武汉元调第 23 题之拓展：脚拉脚模型

【引例】

（2016 武汉元调）如图，∠BAC=60°，∠CDE=120°，AB=AC，DC=DE，连接 BE，P 为 BE 的中点

（1）如图 1，若 A、C、D 三点共线，求∠PAC 的度数

（2）如图 2，若 A、C、D 三点不共线，求证：AP⊥DP

（3）如图 3，若点 C 线段 BE 上，AB=1，CD=2，请直接写出 PD 的长度

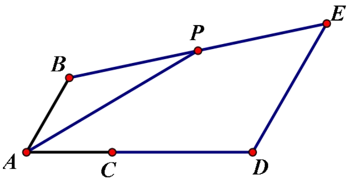


图 1

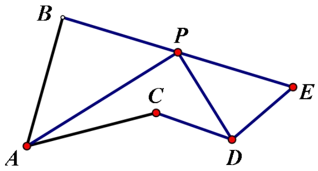


图 2

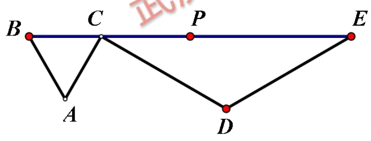


图 3

(1)解：延长 AP，DE，相交于点 F.

∵$\angle BAC=60°$，$\angle CDE=120°$，∴$\angle BAC+\angle CDE=180°$，

∵A，C，D 三点共线，∴$AB /\!/ DE$.……… 1 分

∴$\angle B=\angle PEF$，$\angle BAP=\angle EFP$.

∵$BP=PE$，∴$\triangle ABP\cong\triangle FEP$.∴$AB=FE$.

∵$AB=AC$，$DC=DE$，∴$AD=DF$.……… 2 分

∴$\angle PAC=\angle PFE$.

∵$\angle CDE=120°$，

∴$\angle PAC=30°$.……… 3 分

(2)证明：延长 AP 到点 F，使 $PF=AP$，连接 DF，EF，AD.

∵$BP=EP$，$\angle BPA=\angle EPF$，∴$\triangle BPA\cong\triangle EPF$.……… 4 分

∴$AB=FE$，$\angle PBA=\angle PEF$.

∵$AC=BC$，∴$AC=FE$.……… 5 分

在四边形 $BADE$ 中，∵$\angle BAD+\angle ADE+\angle DEB+\angle EBA=360°$，

∵$\angle BAC=60°$，$\angle CDE=120°$，∴$\angle CAD+\angle ADC+\angle DEB+\angle EBA=180°$.

∵$\angle CAD+\angle ADC+\angle ACD=180°$，∴$\angle ACD=\angle DEB+\angle EBA$.

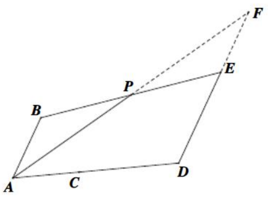
∴$\angle ACD=\angle FED$，……… 6 分

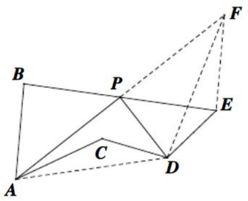
∵ $CD=DE$，∴$\triangle ACD\cong\triangle FED$．∴$AD=FD$.

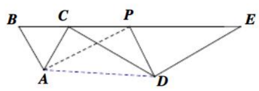
∵$AP=FP$，∴$AP\perp DP$.……… 7 分

(3)$\frac{\sqrt{5}}{2}$.……… 10 分

(提示：连接 AP，AD，易知$\angle ACD=90°$，所以 $AD=\sqrt{5}$，在 $Rt\triangle APD$ 中，$\angle PAD=30°$，所以，$PD=\frac{\sqrt{5}}{2}$)







一、脚拉脚模型的构图特征

所谓的脚拉脚模型，是与手拉手模型相对应的一种几何构图特征，在我们学习手拉手模型的时候，通俗的，把等腰三角形的两个顶角顶点引出的两组边（腰）称之为“手”，两个底角顶点称之为“脚”。

现将两个几何模型做一下对比：

相同点-基本前提：两个等腰三角形

不同点-连接方式：

①手拉手模型：两个**顶角度数相等**的等腰三角形共用一个顶角顶点，并连结对应的底角顶点。

②脚拉脚模型：两个**顶角度数互补**的等腰三角形**共用一个底角顶点**，并连结剩下的那组底角顶点同时取其中点，再将中点与其余两个顶角顶点进行连结.

