2021年武汉市初中毕业生学业考试数学试卷

一、选择题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1．实数 3 的相反数是（　B　）

A．3　　　B．-3　　　C．$\frac{1}{3}$　　　D．$-\frac{1}{3}$

2．下列事件中是必然事件的是（　D　）

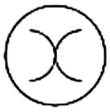
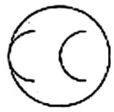
A．抛掷一枚质地均匀的硬币，正面朝上

B．随意翻到一本书的某页，这一页的页码是偶数

C．打开电视机，正在播放广告

D．从两个班级中任选三名学生，至少有两名学生来自同一个班级

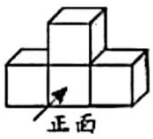
3．下列图形都是由一个圆和两个相等的半圆组合而成的，其中既是轴对称图形又是中心对称图形的是（ A ）

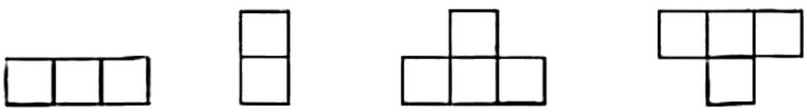
A. 　B. 　C. 　D. 

4．计算$(-a^2)^3$的结果是（　A　）

A．$-a^6$　　　B．a^6　　　C．$-a^5$　　　D．a^5

5．如图是由 4 个相同的小正方体组成的几何体，它的主视图是（　C　）





A．　　　B．　　　C．　　　D．

6．学校招募运动会广播员，从两名男生和两名女生共四名候选人中随机选取两人，则两人恰好是一男一女的概率是（　C　）

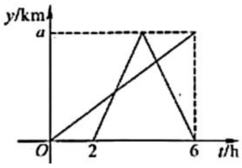
A．$\frac{1}{3}$　　　B．$\frac{1}{2}$　　　C．$\frac{2}{3}$　　　D．$\frac{3}{4}$

7，我国古代数学名著《九章算术》中记载：“今有共买物，人出八，盈三；人出七，不足四，问人数，物价各几何？”意思是现有几个人共买一件物品，每人出 8 钱．多出 3 钱；每人出 7 钱，差 4 钱．问人数，物价各是多少？若设共有 x 人，物价是 y 钱，则下列方程正确的是（　D　）

A．$8(x-3)=7(x+4)$　　　B．$8x+3=7x-4$　　　C．$\frac{y-3}{8}=\frac{y+4}{7}$　　　D．$\frac{y+3}{8}=\frac{y-4}{7}$

8．一辆快车和一辆慢车将一批物资从甲地运往乙地，其中快车送达后立即沿原路返回，且往返速度的大小不变，两车离甲地的距离 y（单位：km）与慢车行驶时间 t（单位：h）的函数关系如图（公众号：武汉数学），则两车先后两次相遇的间隔时间是（　B　）

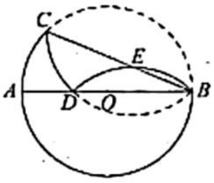
A．$\frac{5}{3}$h　　　B．$\frac{3}{2}$h　　　C．$\frac{7}{5}$h　　　D．$\frac{4}{3}$h

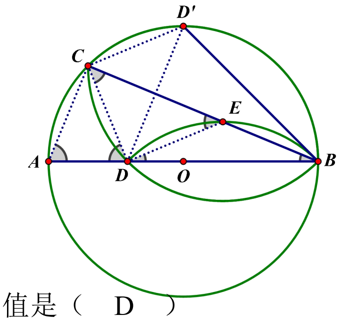


9．如图，AB 是⊙O 的直径，BC 是⊙O 的弦，先将$\widehat{BC}$沿 BC 翻折交 AB 于点 D．再将$\widehat{BD}$沿 AB 翻折交 BC 于点 E．若$\widehat{BE}=\widehat{DE}$，设∠$ABC$=$\alpha$，则$\alpha$所在的范围是（　B　）

A．21.9°＜α＜22.3°　　　　B．22.3°＜α＜22.7°

C．22.7°＜α＜23.1°　　　　D．23.1°＜α＜23.5°





10．已知 a，b 是方程 $x^2-3x-5=0$ 的两根，则代数式 $2a^3-6a^2+b^2+7b+1$ 的值是（　D　）

A．－25　　　B．－24　　　C．35　　　D．36

【武汉 TOP 学案网 www.whedu.top 整理】

二、填空题（共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

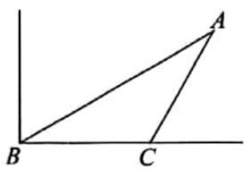
11．计算 $\sqrt{(-5)^2}$ 的结果是____5____.

