 1，已知 DE∥BC，DE 平分△ABC 的面积，直接写出 AD：BD= __________ .

（2）如图，已知 DE∥FG∥BC，点 D、F 是线段 AB 的三等分点，记△ADE、四边形 DFGE 和四边形 FBCG 的面积分别为 S_1、S_2、S_3，求 S_1：S_2：S_3 的比值；

（3）如图 3，已知 D、E、F 分别位于△ABC 的三边上，且四边形 CEDF 为平行四边形，△ADF 和△BDE 的面积分别为 4 和 25，求四边形 CEDF 的面积







(1) ∵ $DE\parallel BC$，

∴ $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，

∵ DE平分$\triangle ABC$的面积，

∴ $\frac{AD}{AB}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴ $\frac{AD}{BD}=\frac{AD}{AB-AD}=\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

$=\left(\sqrt{2}+1\right):1$

.

故答案为：$\left(\sqrt{2}+1\right):1$；

(2) ∵点D、F是线段AB的三等分点，

∴ $DE\parallel FG\parallel BC$，

$AD:AF:AB=1:2:3$，

∴ $\triangle ADE\backsim\triangle AFG\backsim\triangle ABC$，

∴ $S_{\triangle ADE}:S_{\triangle AFG}:S_{\triangle ABC}=1:4:9$，

∴ $S_1:S_2:S_3=1:3:5$.

(3) 连接CD，

∵四边形$CEDF$为平行四边形，

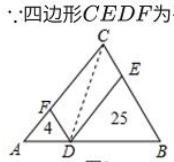


图3

∴ $DE\parallel AC$, $DF\parallel BC$，

∴ $\angle A=\angle BDE$，$\angle AFD=\angle DEB$，

∴ $\triangle AFD\backsim\triangle DEB$，

∵ $\triangle ADF$和$\triangle BDE$的面积分别为4和25，

∴ $\frac{DF}{BE}=\sqrt{\frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle BDE}}}=\sqrt{\frac{4}{25}}=\frac{2}{5}=\frac{CE}{BE}$

，

∴ $\frac{S_{\triangle CED}}{S_{\triangle DEB}}=\frac{2}{5}$，

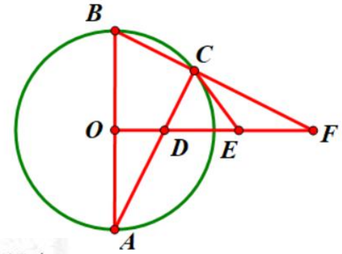
∴ $S_{\triangle CED}=25\times\frac{2}{5}=10$

∴ $S_{四边形CEDF}=2\times S_{\triangle CED}=20$.

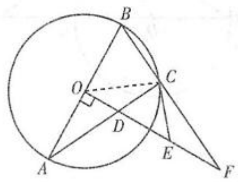
29、如图，△ABC 内接于⊙O，AB 为直径，作 OD⊥AB 交 AC 于点 D，延长 BC，OD 交于点 F，过点 C 作⊙O 的切线 CE，交 OF 于点 E

（1）求证：EC=ED

（2）若 OA=4，EF=3，求 AC 的长



解：(1)证明：如图，连接 OC，



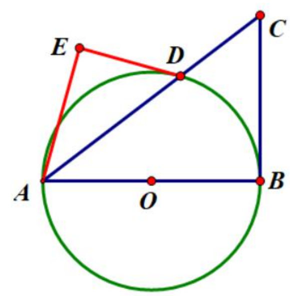
$\because CE$ 与⊙O 相切，OC 是⊙O 的半径，$\therefore OC\perp CE$，$\therefore \angle OCA+\angle ACE=90°$，$\because OA=OC$，$\therefore \angle A=\angle OCA$，$\therefore \angle ACE+\angle A=90°$，$\because OD\perp AB$，$\therefore \angle ODA+\angle A=90°$，$\because \angle ODA=\angle CDE$，$\therefore \angle CDE+\angle A=90°$，$\therefore \angle CDE=\angle ACE$，$\therefore EC=ED$；

