28.1 锐角三角函数 28.2 解直角三角形及其应用

【学习任务】

1、掌握四种三角函数的定义，熟记特殊角的三角函数值.

2、掌握直角三角形的边角关系的计算.

3、会运用三角函数知识解决与直角三角形有关的实际问题.

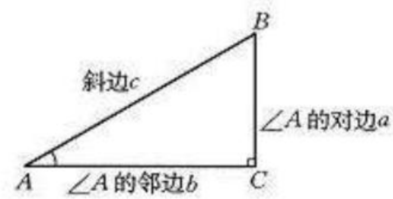
【知识梳理】

锐角∠A 的正弦（sin），余弦（cos）和正切（tan）叫做∠A 的锐角三角函数。

正弦（sin）等于对边比斜边；sinA=a/c

余弦（cos）等于邻边比斜边；cosA=b/c

正切（tan）等于对边比邻边；tanA=a/b



锐角三角函数值的定义方法是在直角三角形中定义的，所以求锐角的三角函数值，都是通过构造直角三角形来完成的，即把这个角放到某个直角三角形中。

特殊角的三角函数值

三角函数 \ 锐角α	30°	45°	60°
sin α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

锐角三角函数值的符号及其变化规律

1）锐角三角函数值都是正值。

2）当角度在 0~90° 间变化时，正弦值随着角度的增大（或减小）而增大（或减小）；余弦值随着角度的增大（或减小）而减小（或增大）；正切值随着角度的增大（或减小）而增大（或减小）；

同角三角函数基本关系式

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

互为余角的三角函数间的关系

$$\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)\quad \cos\alpha=\sin(90°-\alpha)\quad \tan\alpha\bullet\tan(90°-\alpha)=1$$

解直角三角形

在直角三角形中，由已知元素（直角除外）求出其余未知元素的过程，叫做**解直角三角形**.

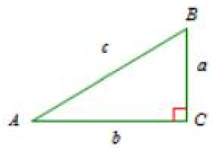
如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C$ 为直角，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 所对的边分别为 a，b，c，那么除直角 C 外的 5 个元素之间有如下关系：

① 三边之间的关系：$a^2+b^2=c^2$（勾股定理）；

② 两锐角之间的关系：$\angle A+\angle B=90°$；

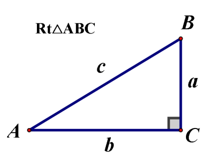
③ 边角之间的关系：$\sin A=\frac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c}$，$\cos A=\frac{\angle A\text{的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{b}{c}$，$\tan A=\frac{\angle A\text{的对边}}{\angle A\text{的邻边}}=\frac{a}{b}$

.



利用这些关系，知道其中 2 个元素（至少有一个是边），就可以求出其余 3 个未知元素.

二、解直角三角形的类型和解法

<table>
<tr><td>已知和解法
三角形类型</td><td colspan="3">已知条件</td><td>解法步骤</td></tr>
<tr><td rowspan="5"></td><td rowspan="2">两边</td><td colspan="2">两直角边（如 a，b）</td><td>由 $\tan A=\frac{a}{b}$，求∠A
$\angle B=90°-\angle A$；$c=\sqrt{a^2+b^2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">斜边、一直角边（如 c，a）</td><td>由 $\sin A=\frac{a}{c}$，求∠A
$\angle B=90°-\angle A$；$b=\sqrt{c^2-a^2}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">一边一角</td><td rowspan="2">一直角边和一锐角</td><td>锐角，邻边（如∠A，b）</td><td>$\angle B=90°-\angle A$；$a=b\cdot\tan A$
$c=\frac{b}{\cos A}$</td></tr>
<tr><td>锐角，对边（如∠A，a）</td><td>$\angle B=90°-\angle A$；$b=\frac{a}{\tan A}$；　$c=\frac{a}{\sin A}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">斜边，锐角（如 c，∠A）</td><td>$\angle B=90°-\angle A$；$a=c\cdot\sin A$；　$b=c\cdot\cos A$</td></tr>
</table>