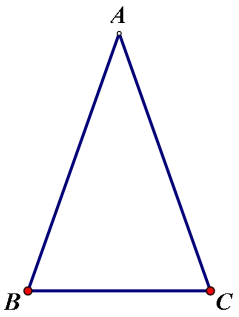
（注意：“手”和“脚”的说法只是为了方便好记的通俗说法，并不是公认的官方说法）

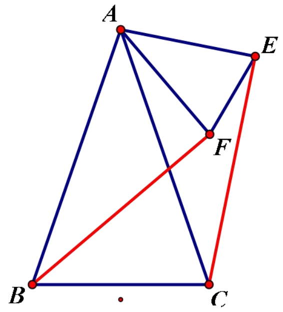
二、脚拉脚模型的基本结论

我们把一类构图称之为几何模型的原因在于，只要满足一定的条件，其他次要条件无论如何变换，一定会有不变的结论蕴含在图形当中.在上图所展示的脚拉脚模型示意图中，无论∠BAC 取多少度，均有以下结论：

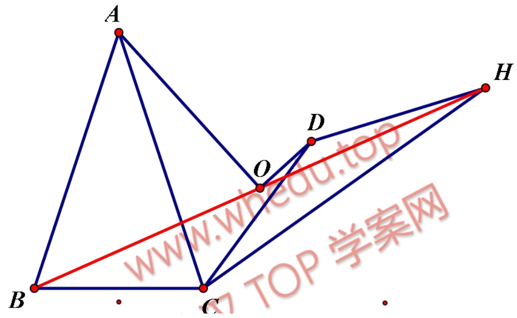
①∠AOD=90°【在下图中用两种方法证明此结论】

②在线段 AO 与 DO 中，较长的线段长度与较短的线段长度的比值等于互补角中较小角的一半的正切值在这个图中，即表现为：$\frac{\mathrm{DO}}{\mathrm{AO}}=\tan\frac{\angle \mathrm{BAC}}{2}$ 【脚拉脚最终会变成手拉手】

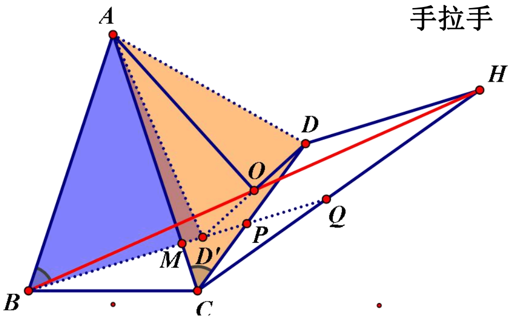




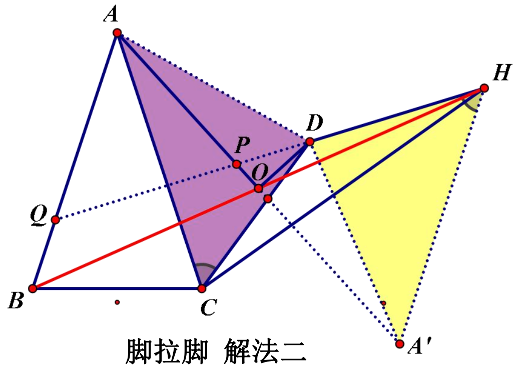
手拉手



脚拉脚



脚拉脚 解法一



脚拉脚 解法二

三、脚拉脚模型的证法——中线倍长

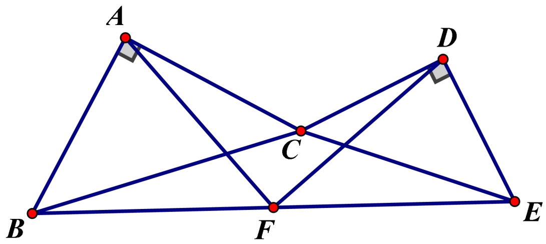
脚拉脚模型的证明方法比较固定，一般分为以下几步：

（一）利用中点证明平行 8 字全等，进而得到等边与平行的条件

（二）通过分析相等的边长找到要证明的那一组旋转全等，再利用平行的条件进行角度计算，得到两边中间的夹角相等.（这里是难点）

（三）证明这组旋转全等，得到一个新的等腰三角形

（四）利用等腰三角形的三线合一，得到我们想要的最终结论



例题：如图，△ABC 和△CED 为等腰直角三角形，F 为 BE 的中点，连接 AF、DF. 证明：AF⊥DF，且 AF=DF.

