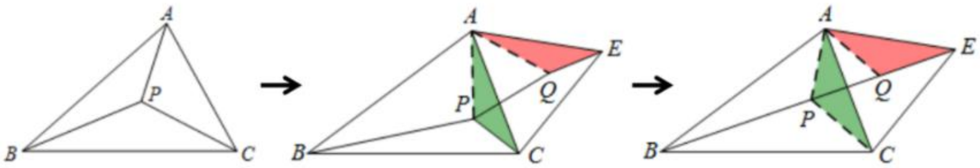
几何模型：费马点

费马点的定义：数学上称，到三角形 3 个顶点距离之和最小的点为费马点。
它是这样确定的：
1.如果三角形有一个内角大于或等于 120°，这个内角的顶点就是费马点；
2.如果 3 个内角均小于 120°，则在三角形内部对 3 边张角均为 120°的点，是三角形的费马点。
费马点的性质：费马点有如下主要性质：
1.费马点到三角形三个顶点距离之和最小。
2.费马点连接三顶点所成的三夹角皆为 120°。

费马点最小值快速求解：
费马问题告诉我们，存在这么一个点到三个定点的距离的和最小，解决问题的方法是运用旋转变换.

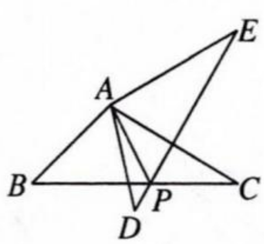
解题方法：以△ABC 任意一边为边向外作等边三角形，这条边所对两顶点的距离即为最小值



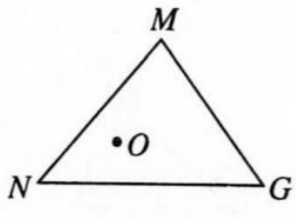
BP+AP+CP=BP+PQ+QE≥BE

例题：（2019 武汉中考）问题背景：如图 1，将△*ABC* 绕点 *A* 逆时针旋转 60°得到△*ADE*，*DE* 与 *BC* 交于点 *P*，可推出结论：*PA*+*PC*＝*PE*.

问题解决：如图 2，在△*MNG* 中，*MN*＝6，∠*M*＝75°，*MG*=$4\sqrt{2}$. 点 *O* 是△*MNG* 内一点，则点 *O* 到△*MNG* 三个顶点的距离和的最小值是_______. $2\sqrt{29}$



图（1）



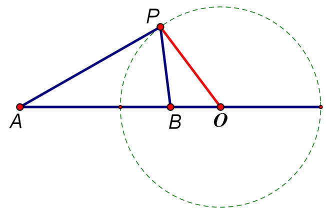
图（2）

几何模型：阿氏圆

【模型背景】“PA＋k·PB”型的最值问题是近几年中考考查的热点更是难点。当 k 值为 1 时，即可转化为“PA+PB”之和最短问题，就可用我们常见的“饮马问题”模型来处理，即可以转化为轴对称问题来处理。而当 k 取任意不为 1 的正数时，若再以常规的轴对称思想来解决问题，则无法进行，因此必须转换思路。

此类问题的处理通常以动点 P 所在图形的不同来分类，一般分为两类研究。即点 P 在直线上运动和点 P 在圆上运动。其中点 P 在直线上运动的类型称之为“胡不归”问题；点 P 在圆周上运动的类型称之为“阿氏圆”问题。

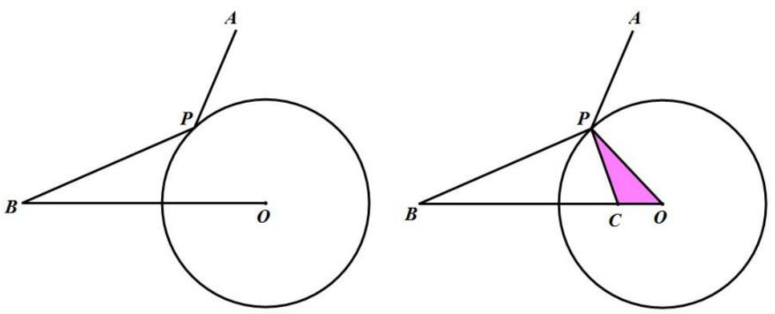
【模型由来】“阿氏圆”又称“阿波罗尼斯圆”，已知平面上两点 A、B，则所有满足 PA:PB=k（k≠1）的点 P 的轨迹是一个圆，这个轨迹最早由古希腊数学家阿波罗尼斯发现，故称“阿氏圆”。