解直角三角形的实际应用问题的一般步骤

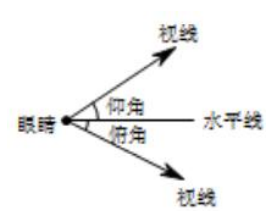
① 弄清题中的名词、术语的意义，如仰角、俯角、坡度、坡角、方位角等概念，然后根据题意画出几何图形，建立数学模型；

② 将实际问题中的数量关系归结为解直角三角形中元素之间的关系，当有些图形不是直角三角形时，可添加适当的辅助线，把它们分割成直角三角形或矩形；

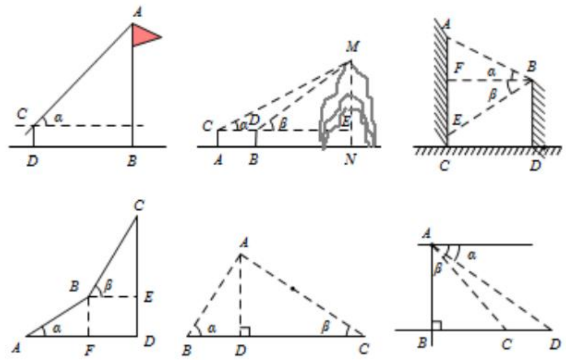
③ 寻找基础直角三角形，并解这个三角形.

仰角、俯角

视线与水平线所成的角中，视线在水平线上方的叫做**仰角**，在水平线下方的叫做**俯角**，如图

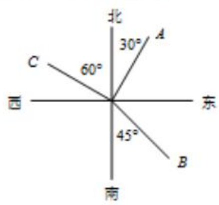


仰角、俯角常见图形如图，其解题策略为：从仰角、俯角入手建立它们所在的直角三角形，利用三角函数求出物体的高．

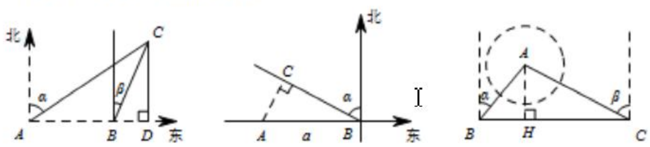


方向角

指北或指南方向线与目标方向线所成的小于 $90°$ 的水平角，叫做**方向角**．如图，目标方向线 OA，OB，OC 的方向角分别可以表示为北偏东 $30°$，南偏东 $45°$，北偏西 $60°$，其中南偏东 $45°$ 习惯上叫做东南方向，北偏东 $45°$ 习惯上又叫做东北方向，北偏西 $45°$ 习惯上叫做西北方向，南偏西 $45°$ 习惯上又叫做西南方向．

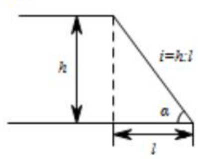


方向角常见图形如图，其解题策略为：添加垂线段，构造直角三角形，利用垂线段做“桥梁”解直角三角形，从而解决实际问题．

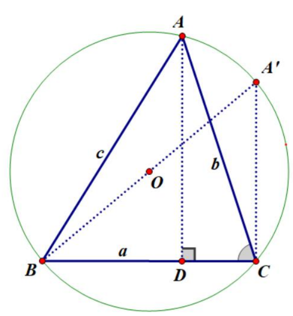


坡度

坡面与水平面的夹角叫做**坡角**，常用字母 α 或 β 表示．坡度（坡比）：坡面的铅直高度 h 和水平距离 l 的比叫做**坡度**，一般用字母 i 来表示，则 $i=\dfrac{h}{l}=\tan\alpha$，实际运用中，常记为 $i=h:l$ 的形式．



正弦定理及面积公式



正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2r$

面积公式：$S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A$

【同步讲练】

一、选择题

1. 已知在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=3$，$BC=4$，则 $\tan A$ 的值为（　　）