12．我国是一个人口资源大国，第七次全国人口普查结果显示，北京等五大城市的常住人口数如下表，这组数据的中位数是___2189_______.

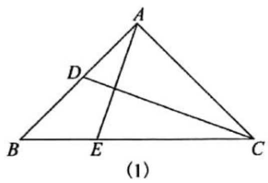
城市	北京	上海	广州	重庆	成都
常住人口数/万	2 189	2 487	1 868	3 205	2 094

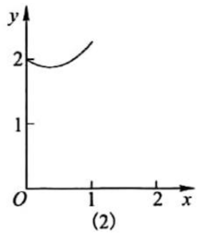
13．已知点 $A(a，y_1)$，$B(a+1，y_2)$在反比例函数 $y=\dfrac{m^2+1}{x}$（m 是常数）的图象上，且 $y_1<y_2$，则 a 的取值范围是___-1＜a＜0____.

14．如图，海中有一个小岛 A，一艘轮船由西向东航行，在 B 点测得小岛 A 在北偏东 60°方向上；航行 12 n mile 到达 C 点，这时测得小岛 A 在北偏东 30°方向上．小岛 A 到航线 BC 的距离是____10.4______n mile（$\sqrt{3}\approx1.73$，结果用四舍五入法精确到 0.1）.



第 14 题





第 16 题

15．已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 是常数），$a+b+c=0$，下列四个结论：

①若抛物线经过点$(-3,0)$，则 b＝2a；

②若 $b=c$，则方程 $cx^2+bx+a=0$ 一定有根 $x=-2$；

③抛物线与 x 轴一定有两个不同的公共点；

④点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$在抛物线上，若 0＜a＜c，则当$x_1<x_2<1$ 时，$y_1>y_2$.

其中正确的是___①②④____（填写序号）.

16．如图（1），在△*ABC* 中，*AB*＝*AC*，∠*BAC*＝90°，边 *AB* 上的点 *D* 从顶点 *A* 出发，向顶点 *B* 运动，同时，边 *BC* 上的点 *E* 从顶点 *B* 出发，向顶点 *C* 运动，*D*，*E* 两点运动速度的大小相等，设 *x*＝*AD*，*y*＝*AE*＋*CD*，*y* 关于 *x* 的函数图象如图（2），图象过点（0，2），则图象最低点的横坐标是___$\sqrt{2}-1$_______.

【武汉 TOP 学案网 www.whedu.top 整理】

解法一：过 A 作 AH⊥BC 于 H，如下图 1，

y=AE+CD= $\sqrt{\mathrm{EH}^2+\mathrm{AH}^2}+\sqrt{AD+AC^2}$=$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{x}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}+\sqrt{1+x^2}$

可以认为 y 是动点（x,0）到（$\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\frac{\sqrt{2}}{2}$）和点（0,-1）的距离之和（如下图 2）。如图，当 A、P、B 三点共线时，y 最小，利用 A 形相似求出 OP 的长即可。x=$\sqrt{2}$-1