证明：

（一）利用中点证明平行八字全等，进而得到等边与平行的条件：中点是我们做这一类题的突破口，因为通过中点进行的倍长中线可以得到旋转全等，从而实现条件的位移与转换.

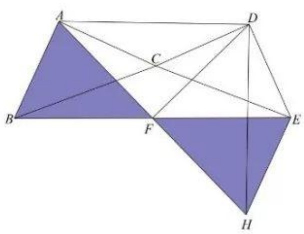
延长 AF 至点 H，使得 $AF=HF$，连 AD，DH，EH

∵F 为 BE 的中点

∴$BF=EF$

在△AFB 和△HFE 中

$$\begin{cases} AF = HF \\ \angle AFB = \angle HFE \\ BF = EF \end{cases}$$



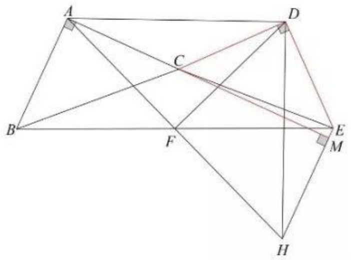
∴ △AFB≌△HFE(SAS)

∴$AB=AC=HE$, $\angle BAF=\angle AHE$

∴ $AB/\!/EF$

（二）这个时候我们得到了第一组全等，分析已有的条件发现，已知 $AC=AB=EH$,$DC=DE$,在三角形 ACD 与△HED 中，已经有了两条相等的边，可以尝试着看能否证明全等，倘若能得到全等，就意味着△ADH 为等腰三角形，那么作为中点的 F 自然就会成为 DF 与 AH 的垂足.已知两边相等，第三边是我们要证明的全等，那么剩下的路就很唯一了，那就是证明中间那个夹角相等，即证明∠DCA=∠DEH. 这里证明角相等是难点，一定要利用好第一组全等中得到的平行线的条件.这里提供两种思路.

思路一：通过某些线段与平行线产生三线八角，再利用已知的两个顶角 90 度，构成四边形或者八字模型.



延长 AC 交 EH 于 M

$\because AB/\!/EF$

$\therefore \angle BAM=\angle AMH=90^\circ$

又$\because \angle CDE=90^\circ$

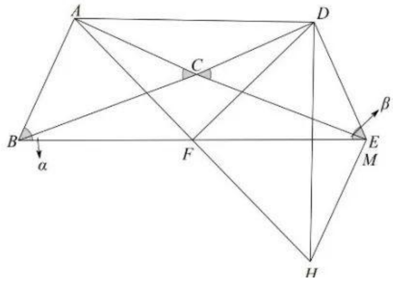
$\therefore$在四边形 $CDEM$ 中，$\angle CDE+\angle EMC=180^\circ$

$\therefore \angle DCM+\angle DEM=180^\circ$

$\therefore \angle DCA=\angle DEH$

小技巧：如何快速的找到需要延长的线？第一可以尝试等腰三角形中剩下的那个没被使用过的“腰”，比如这个题当中等腰三角形 ABC 中，倍长的全等已经用了 AB，AC 没有被使用，可以尝试延长.第二在其他的题目当中，可以尝试延长平行线.这里一定要通过具体的图形多动手尝试.

思路二：设特定角为未知数，利用平行线并结合等腰三角形的底角进行角度计算.