A. $\dfrac{3}{4}$　　B. $\dfrac{4}{3}$　　C. $\dfrac{3}{5}$　　D. $\dfrac{4}{5}$

2. 已知在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$BC=5$，那么 AB 的长为（　　）

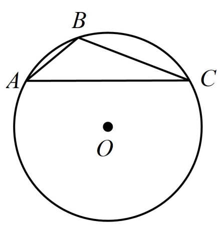
A. $5\sin A$　　B. $5\cos A$　　C. $\dfrac{5}{\sin A}$　　D. $\dfrac{5}{\cos A}$

3. 如果某人沿坡度为 $1:3$ 的斜坡向上行走 a 米，那么他上升的高度为（　　）

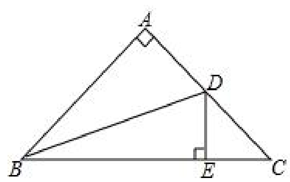
A. $\dfrac{\sqrt{10}}{10}a$ 米　　B. $\sqrt{10}a$ 米　　C. $\dfrac{a}{3}$ 米　　D. $3a$ 米

4. 如图，在 $\odot O$ 中，弦 $AC=2\sqrt{3}\ \mathrm{cm}$，$C$ 为 $\odot O$ 上一点，且 $\angle ABC=120^\circ$，则 $\odot O$ 的直径为（　　）

A. $2\ \mathrm{cm}$　　B. $4\sqrt{3}\ \mathrm{cm}$　　C. $4\ \mathrm{cm}$　　D. $6\ \mathrm{cm}$



第 4 题图



第 8 题图

5. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$BC=1$，$AB=2$，则下列结论正确的是（　　）

A. $\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\tan A=\dfrac{1}{2}$　　C. $\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\tan B=\sqrt{3}$

6. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\left|\cos A-\dfrac{1}{2}\right|+(1-\tan B)^2=0$，则 $\angle C$ 的度数是（　　）

A. 45°　　B. 60°　　C. 75°　　D. 105°

7. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC=13$，$BC=24$，则 $\tan B$ 等于（　　）

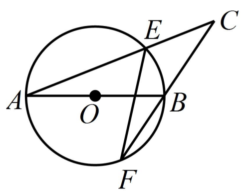
A. $\dfrac{5}{13}$　　B. $\dfrac{5}{12}$　　C. $\dfrac{12}{13}$　　D. $\dfrac{12}{5}$

8. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=AC$，点 D 为边 AC 的中点，$DE\perp BC$ 于点 E，连接 BD，则 $\tan\angle DBC$ 的值为（　　）

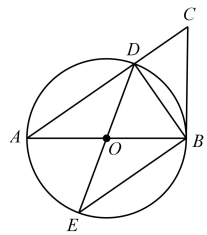
A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\sqrt{2}-1$　　C. $2-\sqrt{3}$　　D. $\dfrac{1}{4}$

9. 如图，$\odot O$ 的直径 $AB=6$，点 C 为 $\odot O$ 外一点，CA，CB 分别交 $\odot O$ 于 E，F，$\cos C=\frac{2}{3}$，则 EF 的长为(　　)

A. 3　　　　B. 2　　　　C. 1.5　　　　D. 4



第 9 题图



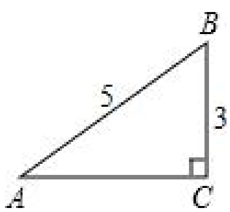
第 10 题图

10. Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90°$，以 AB 为直径作 $\odot O$ 交 AC 于 D，作直径 DE，连接 BE，若 $\sin\angle ACB=\frac{4}{5}$，$BC=6$，则 $BE=$（　　）

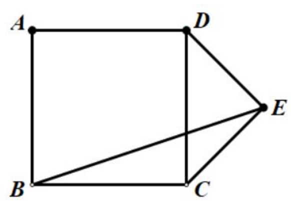
A. 6　　　　B. $\frac{32}{5}$　　　　C. $\frac{24}{5}$　　　　D. 8

二、填空题

11. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AB=5$，$BC=3$，则 $\sin A=$ ________.



