



几何模型：费马点

费马点的定义：数学上称，到三角形 3 个顶点距离之和最小的点为费马点。

它是这样确定的：

1. 如果三角形有一个内角大于或等于 120° ，这个内角的顶点就是费马点；
2. 如果 3 个内角均小于 120° ，则在三角形内部对 3 边张角均为 120° 的点，是三角形的费马点。

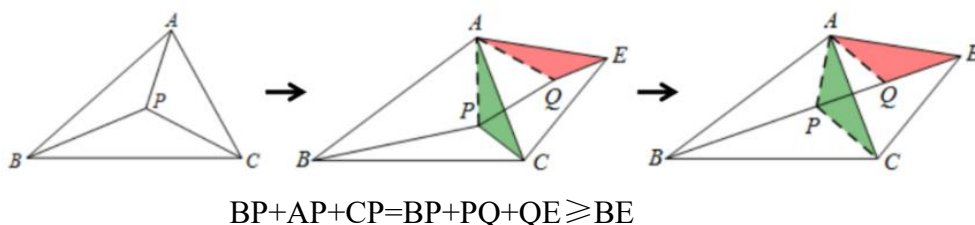
费马点的性质：费马点有如下主要性质：

1. 费马点到三角形三个顶点距离之和最小。
2. 费马点连接三顶点所成的三夹角皆为 120° 。

费马点最小值快速求解：

费马问题告诉我们，存在这么一个点到三个定点的距离的和最小，解决问题的方法是运用旋转变换。

解题方法：以 $\triangle ABC$ 任意一边为边向外作等边三角形，这条边所对两顶点的距离即为最小值



例题：（2019 武汉中考）问题背景：如图 1，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle ADE$ ， DE 与 BC 交于点 P ，可推出结论： $PA+PC=PE$ 。

问题解决：如图 2，在 $\triangle MNG$ 中， $MN=6$ ， $\angle M=75^\circ$ ， $MG=4\sqrt{2}$ 。点 O 是 $\triangle MNG$ 内一点，则点 O 到 $\triangle MNG$ 三个顶点的距离和的最小值是_____。

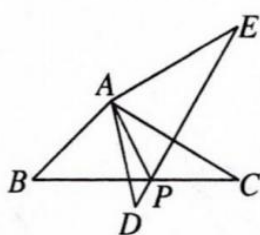


图 (1)

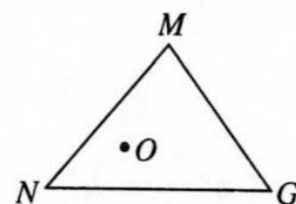


图 (2)

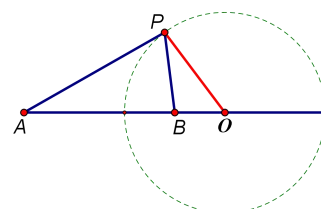


几何模型：阿氏圆

【模型背景】“ $PA + k \cdot PB$ ”型的最值问题是近几年中考考查的热点更是难点。当 k 值为 1 时，即可转化为“ $PA + PB$ ”之和最短问题，就可用我们常见的“饮马问题”模型来处理，即可以转化为轴对称问题来处理。而当 k 取任意不为 1 的正数时，若再以常规的轴对称思想来解决问题，则无法进行，因此必须转换思路。

此类问题的处理通常以动点 P 所在图形的不同来分类，一般分为两类研究。即点 P 在直线上运动和点 P 在圆上运动。其中点 P 在直线上运动的类型称之为“胡不归”问题；点 P 在圆周上运动的类型称之为“阿氏圆”问题。

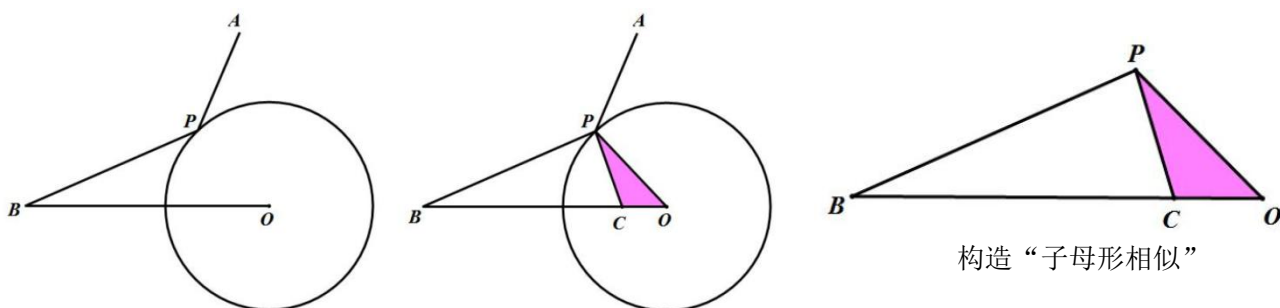
【模型由来】“阿氏圆”又称“阿波罗尼斯圆”，已知平面上两点 A 、 B ，则所有满足 $PA:PB=k$ ($k \neq 1$) 的点 P 的轨迹是一个圆，这个轨迹最早由古希腊数学家阿波罗尼斯发现，故称“阿氏圆”。