设 $\angle CBE=\alpha$，$\angle CEB=\beta$

$\therefore \angle ABE=\alpha+45^\circ$

$\because AB/\!/EF$

$\therefore \angle FEB=\angle ABE=\alpha+45^\circ$

$\therefore \angle DEH=90^\circ+\alpha+\beta$

在$\triangle BEC$ 当中

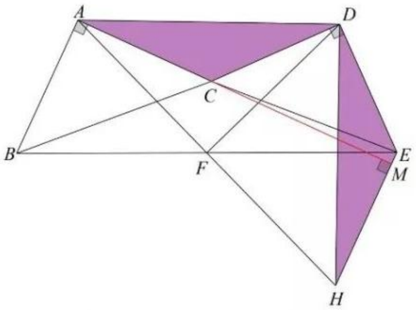
$\angle BCE=180-\alpha-\beta$

$\therefore \angle DCA=360^\circ-45^\circ-45^\circ-180^\circ+\alpha+\beta=90^\circ+\alpha+\beta$

$\therefore \angle DCA=\angle DEH$

小技巧：这里设未知数不是盲目设的，选择三个底角顶点所围成的三角形中的两个角设为未知数会比较方便.

（三）有了角相等，剩下的全等也就水到渠成了.



在$\triangle DCA$ 和$\triangle DEH$ 中

$$\begin{cases} DC=DE \\ \angle DCA=\angle DEH \\ CA=EH \end{cases}$$

$\therefore \triangle DCA\cong\triangle DEH$

$\therefore DA=DH, \angle ADC=\angle HDE$

又$\because \angle CDE=90^\circ$

$\therefore \angle ADH=\angle CDE=90^\circ$

$\therefore\triangle ADF$ 为等腰直角三角形

（四）有了等腰直角三角形后，切不可盲目乐观认为结论就出来了，一定要再利用三线合一等手段详细的证明，并且注意，三线合一不能直接得到 $AF=DF$，需要计算角度.

又$\because F$ 为 AF 中点

$\therefore AF\perp DF$，即$\angle AFD=90^\circ$

又$\because \angle DAH=\dfrac{90^\circ}{2}=45^\circ$

$\therefore \angle ADF=\angle DAH=90^\circ-45^\circ=45^\circ$

$\therefore AF=DF$

（注意：有的时候题目给的条件是 30°，那么需要“利用 30°所对的直角边为斜边的一半”，得到 2 倍的关系，无论是 45°还是 30°，一定要把条件说清楚，不能囫囵吞枣般的糊弄过去.）

等腰直角三角形脚拉脚

1、如图，△ABC 和△BED 为等腰直角三角形，F 为 CE 的中点，连接 AF、DF. 证明：AF⊥DF，且 AF=DF.

证：延长 AF 至 H 点，使 AF=FH，连接 AD、HD、EH.

∵ F 为 CE 的中点，

∴ CF=EF

在△AFC 和△HFE 中

$\begin{cases} AF=HF \\ \angle AFC=\angle HFE \\ CF=EF \end{cases}$

∴ △AFC≌△HFE (SAS)

∴ AC=HE ∠HAC=∠AHE

∴ AC∥EH

延长 BA 交 EH 于 K 点，交 ED 于 M

∵ AC∥EH

∴ ∠BAC=∠BKH=90°

∵ ∠BDE=90°

且 ∠BMD=∠EMK

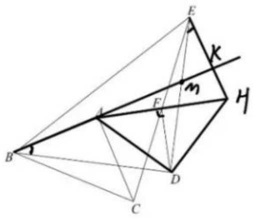
∴ ∠MBD=∠DEH

在△ABD 和△HED 中

$\begin{cases} AB=HE \\ \angle ABD=\angle HED \\ BD=ED \end{cases}$

∴ △ABD≌△HED (SAS)

∴ AD=HD ∠ADB=∠HDE



又∵ ∠BDE=90°

∴ ∠ADH=∠BDE=90°

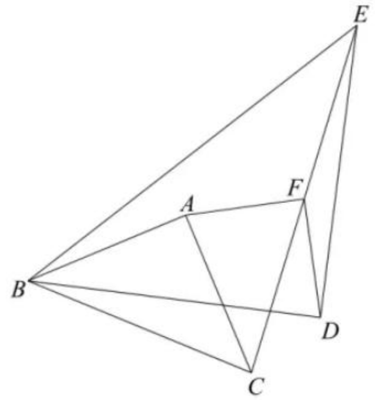
∴ △ADH 为等腰 Rt 三角形

又∵ F 为 AH 中点，

∴ AF⊥FD FD 平分∠ADH

∴ ∠FAD=∠ADF=45°

∴ AF=FD



2、如图，△ABC 和△BED 为等腰直角三角形，F 为 CE 的中点，连接 AF、DF. 证明：AF⊥DF，且 AF=DF.