(2)$\because AB$ 为⊙O 的直径，$\therefore \angle ACB=90°$，在 Rt△$DCF$ 中，$\angle DCE+\angle ECF=90°$，$\angle DCE=\angle CDE$，$\therefore \angle CDE+\angle ECF=90°$，$\because \angle CDE+\angle F=90°$，$\therefore \angle ECF=\angle F$，$\therefore EC=EF$，$\because EF=3$，$\therefore EC=DE=3$，$\therefore OE=\sqrt{OC^2+EC^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$，$\therefore OD=OE-DE=2$，在 Rt△$OAD$ 中，$AD=\sqrt{OA^2+OD^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，在 Rt△$AOD$ 和 Rt△ACB 中，$\because \angle A=\angle A$，$\angle ACB=\angle AOD$，$\therefore$ Rt△AOD∽Rt△ACB，$\therefore \frac{OA}{AC}=\frac{AD}{AB}$，即 $\frac{4}{AC}=\frac{2\sqrt{5}}{8}$，$\therefore AC=\frac{16\sqrt{5}}{5}$.

30、（2020・武汉）如图在 Rt△ABC 中，∠ABC=90°，以 AB 为直径的⊙O 交 AC 于点 D，AE 与过点 D 的切线互相垂直，垂足为 E

（1）求证： AD 平分∠BAE;

（2）若 CD=DE，求 sin∠BAC 的值



解：(1)证明：如图(1)，连接 OD，

$\because OA=OD$，

$\therefore \angle OAD=\angle ODA$.

$\because DE$ 是⊙O 的切线，

$\therefore OD\perp DE$.

$\because AE\perp DE$，

$\therefore \angle AED+\angle EDO=180°$，

$\therefore AE/\!/OD$.

$\therefore \angle EAD=\angle ODA$.

$\therefore \angle EAD=\angle OAD$，

$\therefore AD$ 平分$\angle EAB$.

(2)解：如图(1)，连接 BD.

设 $CD=a$，$BC=b$.

$\because AB$ 为⊙O 的直径，$AE\perp DE$，

$\therefore \angle BDC=\angle E=90$.

$\because \angle ABC=90°$，AD 平分$\angle EAB$，

$\therefore \angle CBD=\angle BAD=\angle DAE$.

又$\because CD=DE$，

$\therefore \triangle CDB\cong\triangle DEA$，

$\therefore AD=BC=b$.

$\because \angle CDB=\angle CBA=90°$，

$\angle C$ 公共，

$\therefore \triangle CDB\backsim\triangle CBA$，

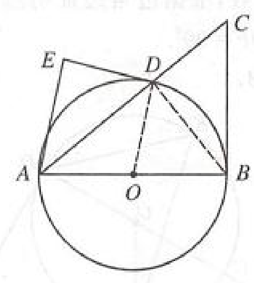
$\therefore CB^2=CD\cdot CA$，

即 $b^2=a(a+b)$.

$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a}{b}-1=0$.

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$或$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$(舍去负值).

$\therefore \sin\angle BAC=\sin\angle CBD=\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

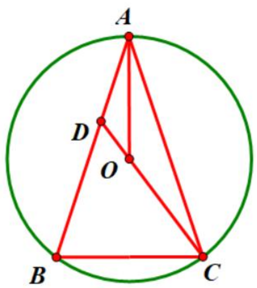


图(1)

31、如图，△ABC 内接于⊙O，AB=AC，CO 的延长线交 AB 于 D

（1）求证：AO⊥BC

（2）若 BC=6，AB=$3\sqrt{10}$，求 $\frac{AD}{BD}$ 的值



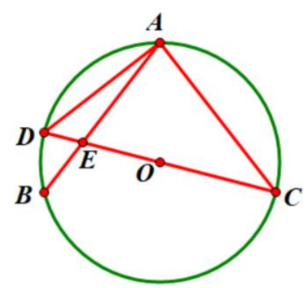
1.(1)略；

(2)∵$BE=CE=3$，∴$AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=9$，设 $OA=OB=R$，则 $R^2=3^2+(9-R)^2$，$R=5$，∴$OE=4$，∴$BF=2OE=8$，∴$\frac{AD}{BD}=\frac{OA}{BF}=\frac{5}{8}$.

