武汉元调第 23 题之拓展：脚拉脚模型

【引例】

（2016 武汉元调）如图，∠BAC=60°，∠CDE=120°，AB=AC，DC=DE，连接 BE，P 为 BE 的中点

（1）如图 1，若 A、C、D 三点共线，求∠PAC 的度数

（2）如图 2，若 A、C、D 三点不共线，求证：AP⊥DP

（3）如图 3，若点 C 线段 BE 上，AB=1，CD=2，请直接写出 PD 的长度

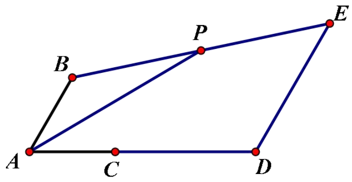


图 1

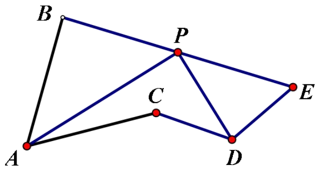


图 2

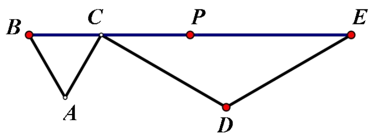


图 3

一、脚拉脚模型的构图特征

所谓的脚拉脚模型，是与手拉手模型相对应的一种几何构图特征，在我们学习手拉手模型的时候，通俗的，把等腰三角形的两个顶角顶点引出的两组边（腰）称之为“手”，两个底角顶点称之为“脚”。

现将两个几何模型做一下对比：

相同点-基本前提：两个等腰三角形

不同点-连接方式：

①手拉手模型：两个**顶角度数相等**的等腰三角形共用一个顶角顶点，并连结对应的底角顶点。

②脚拉脚模型：两个**顶角度数互补**的等腰三角形**共用一个底角顶点**，并连结剩下的那组底角顶点同时取其中点，再将中点与其余两个顶角顶点进行连结.

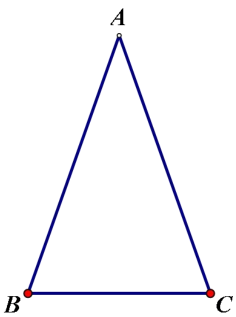
（注意：“手”和“脚”的说法只是为了方便好记的通俗说法，并不是公认的官方说法）

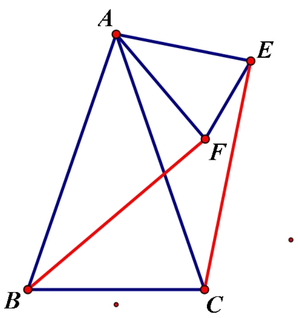
二、脚拉脚模型的基本结论

我们把一类构图称之为几何模型的原因在于，只要满足一定的条件，其他次要条件无论如何变换，一定会有不变的结论蕴含在图形当中.在上图所展示的脚拉脚模型示意图中，无论∠BAC 取多少度，均有以下结论：

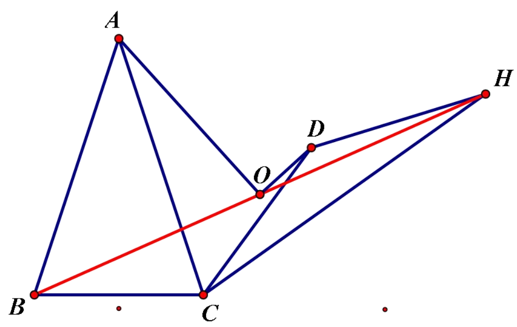
①∠AOD=90°【在下图中用两种方法证明此结论】

②在线段 AO 与 DO 中，较长的线段长度与较短的线段长度的比值等于互补角中较小角的一半的正切值在这个图中，即表现为：$\frac{DO}{AO}=\tan\frac{\angle BAC}{2}$ 【脚拉脚最终会变成手拉手】