第 11 题图



第 16 题图

12. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90$，$\tan A=\frac{3}{4}$，$AC=12$，则 $BC=$ ________.

13. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，AD 是 BC 边上的中线，如果 AD=2 BC，那么 $\cos\angle CAD$ 的值是________.

14. 已知一条斜坡，向上前进 5 米，水平高度升高了 4 米，那么坡比为________.

15. 如果斜坡的坡度 $i=1:3$，斜坡的高 $h=4$ m，那么斜坡的长为________ m.

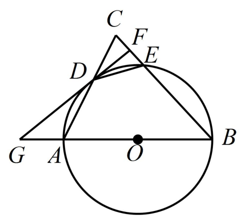
16. 如图，在正方形 $ABCD$ 外作等腰直角 $\triangle CDE$，$DE=CE$，连接 BE，则 $\tan\angle EBC=$ ________.

三、解答题

17. 如图，以 AB 为直径的 $\odot O$ 交 $\triangle ABC$ 的边 AC 于 D，BC 于 E，过 D 作 $\odot O$ 的切线交 BC 于 F，交 BA 延长线于 G，且 $DF \perp BC$．

（1）求证：$BA = BC$；

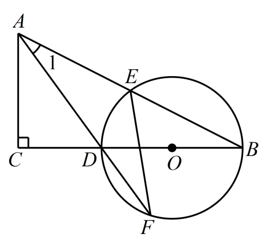
（2）若 $AG = 2$，$\cos B = \dfrac{3}{5}$，求 DE 的长.



18. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，D 是 BC 边上一点，以 DB 为直径的 $\odot$O经过 AB 的中点 E，交 AD 的延长线于点 F，连接 EF.

（1）求证：$\angle 1 = \angle F$．

（2）若 $\sin B = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$EF = 2\sqrt{5}$，求 CD 的长.



28.1 锐角三角函数 28.2 解直角三角形及其应用 答案

第一部分

1. B　2. C　【解析】$\because \mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$BC=5$，$\therefore \sin A=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{5}{AB}$．$\therefore AB=\dfrac{5}{\sin A}$．3. A　4. C　5. D　6. C　7. B　【解析】由题意得 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，过 A 点作 BC 的垂线与 BC 交于点 D，则 $BD=12$，$\triangle ADB$ 为直角三角形，根据勾股定理得：$AD=5$，则 $\tan B=\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{5}{12}$．8. A　【解析】$\because AB=AC$，$\angle A=90^\circ$，

$\therefore \angle ABC=\angle C=45^\circ$，$BC=\sqrt{2}AC$．$\because$ 点 D 为边 AC 的中点，$\therefore AD=CD=\dfrac{1}{2}AC$．

$\because DE\perp BC$ 于点 E，$\therefore DE=EC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}DC=\dfrac{\sqrt{2}}{4}AC$，

$$\therefore \tan\angle DBC=\frac{DE}{BE}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}AC}{\sqrt{2}AC-\frac{\sqrt{2}}{4}AC}=\frac{1}{3}.$$

9. D　10. B

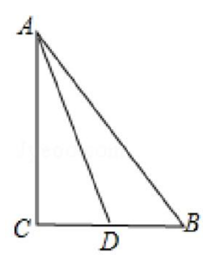
第二部分

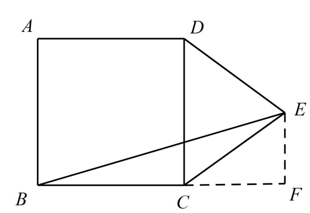
11. $\dfrac{3}{5}$　【解析】$\because \angle C=90^\circ$，$AB=5$，$BC=3$，$\therefore \sin A=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{3}{5}$．

12. 9　13. $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$　【解析】设 $CD=a$，$\because AD$ 是 BC 边上的中线，$\therefore BC=2CD=2a$，