阿波罗尼斯(Apollonius)圆

模型建立

如图 1 所示， $\odot O$ 的半径为 r ，点 A 、 B 都在 $\odot O$ 外， P 为 $\odot O$ 上一动点，已知 $r = k \cdot OB$ ，连接 PA 、 PB ，则当“ $PA + k \cdot PB$ ”的值最小时， P 点的位置如何确定？



构造“子母形相似”

例题 1、如图 1，在 $RT\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $CB = 4$ ， $CA = 6$ ， $\odot C$ 的半径为 2， P 为圆上一动点，连接 AP 、 BP ，求 $AP + \frac{1}{2}BP$ 的最小值

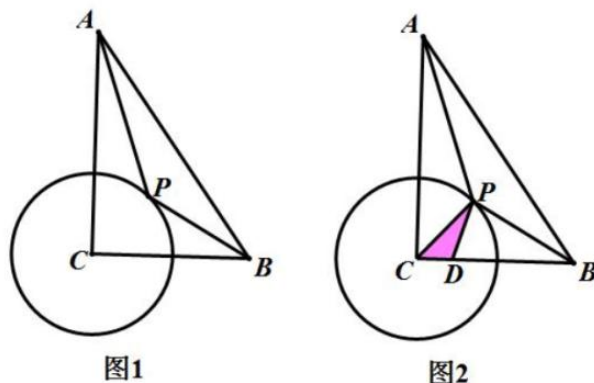


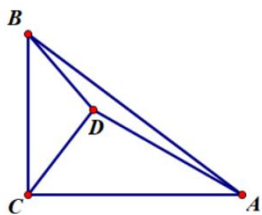
图1

图2

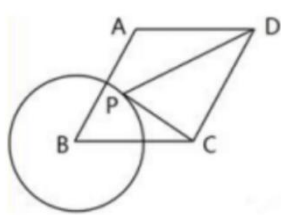


典例讲练

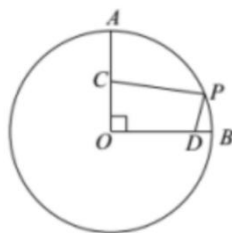
1、如图，RT△ABC 中，∠ACB=90°，AC=4，BC=3，点 D 为△ABC 内一动点，满足 CD=2，则 $AD + \frac{2}{3}BD$ 的最小值为_____.



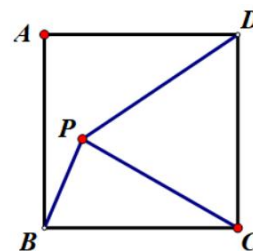
第 1 题图



第 2 题图



第 3 题图



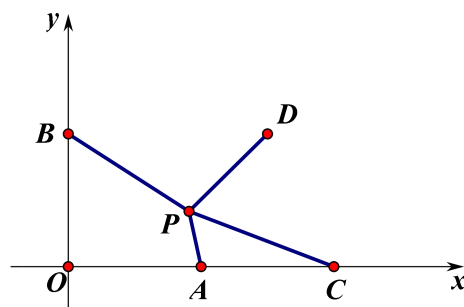
第 4 题图

2、如图，已知菱形 ABCD 的边长为 4，∠B=60°，⊙B 的半径为 2，P 为⊙B 上一动点，则 $PD + \frac{1}{2}PC$ 的最小值为_____.

3、如图，点 A、B 在⊙O 上，OA=OB=12，OA⊥OB，点 C 是 OA 的中点，点 D 在 OB 上，OD=10，动点 P 在⊙O 上，则 $PC + \frac{1}{2}PD$ 的最小值为_____.

4、如图，边长为 4 的正方形 ABCD，点 P 是正方形内部任意一点，且 BP=2，则 $PD + \frac{1}{2}PC$ 的最小值为_____.

5、如图，在平面直角坐标系 xOy 中，A (2,0)，B (0,2)，C (4,0)，D (3,2)，P 是△AOB 外部的第一象限内一动点，且∠BPA=135°，则 2PD+PC 的最小值是_____.