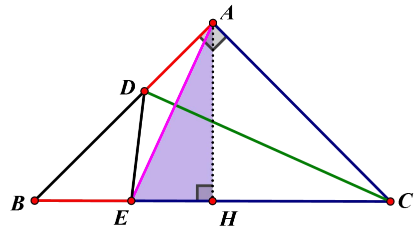


图 1

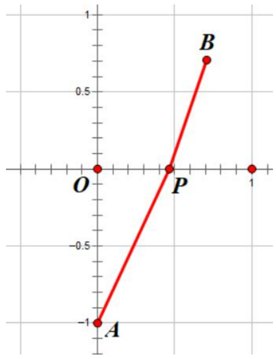


图 2

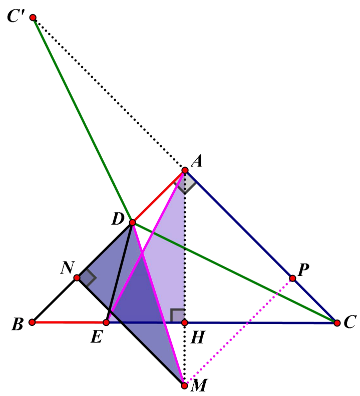


图 3

解法二：辅助线如图（如上图 3），构造 DM=AE，DC’=DC，则 y=C’D+DM，即 C’、D、M 三点共线时，y 最小，其他同解法一。

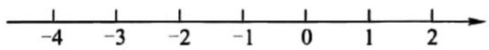
三、解答题（共 8 小题，共 72 分）

17．（本小题满分 8 分）解不等式组$\begin{cases}2x\geq x-1 & ① \\ 4x+10>x+1 & ②\end{cases}$请按下列步骤完成解答．

（1）解不等式①，得______x≥-1_______；

（2）解不等式②，得_______x＞-3______；

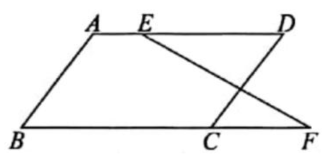
（3）把不等式①和②的解集在数轴上表示出来；



（4）原不等式组的解集是_____x≥-1________．

18．（本小题满分 8 分）

如图，*AB*∥*CD*，∠*B*＝∠*D*，直线 *EF* 与 *AD*，*BC* 的延长线分别交于点 *E*，*F*．求证：∠*DEF*＝∠*F*．



证明：∵*AB*∥*CD*，

∴∠*DCF*＝∠*B*．

∵∠*B*＝∠*D*，

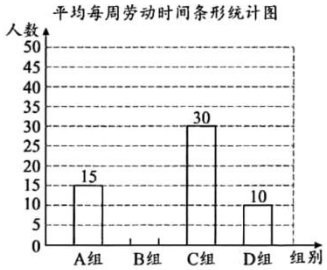
∴∠*DCF*＝∠*D*．

∴*AD*∥*BC*．

∴∠*DEF*＝∠*F*．

另解：此题也可以运用三角形内角和定理求证．

19．（本小题满分 8 分）为了解落实国家《关于全面加强新时代大中小学劳动教育的意见》的实施情况，某校从全体学生中随机抽取部分学生，调查他们平均每周劳动时间 t（单位：h），按劳动时间分为四组：A 组“$t<5$”，B 组“$5\leqslant t<7$”，C 组“$7\leqslant t<9$”，D 组“$t\geqslant 9$”．将收集的数据整理后，绘制成如下两幅不完整的统计图．



根据以上信息，解答下列问题：

（1）这次抽样调查的样本容量是___100_____，C 组所在扇形的圆心角的大小是___108°____；

（2）将条形统计图补充完整；（B 组：45 人）

（3）该校共有 1 500 名学生，请你估计该校平均每周劳动时间不少于 7 h 的学生人数．

（3）解：$1500\times\frac{40}{100}=600$(人)．

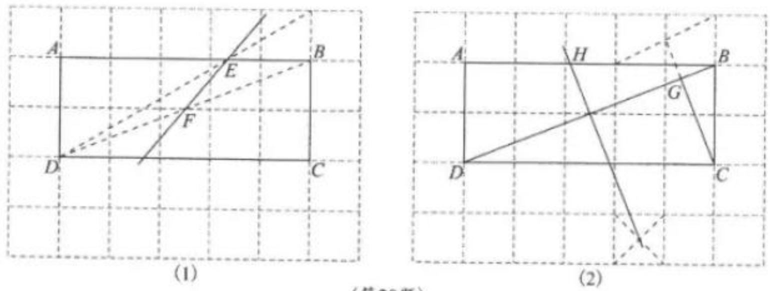
∴估计该校平均每周劳动时间不少于 7 h 的学生人数大约有 600 人．

【武汉 TOP 学案网 www.whedu.top 整理】

20．（本小题满分 8 分）如图是由小正方形组成的 5×7 网格，每个小正方形的顶点叫做格点，矩形 $ABCD$ 的四个顶点都是格点．仅用无刻度的直尺在给定网格中完成画图，画图过程用虚线表示．

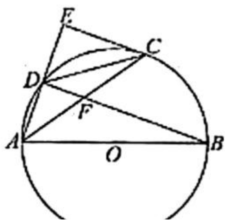
（1）在图（1）中，先在边 AB 上画点 E，使 $AE=2BE$，再过点 E 画直线 EF，使 EF 平分矩形 $ABCD$ 的面积；