$\therefore AD=2BC=4a$，由勾股定理得，$AC=\sqrt{AD^2-CD^2}=\sqrt{15}a$，

$\therefore \cos\angle CAD=\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{\sqrt{15}a}{4a}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$．





14. $1:\dfrac{3}{4}$　15. $4\sqrt{10}$　16. $\dfrac{1}{3}$

【解析】作 $EF\perp BC$ 于 F，如图，设 $DE=CE=a$，

$\because$ $\triangle CDE$ 为等腰直角三角形，

$\therefore$ $CD=\sqrt{2}CE=\sqrt{2}a$，$\angle DCE=45^\circ$，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，$\therefore$ $CB=CD=\sqrt{2}a$，$\angle BCD=90^\circ$，$\therefore$ $\angle ECF=45^\circ$，

$\therefore$ $\triangle CEF$ 为等腰直角三角形，$\therefore$ $CF=EF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}CE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle BEF$ 中，$\tan\angle EBF=\dfrac{EF}{BF}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{2}a+\frac{\sqrt{2}}{2}a}=\dfrac{1}{3}$，即 $\angle EBC=\dfrac{1}{3}$．

17.（1）连接 OD，如图 1，$\because DF$ 为切线，$\therefore OD \perp DF$，$\because DF \perp BC$，$\therefore OD \parallel BC$，$\therefore \angle ODA = \angle C$，

而 $OA = OD$，$\therefore \angle ODA = \angle OAD$，$\therefore \angle OAD = \angle C$，$\therefore BA = BC$．

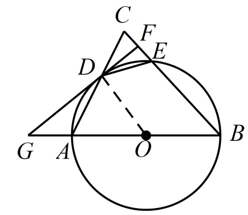


图1

（2）作 $DH \perp AB$ 于 H，如图 2，设 $\odot O$ 的半径为 r，$\because OD \parallel BC$，

$\therefore \angle B = \angle DOG$，$\therefore \cos\angle DOG = \cos B = \frac{3}{5}$，在 $Rt\triangle ODG$ 中，

$\because \cos\angle DOG = \frac{OD}{OG}$，即 $\frac{r}{r+2} = \frac{3}{5}$，$\therefore r = 3$，在 $Rt\triangle ODH$ 中，

$\because \cos\angle DOH = \frac{OH}{OD} = \frac{3}{5}$，$\therefore OH = \frac{9}{5}$，$\therefore DH = \frac{12}{5}$，

$\because OH = \frac{9}{5}$，$\therefore AH = 3 - \frac{9}{5} = \frac{6}{5}$，在 $Rt\triangle ADH$ 中，

$AD = \sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$，$\because \angle DEC = \angle C$，

$\therefore DE = DC$，而 $OA = OB$，$OD \parallel BC$，$\therefore AD = CD$，

$\therefore DE = AD = \frac{6\sqrt{5}}{5}$．

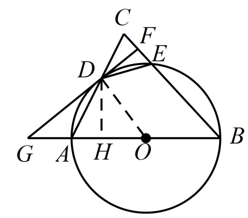


图2

18.（1）连接 DE．$\because BD$ 是 $\odot O$ 的直径，$\therefore \angle DEB = 90^\circ$．$\because E$ 是 AB 的中点，

$\therefore DA = DB$．$\therefore \angle 1 = \angle B$．$\because \angle B = \angle F$，$\therefore \angle 1 = \angle F$．

（2）$\because \angle 1 = \angle F$，$\therefore AE = EF = 2\sqrt{5}$，$\therefore AB = 2AE = 4\sqrt{5}$．

在 $Rt\triangle ABC$ 中，$AC = AB \cdot \sin B = 4$，$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 8$．

设 $CD = x$，则 $AD = BD = 8 - x$．

由勾股定理，得 $AC^2 + CD^2 = AD^2$，即 $4^2 + x^2 = (8-x)^2$．

解得 $x = 3$．$\therefore CD = 3$．