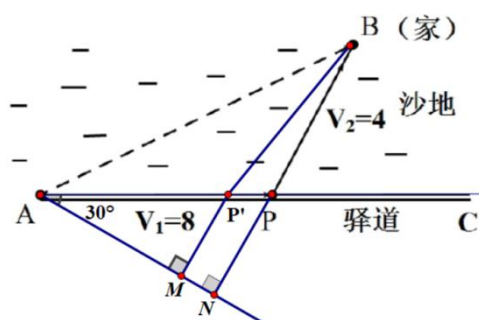
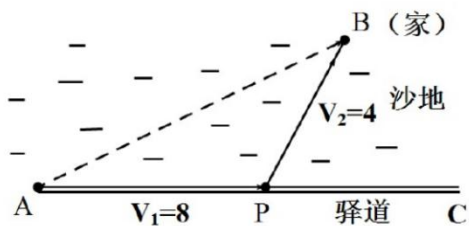




几何模型：胡不归

有一则历史故事：说的是一个身在他乡的小伙子，得知父亲病危的消息后便日夜赶路回家。（如下图）点 A 是出发地，B 是目的地；AC 是一条驿道，而驿道靠目的地的一侧是沙地。为了急切回家，小伙子选择了直线路程 AB。但是，他忽略了在驿道上行走要比在沙地上行快的这一因素。如果他能选择一条合适的路线（尽管这条路线长一些，但是速度可以加快），是可以提前抵达家门的。然而，当他气喘吁吁地来到父亲的面前时，老人刚刚咽气了。人们告诉他：在弥留之际，老人在不断喃喃地叨念：“胡不归？胡不归？”。

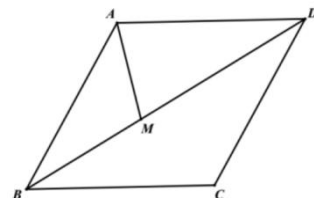
那么，应该如何选择最快捷的路线呢？（解析如图，数学原理：垂线段最短）



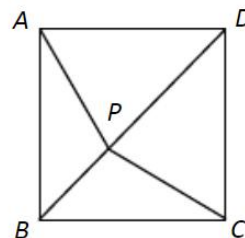
【分析】最短时间： $t_{\min} = \frac{AP}{8} + \frac{BP}{4}$ ，则 $4t_{\min} = \frac{AP}{2} + BP$

典例讲练

例题 1、四边形 ABCD 是菱形，AB=6，且 $\angle ABC=60^\circ$ ，M 为对角线 BD（不含 B 点）上任意一点，则 $AM + \frac{1}{2}BM$ 的最小值为_____。



例题 2、如图，P 为正方形 ABCD 对角线 BD 上一动点，若 AB=2，则 $AP+BP+CP$ 的最小值为_____。





几何模型：瓜豆

俗语云“种瓜得瓜，种豆得豆”，数学上有“种线得线，种圆得圆”。

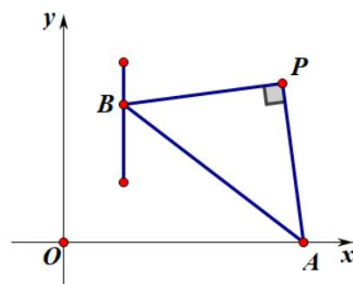
平面内，动点 Q 随着动点 P 的运动而运动，我们把点 P 叫做主动点，点 Q 叫做从动点；当这两个动点与某个定点连线的夹角一定，且与该定点距离之比一定时（简记为“定角、定比”），易判断两个动点与定点构成的三角形形状一定，大小可能变，此时两个动点的轨迹形状相同。

瓜豆问题的本质是旋转、相似（包含全等）变换，往往与共点旋转（手拉手）模型相结合，考查类型有：

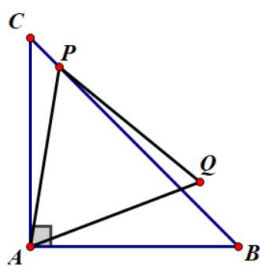
- (1) 确定动点轨迹； (2) 求运动路程； (3) 求线段最值、面积最值等。

一、“种线得线”

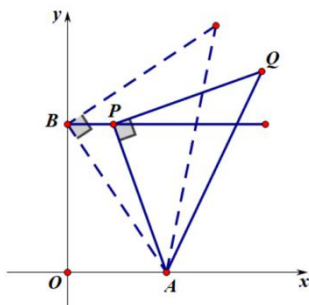
例题 1、在平面直角坐标系中点 A (4, 0) 绕点 P (x, y) 顺时针旋转 90° 至 B (1, m)，若 $1 \leq m \leq 3$ ，则 P 点运动的路径长为_____。