（2）在图（2）中，先画△BCD 的高 CG，再在边 AB 上画点 H，使 $BH=DH$．



（第20题）

21．（本小题满分 8 分）如图，AB 是⊙O 的直径，CD 是⊙O 上两点，C 是$\overset{\frown}{BD}$的中点，过点 C 作 AD 的垂线，垂足是 E．连接 AC 交 BD 于点 F．



（1）求证，CE 是⊙O 的切线：

（2）若 $\dfrac{DC}{DF}=\sqrt{6}$，求 $\cos\angle ABD$ 的值．

21．（1）证明：连接 OC 交 BD 于点 G．

∵点 C 是$\overset{\frown}{BD}$ 的中点，

∴由圆的对称性得 OC 垂直平分 BD．

∵AB 是⊙O 的直径，∴$\angle ADB=90°$，∴$\angle EDB=90°$．

∵$CE\perp AE$，∴$\angle E=90°$．

∴四边形 $EDGC$ 是矩形，∴$\angle ECG=90°$．

∴CE 是⊙O 的切线．

（2）解：连接 BC，设 $FG=x$, $OB=r$．

∵$\frac{DC}{DF}=\sqrt{6}$，∴设 $DF=t$，$DC=\sqrt{6}\,t$．

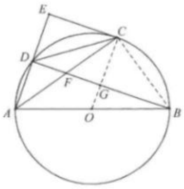
由（1）得，$BC=CD=\sqrt{6}\,t$，$BG=GD=x+t$．

∵AB 是⊙O 的直径，∴$\angle ACB=90°$．

∴$\angle BCG+\angle FCG=90°$，$\angle CFB+\angle FCG=90°$，

∴$\angle BCG=\angle CFB$，∴Rt△BCG∽Rt△BFC．

∴$BC^2=BG\cdot BF$，∴$(\sqrt{6}\,t)^2=(x+t)(2x+t)$．



解得，$x_1=t$，$x_2=-\frac{5}{2}t$（不符合题意，舍去）．

∴$CG=\sqrt{BC^2-BG^2}=\sqrt{(\sqrt{6}\,t)^2-(2t)^2}=\sqrt{2}\,t$，$OG=r-\sqrt{2}\,t$．

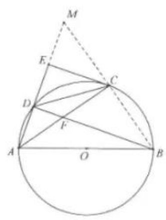
在 Rt△OBG 中，由勾股定理得 $OG^2+BG^2=OB^2$．

∴$(r-\sqrt{2}\,t)^2+(2t)^2=r^2$，解得，$r=\frac{3\sqrt{2}}{2}t$．

∴$\cos\angle ABD=\frac{BG}{OB}=\frac{2t}{\frac{3\sqrt{2}t}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$．

另解：如图，分别延长 BC，AE 交于点 M，可证 C 为 BM 的中点．

由 $\frac{DC}{DF}=\sqrt{6}$，设 $DF=t$，$DC=\sqrt{6}\,t$.设 $BF=y$，证△BCF∽△BDM，得 $\frac{CB}{BF}=\frac{BD}{BM}$，$\frac{\sqrt{6}t}{y}=\frac{y+t}{2\sqrt{6}t}$，得 $y=3t$.下略．



22.（本小题满分 10 分）在“乡村振兴”行动中，某村办企业以 A，B 两种农作物为原料开发了一种有机产品，A 原料的单价是 B 原料单价的 1.5 倍，若用 900 元收购 A 原料会比用 900 元收购 B 原料少 100 kg．生产该产品每盒需要 A 原料 2 kg 和 B 原料 4 kg，每盒还需其他成本 9 元．市场调查发现：该产品每盒的售价是 60 元时，每天可以销售 500 盒；每涨价 1 元，每天少销售 10 盒．