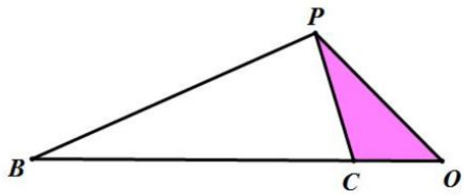


阿波罗尼斯(Apollonlus)圆

模型建立

如图 1 所示，⊙O 的半径为 r，点 A、B 都在⊙O 外，P 为⊙O 上一动点，已知 r＝k·OB，连接 PA、PB，则当“PA+k・PB”的值最小时，P 点的位置如何确定？





构造“子母形相似”

例题 1、如图 1，在 RT△ABC 中，∠ACB=90°，CB=4，CA=6，⊙C 的半径为 2，P 为圆上一动点，连接 AP、BP，求 $AP+\frac{1}{2}BP$ 的最小值

（解析见图 2，答案：$\sqrt{37}$）

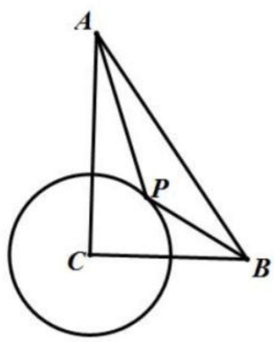


图1

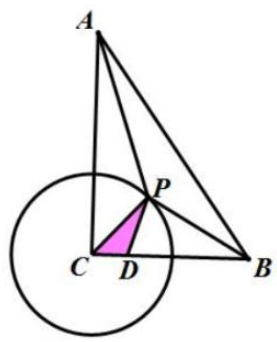
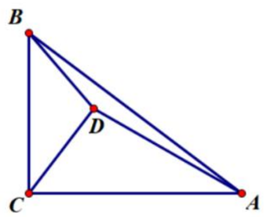


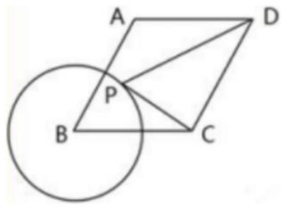
图2

典例讲练

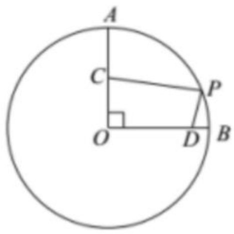
1、如图，RT△ABC 中，∠ACB=90°，AC=4，BC=3，点 D 为△ABC 内一动点，满足 CD=2，则 $AD+\frac{2}{3}BD$ 的最小值为________. $\frac{4}{3}\sqrt{10}$



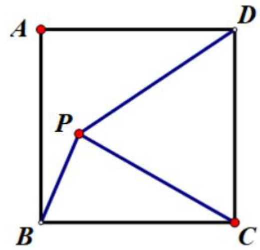
第 1 题图



第 2 题图



第 3 题图



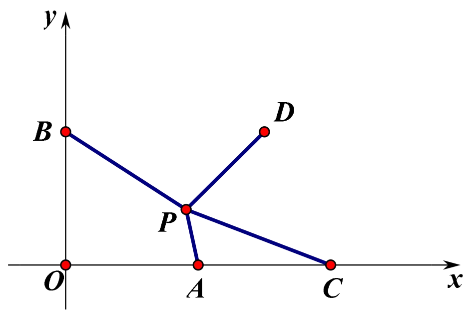
第 4 题图

2、如图，已知菱形 ABCD 的边长为 4，∠B=60°，⊙B 的半径为 2，P 为⊙B 上一动点，则 $PD+\frac{1}{2}PC$ 的最小值为________. $\sqrt{37}$

3、如图，点 A、B 在⊙O 上，OA=OB=12，OA⊥OB，点 C 是 OA 的中点，点 D 在 OB 上，OD=10，动点 P 在⊙O 上，则 $PC+\frac{1}{2}PD$ 的最小值为________. 13

4、如图，边长为 4 的正方形 ABCD，点 P 是正方形内部任意一点，且 BP=2，则 $PD+\frac{1}{2}PC$ 的最小值为____. 5

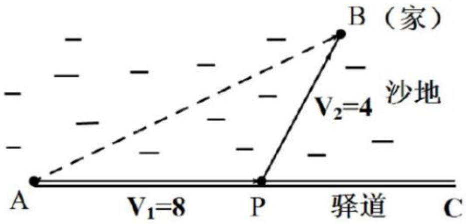
5、如图，在平面直角坐标系 xOy 中，A（2,0），B（0,2），C（4,0），D（3,2），P 是△AOB 外部的第一象限内一动点，且∠BPA=135°，则 2PD+PC 的最小值是________.$4\sqrt{2}$