证：延长 AF 到 H 点，使 FH=AF，连 AD、DH、EH

∵ F 为 CE 的中点，

∴ AF=FH

在△AFC 和△HFE 中

$\begin{cases} AF=HF \\ \angle AFC=\angle HFE \\ FC=FE \end{cases}$

∴ △AFC≌△HFE (SAS)

∴ AC=EH ∠FAC=∠FHE

∴ AC∥EH

延长 AE BA 交于 K 点，

∵ AC∥EH

∴ ∠AKE=∠BAC=90°

∴ 在四边形 BKED 中

∠BKE+∠BDE=180°

∴ ∠KBD+∠KED=180°

∴ ∠ABD=∠DEH

在△ABD 和△HED 中

$\begin{cases} AB=HE \\ \angle ABD=\angle HED \\ BD=ED \end{cases}$

∴ △ABD≌△HED (SAS)

∴ AD=HD ∠BDA=∠EDH

∴ ∠BDE=∠ADH=90°

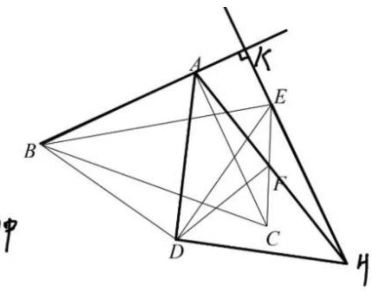
∴ △ADH 为等腰直角三角形

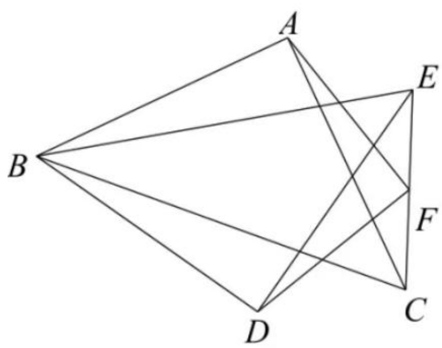
又∵ F 为 AH 中点

∴ AF⊥DF DF 平分∠ADH

∴ ∠DAF=∠ADF=45°

∴ AF=DF





互补脚拉脚

3、如图，AB=AC，CE=DE，且∠BAC=60°，∠CED=120°，F 为 BD 的中点，求证：∠AEF=60°，且 AE=2 EF

证明：延长EF至K点，使EF=FK，连BK，AK，AF

∵F为BD的中点

∴BF=DF

在△BFK和△DFE中

$\begin{cases} BF=DF \\ \angle BFK=\angle DFE \\ KF=EF \end{cases}$

∴△BFK≌△DFE(SAS)

∴BK=ED ∠BKF=∠FED

∴BK//DE

设∠CBD=α ∠CDB=β

∴∠EDF=β+30°

∴∠FBK=α+β+30°

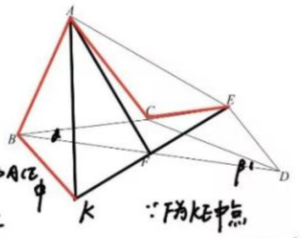
∴∠ABK=90°+α+β

∵∠BCD=180°−α−β

∠ACB+∠ECD=90°

∴∠ACE=90°+α+β

∴∠ACE=∠ABK



在△ABK和△ACE中

$\begin{cases} AB=AC \\ \angle ABK=\angle ACE \\ BK=CE \end{cases}$

∴△ABK≌△ACE(SAS)