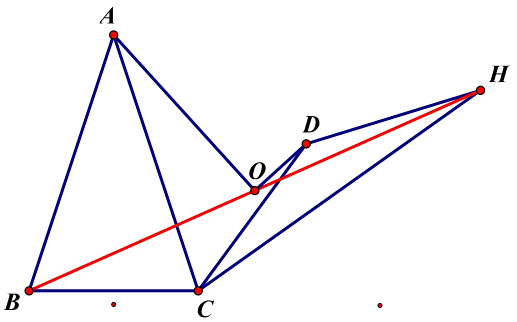




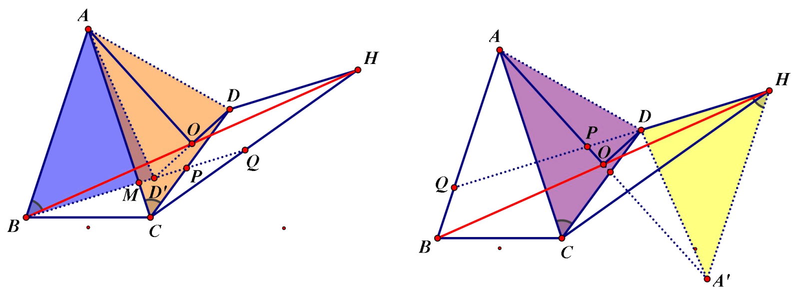
手拉手



解法一



解法二

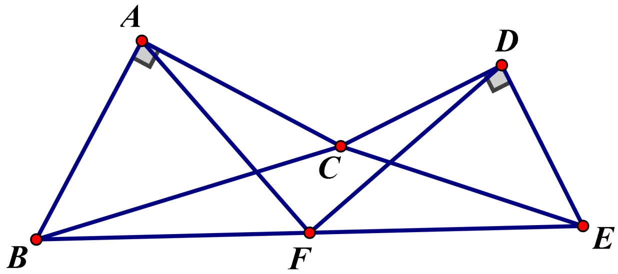


答案与提示

三、脚拉脚模型的证法——中线倍长

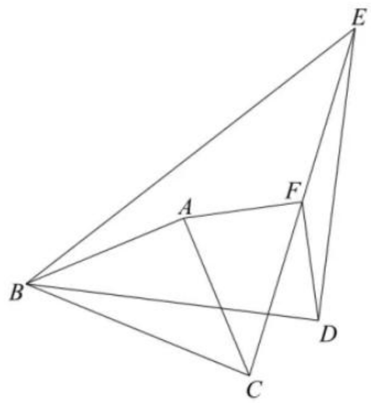
脚拉脚模型的证明方法比较固定，一般分为以下几步：
（一）利用中点证明平行 8 字全等，进而得到等边与平行的条件
（二）通过分析相等的边长找到要证明的那一组旋转全等，再利用平行的条件进行角度计算，得到两边中间的夹角相等.（这里是难点）
（三）证明这组旋转全等，得到一个新的等腰三角形
（四）利用等腰三角形的三线合一，得到我们想要的最终结论

例题：如图，△ABC 和△CED 为等腰直角三角形，F 为 BE 的中点，连接 AF、DF. 证明：AF⊥DF，且 AF=DF.

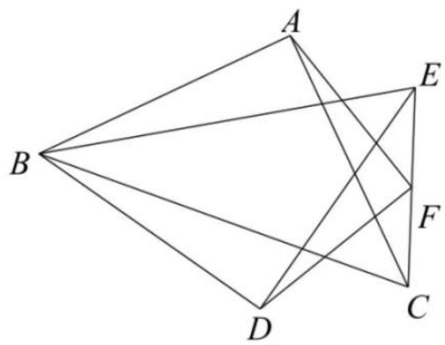


等腰直角三角形脚拉脚

1、如图，△ABC 和△BED 为等腰直角三角形，F 为 CE 的中点，连接 AF、DF. 证明：AF⊥DF，且 AF=DF.

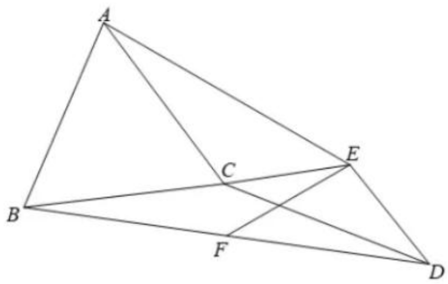


2、如图，△ABC 和△BED 为等腰直角三角形，F 为 CE 的中点，连接 AF、DF. 证明：AF⊥DF，且 AF=DF.

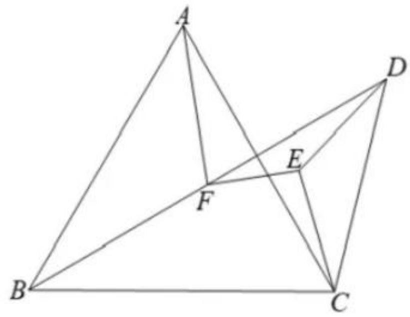


互补脚拉脚

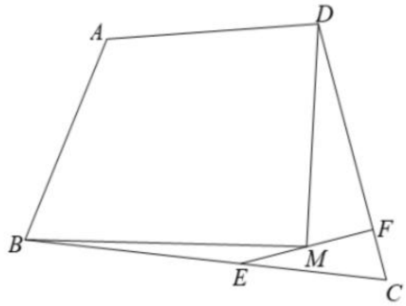
3、如图，AB=AC，CE=DE，且∠BAC=60°，∠CED=120°，F 为 BD 的中点，求证：∠AEF=60°，且 AE=2 EF



4、如图，AB=AC，CE=DE，且∠BAC=60°，∠CED=120°，F 为 BD 的中点，求证：AF⊥EF

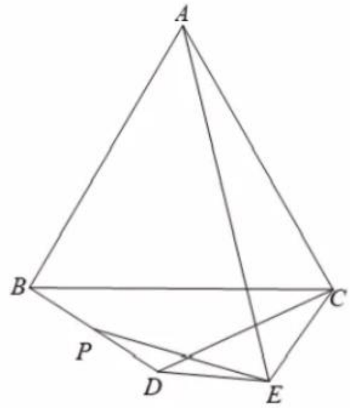


5、如图，在四边形 ABCD 中，∠A+∠C=180°，E、F 分别在 BC、CD 上，且 AB=BE，AD=DF，M 为 EF 的中点，求证：DM⊥BM.

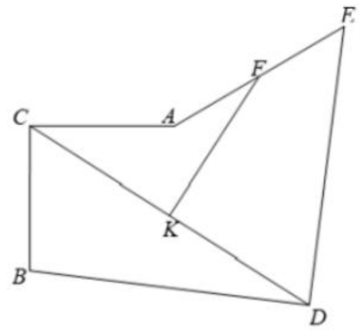


脚拉脚中的结论变形

6、如图，AB=AC，∠ABC=β，CE=ED，∠CED=2β，点 P 为 BD 的中点，连接 AE、PE，当β=60°时，求$\frac{AE}{PE}$



7、如图，AC=BC，∠ACB=90°，BD=ED，∠BDE=90°，点 K 为 CD 的中点，点 F 为 AE 的中点，连接 FK，求证：CD=2 FK.



8、如图，△ABC 中，分别以 AB、AC 为斜边向外作等腰 Rt△ABF 和等腰 Rt△ACE，D 为 BC 中点，连接 DF、ED，求证：$S_{五边形\ AFBCE}=DF^2$