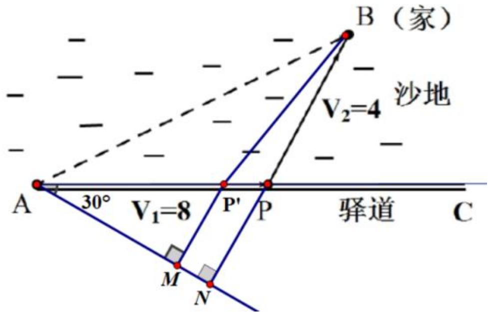


几何模型：胡不归

有一则历史故事：说的是一个身在他乡的小伙子，得知父亲病危的消息后便日夜赶路回家。（如下图）点 A 是出发地，B 是目的地；AC 是一条驿道，而驿道靠目的地的一侧是沙地。为了急切回家，小伙子选择了直线路程 AB。但是，他忽略了在驿道上行走要比在沙地上行快的这一因素。如果他能选择一条合适的路线（尽管这条路线长一些，但是速度可以加快），是可以提前抵达家门的。然而，当他气喘吁吁地来到父亲的面前时，老人刚刚咽气了。人们告诉他：在弥留之际，老人在不断喃喃地叨念："胡不归？胡不归？"。

那么，应该是如何选择最快捷的路线呢？（解析如图，数学原理：垂线段最短）

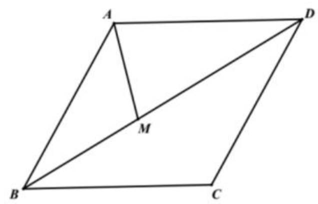




【分析】最短时间：$t_{\min}=\frac{AP}{8}+\frac{BP}{4}$，则 $4t_{\min}=\frac{AP}{2}+BP$

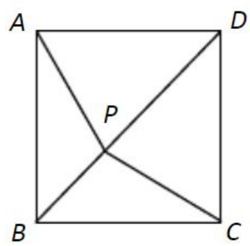
典例讲练

例题 1、四边形 ABCD 是菱形，AB=6，且∠ABC=60°，M 为对角线 BD（不含 B 点）上任意一点，则 AM+$\frac{1}{2}$BM 的最小值为____________.$3\sqrt{3}$



例题 2、如图，P 为正方形 ABCD 对角线 BD 上一动点，若 AB=2，则 AP+BP+CP 的最小值为_________.

$\sqrt{2}+\sqrt{6}$，解法 1：胡不归；解法 2：费马点



几何模型：瓜豆

俗语云“种瓜得瓜，种豆得豆”，数学上有“种线得线，种圆得圆"。

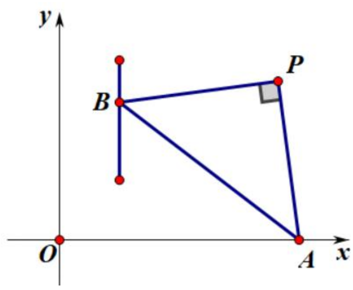
平面内，动点 Q 随着动点 P 的运动而运动，我们把点 P 叫做主动点，点 Q 叫做从动点；当这两个动点与某个定点连线的夹角一定，且与该定点距离之比一定时（简记为“定角、定比"），易判断两个动点与定点构成的三角形形状一定，大小可能变，此时两个动点的轨迹形状相同。

瓜豆问题的本质是旋转、相似（包含全等）变换，往往与共点旋转（手拉手）模型相结合，考查类型有：

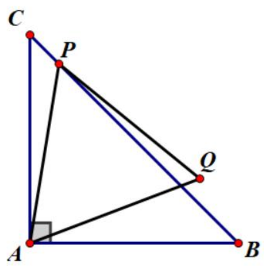
（1）确定动点轨迹；（2）求运动路程；（3）求线段最值、面积最值等.