32、如图，CD 为⊙O 的直径，AB、AC 为弦，且∠ADC=∠DAB+∠ACD，AB 交 CD 于 E

（1）求证：AB=AC

（2）若 DE=2，CE=10，求 AC 的长



解法 1、DEB 和 OEA 相似，相似比 1:2

BE*EA=DE*EC，设 BE=x，x*2x=2*10，AC=$3\sqrt{10}$

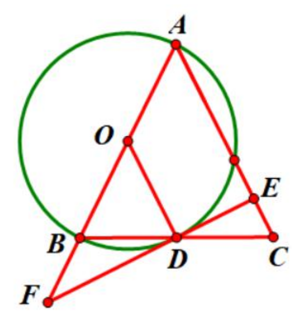
解法 2、等腰图，双勾股

33、在矩形 ABCD 中，AB=6，BC=8，点 O 在对角线 AC 上，⊙O 的半径为 2，如果⊙O 与矩形 ABCD 各边都没有公共点，那么线段 AO 长的取值范围是___$\frac{10}{3}<AO<\frac{20}{3}$___.

34、如图，在△ABC 中，AB=AC，以 AB 为直径作⊙O 交 BC 于点 D，过点 D 作⊙O 的切线 DE 交 AC 于点 E，交 AB 的延长线于点 F

（1）求证：DE⊥AC；

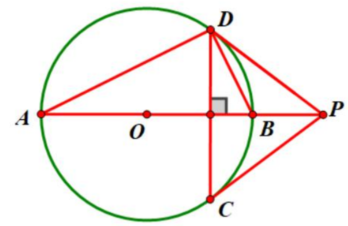
（2）若 AB=10，AE=8，求 DF 的长



【解析】（1）略

（2）$\frac{3}{5}=\frac{4}{DF}$，DF=$\frac{20}{3}$

35、如图，⊙O 的直径 AB 垂直于弦 CD，过点 C 的切线与直径 AB 的延长线相交于点 P，连接 PD，若 PD=4，$\tan\angle CDB=\frac{1}{2}$，求直径 AB 的长

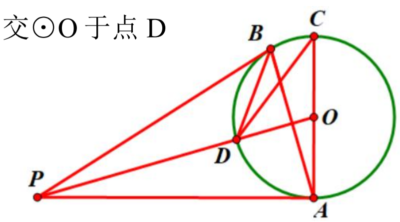


【解析】切割穿心图、子母形相似

tan 值为相似比，$\therefore PB=\frac{1}{2}PD=2$

AB=4×2-2=6

36、如图，AC 为⊙O 的直径，PA、PB 为⊙O 的切线，A、B 为切点，PO 交⊙O 于点 D

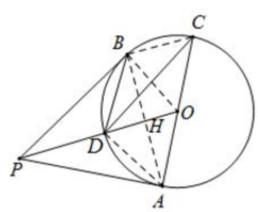


（1）求证：点 D 为△PAB 的内心

（2）若 sin∠CDB=$\frac{7}{25}$，求 cos∠PBD 的大小

（3）若 sin∠CDB=$\frac{7}{25}$，求 cos∠PBD 的大小

(1) 如图，连AB,AD,OB,BC,AB交OP于H，



$\because PA,PB$都是⊙O的切线，

$\therefore OA\perp PA,OB\perp PB,OA=OB$，

$\therefore \angle PAO=\angle PBO=90°$，

$\because OP=OP,PA=PB$，

$\therefore \triangle PAO\cong\triangle PBO$，

$\therefore \angle APO=\angle BPO$，即$OP$平分$\angle APB$，

$\therefore OP\perp AB,AH=BH$，即$OP$是线段$AB$的垂直平分线，

$\therefore AD=BD$，

$\therefore \angle ACD=\angle BAD$，

$\because AC$是⊙O是直径，

$\therefore \angle ADC=90°$，

$\therefore \angle PAD+\angle DAC=\angle ACD+\angle DAC=90°$，

$\therefore \angle PAD=\angle ACD$，

$\therefore \angle PAD=\angle BAD$.即$AD$平分$\angle PAB$，

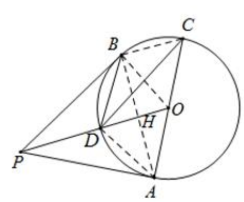
$\because$三角形的三条角平分线相交于同一点，

$\therefore BD$平分$\angle PBA$，

即点D是$\triangle PAB$的三条角平分线的交点，

$\therefore$点D是$\triangle PAB$的内心.