（1）求每盒产品的成本（成本=原料费+其他成本）；

（2）设每盒产品的售价是 x 元（x 是整数），每天的利润是 w 元，求 w 关于 x 的函数解析式（不需要写出自变量的取值范围）；

（3）若每盒产品的售价不超过 a 元（a 是大于 60 的常数，且是整数），直接写出每天的最大利润．

22．解：（1）设 B 原料单价为 m 元，则 A 原料单价为 $1.5m$ 元．

依题意，得 $\dfrac{900}{m}-\dfrac{900}{1.5m}=100$．

解得，$m=3$，$1.5m=4.5$．

经检验，$m=3$ 是原方程的根．

∴ 每盒产品的成本为：$4.5\times2+4\times3+9=30$（元）．

答：每盒产品的成本为 30 元．

（2）$w=(x-30)[500-10(x-60)]$

$=-10x^2+1\,400x-33\,000$．

（3）当 $a\geq70$ 时，每天的最大利润为 16 000 元；

当 $60<a<70$ 时，每天的最大利润为 $(-10a^2+1\,400a-33\,000)$ 元．

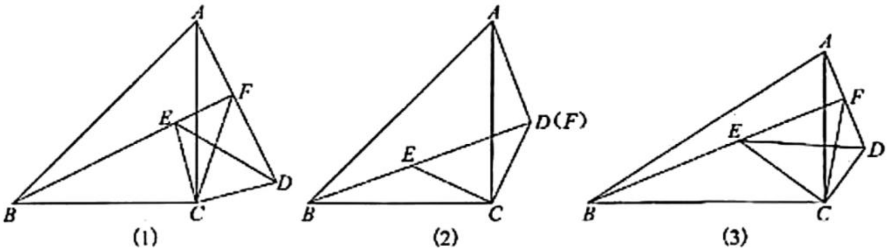
23．（本小题满分 10 分）【武汉 TOP 学案网 www.whedu.top 整理】

问题提出 如图（1），在△ABC 和△DEC 中，$\angle ACB=\angle DCE=90°$，$BC=AC$，$EC=DC$，点 E 在△ABC 内部，直线 AD 与 BE 交于点 F，线段 AF，BF，CF 之间存在怎样的数量关系？

问题探究 （1）先将问题特殊化．如图（2），当点 D，F 重合时，直接写出一个等式，表示 AF，BF，CF 之间的数量关系；

（2）再探究一般情形．如图（1），当点 D，F 不重合时，证明（1）中的结论仍然成立．

问题拓展 如图（3），在△ABC 和△DEC 中，$\angle ACB=\angle DCE=90°$，$BC=kAC$，$EC=kDC$（$k$ 是常数），点 E 在△ABC 内部，直线 AD 与 BE 交于点 F，直接写出一个等式，表示线段 AF，BF，CF 之间的数量关系．



问题探究 (1) $BF-AF=\sqrt{2}\ CF$.

(2)证明：过点 C 作 CG 作 $CG\perp CF$ 交 BE 于点 G， 则 $\angle FCG=\angle ACB=90°$，

∴ $\angle BCG=\angle ACF$.

∵ $\angle ACB=\angle DCE=90°$，

∴ $\angle BCE=\angle ACD$.

又∵ $AC=BC$，$DC=EC$，

∴ △ACD≌△BCE

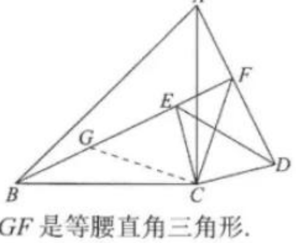
∴ $\angle CAF=\angle CBG$.

∴△ACF≌△BCG.

∴ $AF=BG$，$CF=CG$，∴△CGF 是等腰直角三角形.

∴ $GF=\sqrt{2}\ CF$.

∴ $BF-AF=BF-BG=GF=\sqrt{2}\ CF$.



另解：过点 C 作 $\angle BFD$ 两边的垂线也可以求证.

问题拓展 $BF-k\cdot AF=\sqrt{1+k^2}\ CF$.

24．（本小题满分 12 分）【武汉 TOP 学案网 www.whedu.top 整理】

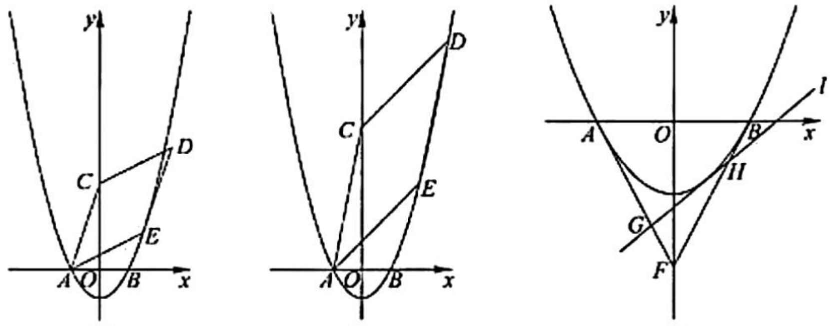
抛物线 $y=x^2-1$ 交 x 轴于 A，B 两点（A 在 B 的左边）.