一、“种线得线”

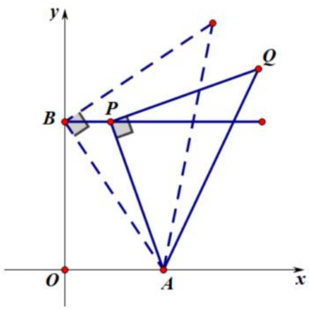
例题 1、在平面直角坐标系中点 A（4，0）绕点 P（x，y）顺时针旋转 90° 至 B（1，m），若 1≤m≤3，则 P 点运动的路径长为_______.$\sqrt{2}$



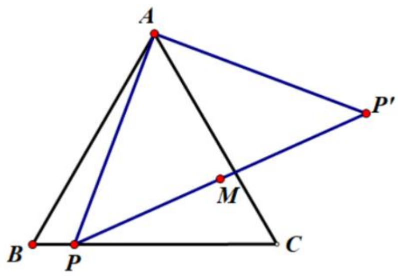
例题 2、在△ABC 中，∠BAC=90°，AB=AC=2cm，线段 BC 上一动点 P 从 C 点开始运动，到 B 点停止，以 AP 为边在 AC 的右侧作等边△APQ，则 Q 点运动的路径为_______cm. $2\sqrt{2}$



例题 2 图



例题 3 图



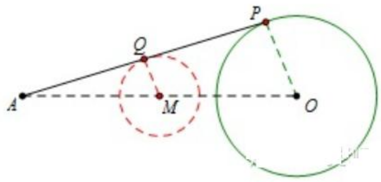
例题 4 图

例题 3、在平面直角坐标系中，A（4，0），直线 l：y=6 与 y 轴交于点 B，点 P 是直线 l 上点 B 右侧的动点，以 AP 为边在 AP 右侧作等腰 Rt△APQ，∠APQ=90°，当点 P 的横坐标满足 0≤x≤8，则点 Q 的运动路径长为_______.$8\sqrt{2}$

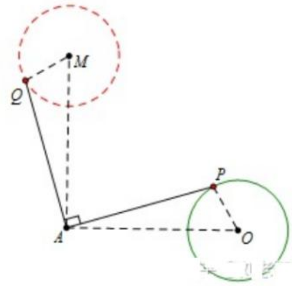
例题 4、如图，在等边△ABC 中，边 BC 的长度为 6，P 在 BC 上从 B 点运动到 C 点，将线段 AP 绕 A 点逆时针旋转 90° 到 AP’，连接 PP’，M 为线段 PP’的中点，当 P 从 B 运动到 C 时停止，则在整个运动过程中，M 点运动的轨迹长度为_______.$3\sqrt{2}$

二、“种圆得圆”

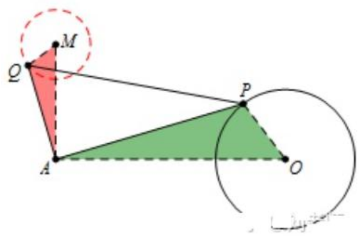
引例 1：如图，P 是⊙O 上一个动点，A 为定点，连接 AP，Q 为 AP 中点，当点 P 在圆 O 上运动时，Q 点轨迹是什么？



引例 2：如图，P 是⊙O 上一个动点，A 为定点，连接 AP，作 AQ⊥AP 且 AQ=AP，当点 P 在⊙O 上运动时，Q 点轨迹是什么？



引例 3：如图，△APQ 是直角三角形，∠PAQ=90°，且 AP=2AQ，当 P 在⊙O 运动时，Q 点轨迹是什么？



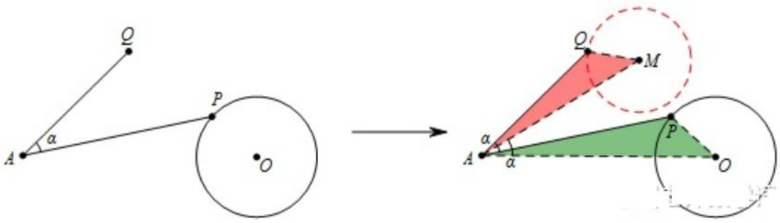
【模型总结】

为了便于区分动点 P、Q，可称点 P 为“主动点”，点 Q 为“从动点"

此类问题的必要条件：两个定量

主动点、从动点与定点连线的夹角是定量（∠PAQ 是定值）;

主动点、从动点到定点的距离之比是定量（AP:AQ 是定值）;



（2016 武汉中考）如图，在等腰 Rt△ABC 中，$AC=BC=2\sqrt{2}$，点 P 在以斜边 AB 为直径的半圆上，M 为 PC 的中点．当点 P 沿半圆从点 A 运动至点 B 时，点 M 运动的路径长是（ B ）

A．$\sqrt{2}\pi$　　B．π　　C．$2\sqrt{2}$　　D．2