(2) 如图，



$\because \angle CDB=\angle BAC$，

$\therefore \sin\angle CDB=\sin\angle BAC=\frac{BC}{AC}=\frac{7}{25}$，

设$BC=7x$，则$AC=25x$，

$\therefore AB=\sqrt{(25x)^2-(7x)^2}=24x$，

$\therefore BH=AH=12x$，

$\because \angle ABC=\angle AHO=90°$，

$\therefore OH\parallel BC$，

$\because OC=OA,BH=AH$，

$\therefore OH$是$\triangle ABC$的中位线，

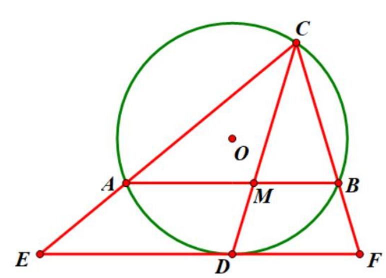
$\therefore OH=\frac{7}{2}x$，

$\therefore DH=OD-OH=\frac{25}{2}x-\frac{7}{2}x=9x$，

$\therefore BD=\sqrt{(9x)^2+(12x)^2}=15x$，

$\therefore \cos\angle PBD=\cos\angle ABD=\frac{BH}{BD}=\frac{12x}{15x}=\frac{4}{5}$.

37、如图，⊙O 为△ABC 的外接圆，CD 平分∠ACB，交⊙O 于 D，过 D 作 EF∥AB，交 CA，CB 的延长线于 E，F，CD 交 AB 于点 M



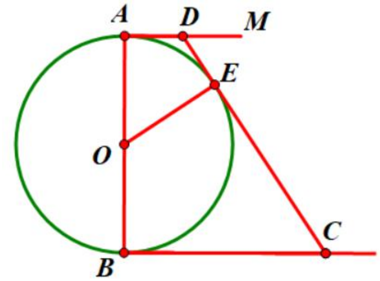
（1）求证：EF 为⊙O 的切线

（2）若 DM·DC=9，tan∠ACB=$\frac{12}{5}$，求⊙O 的半径

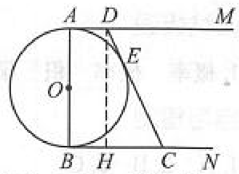
(1)略.(2)易证$\triangle BDM\backsim\triangle CDB$，$\therefore BD^2=DM\cdot DC$，$\therefore BD=3$.连 OB、OD，则 $\tan\angle ACB=\tan\angle DOB=\frac{12}{5}$.设 OD 交 AB 于 H，设 $BH=12x,OH=5x,R=13x$，$\therefore (8x)^2+(12x)^2=3^2$，$\therefore x=\frac{3}{4\sqrt{13}}=\frac{3}{52}\sqrt{13}$，$\therefore R=13x=\frac{3}{4}\sqrt{13}$.

微专题——比例式含系数问题

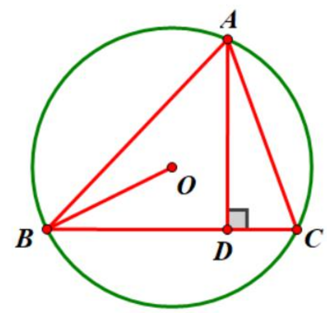
1、如图，AB 是⊙O 的直径，AM 和 BN 是⊙O 的两条切线，DC 与⊙O 相切于点 E，分别交 AM、BN 于 D、C 两点，求证：$AB^2=4AD\cdot BC$



如图，过点 D 作 $DH\perp BC$，H 为垂足，∵ AD，BC，CD 是⊙O 的切线，∴ $OA\perp AD$，$OB\perp BC$，$AD=ED$，$BC=EC$，∴四边形 $ABHD$ 是矩形，∴ $AB=DH$，$AD=BH$. 在 Rt△CDH 中，$DH^2=CD^2-CH^2$，∴ $AB^2=(AD+BC)^2-(BC-AD)^2$，∴ $AB^2=4AD\cdot BC$.