（1）□$ACDE$ 的顶点 C 在 y 轴的正半轴上，顶点 E 在 y 轴右侧的抛物线上.

①如图（1），若点 C 的坐标是$(0，3)$，点 E 的横坐标是 $\dfrac{3}{2}$，直接写出点 A，D 的坐标；

②如图（2），若点 D 在抛物线上，且□$ACDE$ 的面积是 12，求点 E 的坐标；

（2）如图（3），F 是原点 O 关于抛物线顶点的对称点，不平行 y 轴的直线 l 分别交线段 AF，BF（不含端点）于 G，H 两点，若直线 l 与抛物线只有一个公共点，求证 $FG+FH$ 的值是定值.



（1）　　（2）　　（3）

24．（1）①$A(-1，0)$，$D(\frac{5}{2}，\frac{17}{4})$；

②解：设点 C 坐标为$(0，n)$，点 E 坐标为$(m，m^2-1)$．

∵四边形 $ACDE$ 是平行四边形，

∴将 AC 沿 AE 平移可与 ED 重合，点 D 坐标为$(m+1，m^2-1+n)$．

∵点 D 在抛物线上，∴$m^2-1+n=(m+1)^2-1$.

解得，$n=2m+1$，所以 $C(0，2m+1)$.

连 CE，过点 E 作 x 轴垂线，垂足为 M，过点 C 作 $CN\perp EM$，垂足为 N．

则 $S_{\triangle ACE}=S_{梯形AMNC}-S_{\triangle AME}-S_{\triangle CNE}$.

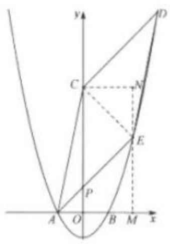
∵$S_{□ACDE}=12$，$A(-1，0)$，

∴$6=\frac{1}{2}(m+m+1)(2m+1)-\frac{1}{2}(m+1)(m^2-1)-\frac{1}{2}m[2m+1-(m^2-1)]$.

∴$m^2+3m-10=0$．解得 $m_1=2$，$m_2=-5$（不合题意，舍去）.

∴点 E 的坐标是$(2，3)$．

另解： 直线 AE 交 y 轴于点 P，先运用代数法或几何法求出点 P 的坐标．再运用 $S_{\triangle ACE}=S_{\triangle ACP}+S_{\triangle CEP}$，建立方程可得 m 的值.



法一： 证明：依题意，得 $B（1，0）$，$F（0，-2）$

设直线 BF 解析式为 $y=kx+b$，则 $\begin{cases}k+b=0,\\ b=-2\end{cases}$.　解得 $\begin{cases}k=2,\\ b=-2\end{cases}$.

∴直线 BF 的解析式为 $y=2x-2$.

同理，直线 AF 的解析式为 $y=-2x-2$.

设直线 l 的解析式为 $y=tx+n$.

联立 $\begin{cases}y=tx+n,\\ y=x^2-1\end{cases}$，消去 y 得 $x^2-tx-n-1=0$.

∵直线 l 与抛物线只有一个公共点，

∴$\triangle=(-t)^2-4(-n-1)=0$，$n=-\frac{t^2}{4}-1$.

联立 $\begin{cases}y=2x-2,\\ y=tx-\frac{t^2}{4}-1\end{cases}$，且 $t\neq 2$，解得，$x_H=\frac{t+2}{4}$

同理，得 $x_G=\frac{t-2}{4}$.

∵A，B 两点关于 y 轴对称，∴$\angle AFO=\angle BFO$.

∴$FG+FH=\frac{-x_G}{\sin\angle AFO}+\frac{x_H}{\sin\angle BFO}=\frac{1}{\sin\angle AFO}(x_H-x_G)=\sqrt{5}$.

∴$FG+FH$ 的值为$\sqrt{5}$.