∴AB=AC ∠BAK=∠CAE

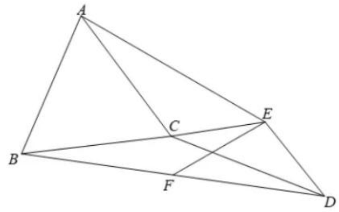
∴∠KAE=∠BAC=60°

∴△ABC为等边三角形

∵F为KE中点

∴AF⊥EF 且 EF=½EK

∴EF=½AE 即 AE=2EF



4、如图，AB=AC，CE=DE，且∠BAC=60°，∠CED=120°，F 为 BD 的中点，求证：AF⊥EF

证明：延长EF到H点，使HF=EF，连AH BH AE

∵F为BD的中点

∴HF=EF

在△HFB和△EFD中

$\begin{cases} HF=EF \\ \angle HFB=\angle EFD \\ FB=FD \end{cases}$

∴△HFB≌△EFD(SAS)

∴BH=DE ∠BHF=∠DEF

∴BH//DE

延长BH CE交于K点，与AC交于M

∵BK//DE

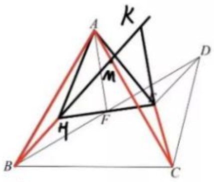
∴∠BKE=∠KED=60°

又∵∠BAC=∠BKC=60°

且∠AMB=∠KMC

∴∠ABH=∠ACE

在△ABH和△ACE中



$\begin{cases} AB=AC \\ \angle ABH=\angle ACE \\ BH=CE \end{cases}$

∴△ABH≌△ACE(SAS)

∴AH=AE，∠BAH=∠CAE

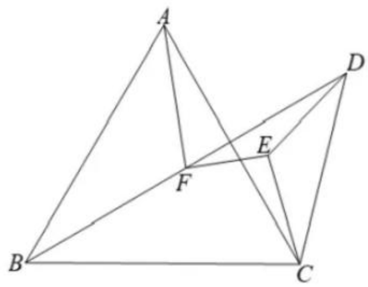
又∵∠BAC=60°

∴∠HAE=60°

∴△HAE为等边三角形

∵F为HE中点

∴AF⊥FE



5、如图，在四边形 ABCD 中，∠A+∠C=180°，E、F 分别在 BC、CD 上，且 AB=BE，AD=DF，M 为 EF 的中点，求证：DM⊥BM.

证明：延长DM至H点，使DM=HM，连BD，BH EH

∵M为EF的中点

∴FM=EM

在△DMF和△HMA中

$\begin{cases} DM=MH \\ \angle DMF=\angle HMA \\ FM=EM \end{cases}$

∴△DMF≌△HMA(SAS)

∴EH=DF ∠DFM=∠HEF

∴EH//DF

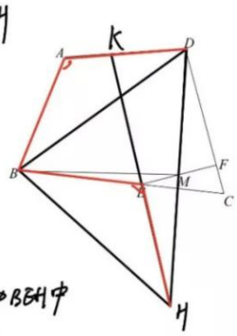
延长HE交AD于K点，

∵KH//CD

∴∠KEB=∠C=180°−∠A

∴∠A+∠KEB=180°

∴∠A=∠BEH



在△BAD和△BEH中

$\begin{cases} BA=BE \\ \angle A=\angle BEH \\ AD=EH \end{cases}$

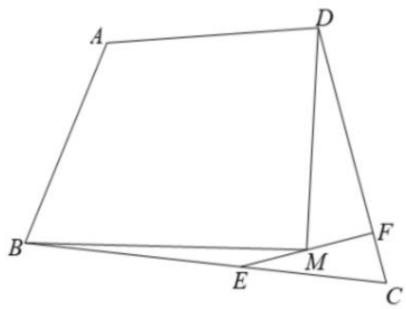
∴△BAD≌△BEH(SAS)

∴BD=BH

∴△BDH为等腰三角形

又∵M为DH中点，

∴BM⊥DH



脚拉脚中的结论变形

6、如图，AB=AC，∠ABC=β，CE=ED，∠CED=2β，点 P 为 BD 的中点，连接 AE、PE，当β=60°时，求$\frac{AE}{PE}$

解：延长EP到H点，使HP=PE，连HB AH.AP

∵β=60°

∴∠ABC=60° ∠CED=120°

又∵AB=AC

∴△ABC为等边三角形

∵P为BD中点，

∴BP=DP

在△HBP和△EDP中

$\begin{cases} BP=DP \\ \angle BPH=\angle DPE \\ HP=EP \end{cases}$

∴△HBP≌△EDP(SAS)