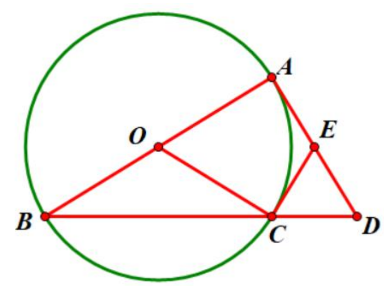


2、如图，△ABC 内接于⊙O，AD 是△ABC 的高，连接 OB. 求证：$AB\cdot AC=2AD\cdot OB$



【解析】作直径 BE，连接 EA，证明相似即可

3、如图，AB 是⊙O 的直径，BC 为⊙O 的弦，过点 A 作⊙O 的切线交 BC 的延长线于点 D，过点 C 作⊙O 切线交 AD 于点 E. 求证：$BD\cdot CD=4CE^2$



【解析】连接 AC，$DC\cdot DB=DA^2$

$DA=2CE$，即可

4、（2021 洪山区 3 月月考）如图，矩形 ABCD 中，E、F、G 分别为边 AD、AB、BC 上的点，且 AF=4，BF=3，$\dfrac{EG}{GF}=\dfrac{5}{3}$，∠EFG=135°，求线段 AE 的长

解：$5\sqrt{2}-4$．提示：延长 GF，DA 交于点 H，则 $\dfrac{FG}{FH}=\dfrac{3}{4}$．

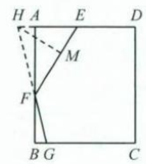
又 $\dfrac{EF}{GF}=\dfrac{5}{3}$，设 $FG=3k$，则 $HF=4k$，$FE=5k$．

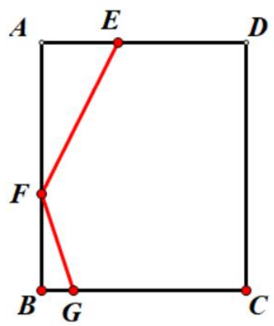
作 $HM\perp EF$ 于点 M，则△HFM 是等腰直角三角形，

$FM=HM=2\sqrt{2}k$，用"面积法"易求得 $HE=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}k^2$．

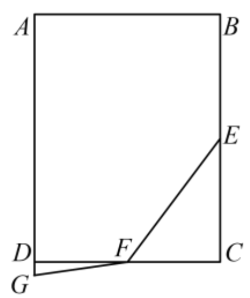
在 Rt△HME 中，根据勾股定理求得 $k^2=\dfrac{2}{25}(41-20\sqrt{2})$．

在 Rt△AEF 中，根据勾股定理得 $AE=5\sqrt{2}-4$．





第 4 题图



第 5 题图

5、如右图，矩形 *ABCD* 的长 *AB*=6，宽 *AD*=8，点 *E*、*F* 分别为 *BC*、*CD* 的中点，点 *G* 在线段 *AD* 的延长线上，且∠*GFE*=135°，则线段 *GF* 的长度为________．

解析

如图延长 EF 交 AD 的延长线于点 H，作 GM⊥EF 于点 M．

∵F 是 DC 的中点．∴ DF=FC

∵ AD∥BC ∴ ∠HDF=∠FCE

又∵∠DFH=∠EFC ∴△DFH≌△CFE

∴DH=EC=$\frac{1}{2}$BC=4．

DF=$\frac{1}{2}$DC=3

∴ HF=5．

∵∠GFE=135° ∴∠GFM=45°

设 MF=x ∴ GM=x．

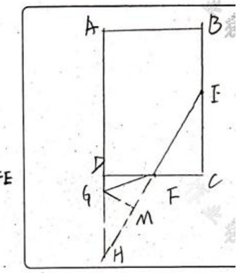
∵△GHM∽△FHD

∴ $\frac{x}{3}=\frac{5-x}{4}$ → $\frac{GM}{DF}=\frac{HM}{HD}$．

∴ x=GM=$\frac{15}{7}$

∴ GF=$\frac{15}{7}\sqrt{2}$

故填：$\frac{15}{7}\sqrt{2}$．

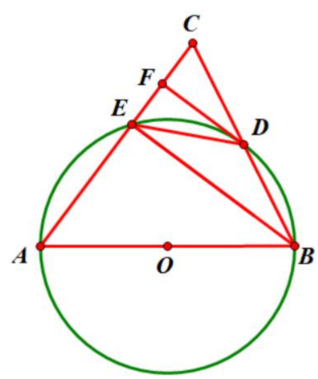


6、（2021 洪山区 3 月月考）如图在△ABC 中，AB=AC，以 AB 为直径的⊙O 与边 BC 交于点 D，与边 AC 交于点 E，过 D 作 DF⊥AC 于点 F