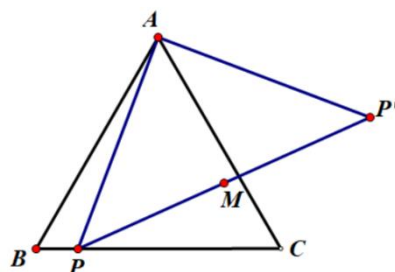
例题 2、在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC=90^\circ$ ， $AB=AC=2\text{cm}$ ，线段 BC 上一动点 P 从 C 点开始运动，到 B 点停止，以 AP 为边在 AC 的右侧作等边 $\triangle APQ$ ，则 Q 点运动的路径为_____cm。



例题 2 图



例题 3 图



例题 4 图

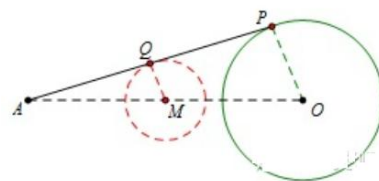
例题 3、在平面直角坐标系中，A (4, 0)，直线 $l: y=6$ 与 y 轴交于点 B，点 P 是直线 l 上点 B 右侧的动点，以 AP 为边在 AP 右侧作等腰 $\text{Rt}\triangle APQ$ ， $\angle APQ=90^\circ$ ，当点 P 的横坐标满足 $0 \leq x \leq 8$ ，则点 Q 的运动路径长为_____。

例题 4、如图，在等边 $\triangle ABC$ 中，边 BC 的长度为 6，P 在 BC 上从 B 点运动到 C 点，将线段 AP 绕 A 点逆时针旋转 90° 到 AP' ，连接 PP' ，M 为线段 PP' 的中点，当 P 从 B 运动到 C 时停止，则在整个运动过程中，M 点运动的轨迹长度为_____。

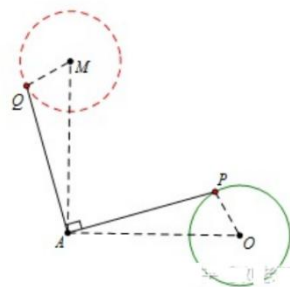


二、“种圆得圆”

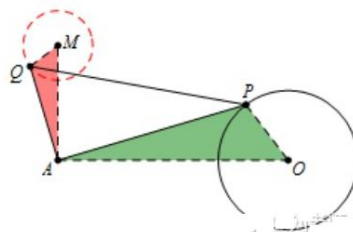
引例 1：如图，P 是 $\odot O$ 上一个动点，A 为定点，连接 AP，Q 为 AP 中点，当点 P 在圆 O 上运动时，Q 点轨迹是什么？



引例 2：如图，P 是 $\odot O$ 上一个动点，A 为定点，连接 AP，作 $AQ \perp AP$ 且 $AQ=AP$ ，当点 P 在 $\odot O$ 上运动时，Q 点轨迹是什么？



引例 3：如图， $\triangle APQ$ 是直角三角形， $\angle PAQ=90^\circ$ ，且 $AP=2AQ$ ，当 P 在 $\odot O$ 运动时，Q 点轨迹是什么？



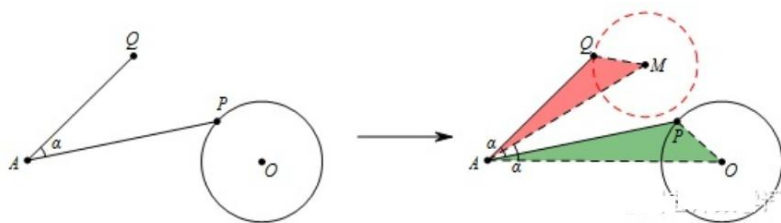
【模型总结】

为了便于区分动点 P、Q，可称点 P 为“主动点”，点 Q 为“从动点”

此类问题的必要条件：两个定量

主动点、从动点与定点连线的夹角是定量 ($\angle PAQ$ 是定值)；

主动点、从动点到定点的距离之比是定量 ($AP:AQ$ 是定值)；



(2016 武汉中考) 如图，在等腰 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AC=BC=2\sqrt{2}$ ，点 P 在以斜边 AB 为直径的半圆上，M 为 PC 的中点。当点 P 沿半圆从点 A 运动至点 B 时，点 M 运动的路径长是 ()

A. $\sqrt{2}\pi$

B. π

C. $2\sqrt{2}$

D. 2