∴BH=DE ∠HBP=∠EDP

∴HB//DE

延长AB交DE于K点

∵在四边形AKEC中

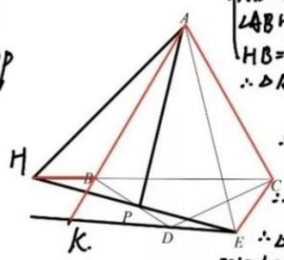
∠KAC+∠KEC=180°

∴∠AKE+∠ACE=180°

又∵HB//KE

∴∠HBA+∠HBK=∠HBA+∠BKE=180°

∴∠HBA=∠ECA



在△AHB和△AEC中

$\begin{cases} AB=AC \\ \angle ABH=\angle ACE \\ HB=EC \end{cases}$

∴△AHB≌△AEC(SAS)

∴AH=AE

∠HAB=∠EAC

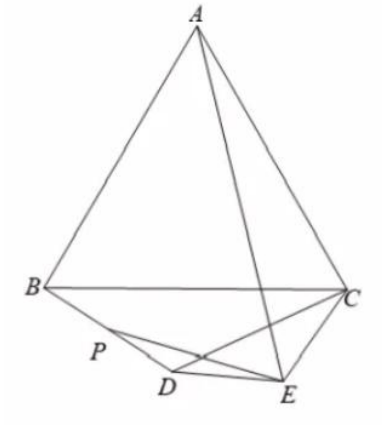
∴∠HAE=∠BAC=60°

∴△AHE为等边△

又∵P为HE中点，

∴HP=EP=$\frac{1}{2}$AE

∴$\frac{AE}{PE}$=2



7、如图，AC=BC，∠ACB=90°，BD=ED，∠BDE=90°，点 K 为 CD 的中点，点 F 为 AE 的中点，连接 FK，求证：CD=2 FK.

证明：延长DF到H点，使HF=DF

∵F为AE中点，

∴AF=EF

在△HFA和△DFE中

$\begin{cases} AF=EF \\ \angle AFH=\angle EFD \\ HF=DF \end{cases}$

∴△HFA≌△DFE(SAS)

∴AH=DE=BD

∠AHF=∠EDF

∴AH//DE

延长CA交ED于K点

∵HA//ED

∴∠CAH=∠CKE

在四边形CKDB中

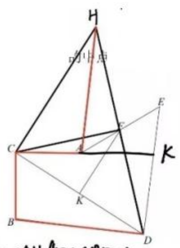
∠ACB+∠KDB=180°

∴∠CBD+∠CKD=180°

又∵∠CKE=∠CAH

∠CKE+∠CKD=180°

∴∠CAH=∠CBD



在△CAH和△CBD中

$\begin{cases} CB=CA \\ \angle CBD=\angle CAH \\ BD=AH \end{cases}$

∴△CAH≌△CBD(SAS)

∴CH=CD ∠HCA=∠DCB

∴∠HCD=∠ACB=90°

∵F为HD中点

∴∠FCD=$\frac{1}{2}$∠HCD=45° ∠CFD=90°

∴∠FCK=∠FDC=45°

△CFD为等腰直角三角形

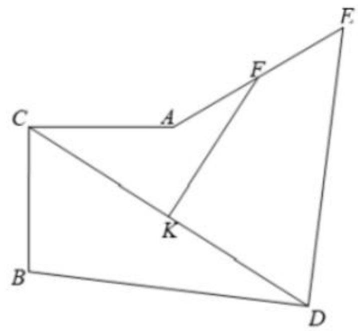
又∵K为CD中点

∴FK⊥CD FK平分∠CFD

∴∠FCK=∠CKF=∠KFD=∠KDF=45

∴CD=CK+KD

=2FK



8、如图，△ABC 中，分别以 AB、AC 为斜边向外作等腰 Rt△ABF 和等腰 Rt△ACE，D 为 BC 中点，连接 DF、ED，求证：$S_{五边形AFBCE}=DF^2$

(1) △EDC≌△HDC (SAS)

(2) △FAE≌△FBH (SAS)

∴$S_{五边形AFBCE}=S_{\triangle FEH}=\frac{EH\cdot FD}{2}$

$=\frac{2DF\cdot DF}{2}=DF^2$