（1）求证：DF 为⊙O 的切线

（2）若 DE=$\sqrt{5}$，AB=5，求 AE 的长

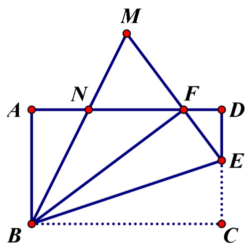
（用 2 种方法求解：①反 A 相似 ②等积法+勾股定理）

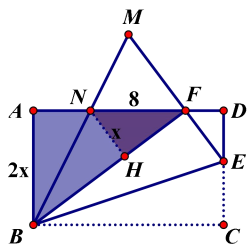


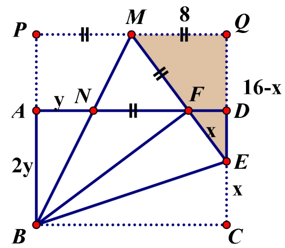
1.（1）连 OD，∴$\angle C=\angle B=\angle ODB$，∴$OD\parallel AC$．∴$OD\perp DF$，∴$DF$ 为⊙O 的切线．

（2）连 AD，∴$AD\perp BC$，∴$\angle CAD=\angle BAD$，∴$DE=BD=CD=\sqrt{5}$，$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=2\sqrt{5}$，∵$AC\cdot DF=AD\cdot CD$，∴$DF=2$，∴$CF=1$．∵$DE=CD$，$DF\perp CE$，∴$EF=CF=1$，∴$AE=3$．

7、如图，在矩形 ABCD 中，BC=16，E 为 CD 上一点，将△BCE 沿 BE 折叠，使点 C 正好落在 AD 边上的 F 处，作∠ABF 的平分线交 AD 于 N，交 EF 于 M，若 NF=$\frac{1}{2}$BC，则 AB 的长为_______.





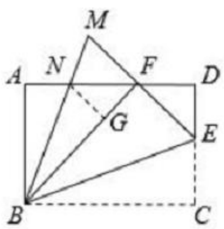


答案：9.6

解：∵将△BCE 沿 BE 折叠得△BFE，

∴$BC=BF$，

如图示，过点 N 作 $NG\perp BF$ 交 BF 于点 G，



∵AN 是∠ABF 的平分线

∴$AN=NG$，

又∵$S_{\triangle NFB}=\frac{1}{2}BF\cdot NG=\frac{1}{2}NF\cdot AB$，$NF=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times 16=8$，

可得：$BF\cdot AN=\frac{1}{2}BC\cdot AB$，即 $AN=\frac{1}{2}AB$，

设 $AB=2x$，则 $AN=x$，$AF=AN+NF=x+8$，

在 $Rt\triangle ABF$ 中，$AB^2+AF^2=BF^2$，

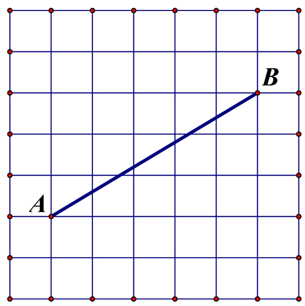
即：$(2x)^2+(x+8)^2=16^2$，

解之得：$x=\frac{24}{5}$，负值已舍去，

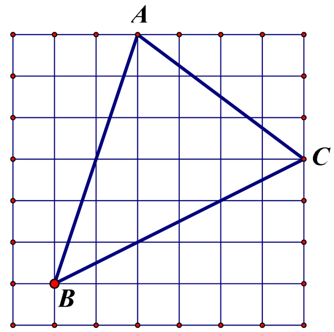
∴$AB=\frac{48}{5}$，

基本作图——作线段的分点

1、如图，A、B 均是小正方形的顶点，用无刻度直尺画图：在 AC 上画点 C，使 AC:CB=2:5



第 1 题图



第 2 题图

2、如图，A、B、C 均是小正方形的顶点，用无刻度直尺画图：在 AB 上画点 D，使 AD:DB=2:3，并过 D 点作 BC 的平行线，交 AC 于 E