12.1 全等三角形

【学习任务】

理解全等形和全等三角形的概念，掌握全等三角形的性质．

通过平移、翻折和旋转变换，感知两个全等三角形的特征．

掌握全等的判定定理，并能够灵活运用全等三角形的性质解决线段或角相等的问题　．

通过观察、比较和猜想等过程，探索、归纳两个三角形全等的证明条件，提高逻辑思维能力　．

【知识梳理】

说明：由于题库系统原因，讲义中全等符号“ ≅ ”，统一更正为“≌”，不再另行说明。

能够完全重合的两个图形叫做**全等形**（congruent figures）．能够完全重合的两个三角形叫做**全等三角形**（congruent triangles）．把两个全等的三角形重合在一起，重合的顶点叫做**对应顶点**，重合的边叫做**对应边**，重合的角叫做**对应角**．全等用符号“ ≅ ”表示，读作“全等于”．

全等三角形的性质

全等三角形的对应边相等，全等三角形的对应角相等．

全等三角形的判定

① 三边分别相等的两个三角形全等（可以简写成“边边边”或“ ***SSS*** ”）；

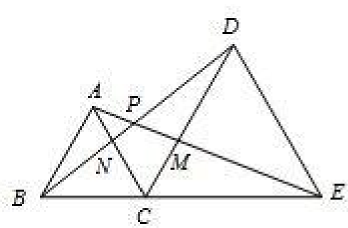
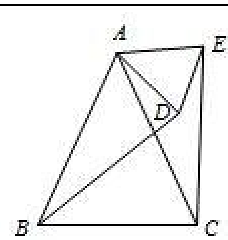
② 两边和它们的夹角分别相等的两个三角形全等（可以简写成“边角边”或“ ***SAS*** ”）；

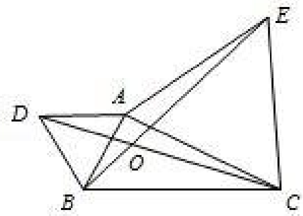
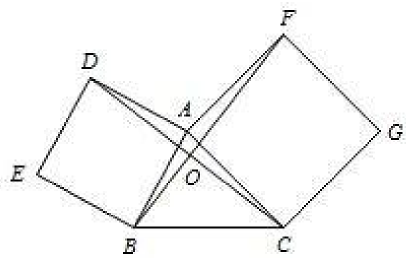
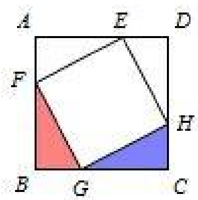
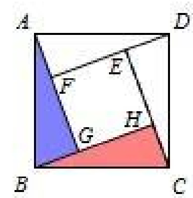
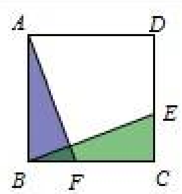
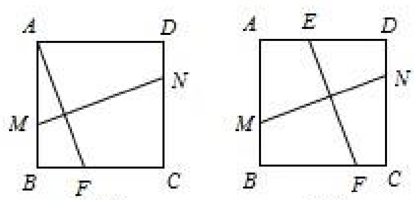
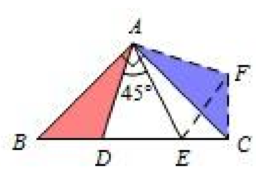
③ 两角和它们的夹边分别相等的两个三角形全等（可以简写成“角边角”或“ ***ASA*** ”）；

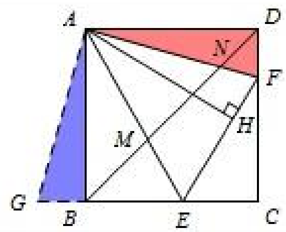
④ 两角和其中一个角的对边分别相等的两个三角形全等（可以简写成“角角边”或“ ***AAS*** ”）；

⑤ 斜边和一条直角边分别相等的两个直角三角形全等（可以简写成“斜边、直角边”或“ ***HL*** ”）．

全等三角形的性质补充：全等三角形的对应线段相等。（对应边上的中线、对应边上的高、对应角的角平分线分别相等）

模型	已知	如图	结论
三角形手拉手	等边三角形 ABC 与等边三角形 CDE，点 B、C、E 三点共线，连接 AE，BD 相交于点 P，AE 与 CD 相交于点 M，BD 与 AC 相交于点 N		①$\triangle BCD≌\triangle ACE$ ②$BD=AE$ ③ $\angle APB=60°$ ④CP 平分$\angle BPE$ ⑤$\triangle CMN$ 为等边三角形 ⑥$PB=PA+PC$ ⑦$PE=PD+PC$
	等腰三角形 ABC 与等腰三角形 ADE，且$\angle BAC=\angle DAE$，连接 BD，CE		①$\triangle ABD≌\triangle ACE$ ②$BD=CE$ ③BD与 CE的夹角等于$\angle BAC$ 或和$\angle BAC$ 互补

	△ABC 中，以 AB 为边作等边三角形 ADB，以 AC 为边作等边三角形 ACE，连接 DC、BE，相交于点 O		①△ADC≌△ABE ②$DC=BE$ ③ $\angle DOB=60°$
正方形手拉手	△ABC 中，以 AB 为边作正方形 $ABED$，以 AC 为边作正方形 $ACGF$，连接 DC、BF，相交于点 O		①△ADC≌△ABF ②$CD=BF$ ③ $\angle DOB=90°$
三垂直	正方形 $FGHE$ 各顶点在正方形 $ABCD$ 各边上		① △ FGB ≌ △ GHC ≌△HED≌△EFA
	在正方形 $ABCD$ 中，$AG\perp BH$，$BH\perp CE$，$CE\perp DF$，$DF\perp AG$		①△AGB≌△BHC≌△CED≌△DFA ②$AG=BH=CE=DF$
	在正方形 $ABCD$ 中，点 F 在 BC 边上，连接 AF，作 $BE\perp AF$，交 CD 于点 E		①△ABF≌△BCE ②$AF=BE$ ③$AF\perp BE$
三垂直拓展	在正方形 $ABCD$ 中，图①中点 F 在 BC 边上，连接 AF，作 $MN\perp AF$，交 CD 于点 N，交 AB 于点 M； 图②E 在 AD 上，F 在 BC 上，M 在 AB 上，N 在 CD 上，$MN\perp EF$	图① 图②	图①中 $AF=MN$ 图②中 $EF=MN$
半角	在等腰直角三角形 ABC 中，点 D、E 在边 BC 上，$\angle DAE=45°$		将△ABD 绕着点 A 旋转 90° 到△ACF，则△ABD≌△ACF ①△ABE∽△DCA ② $DE^2=BD^2+CE^2$ ③△ADE≌△AEF

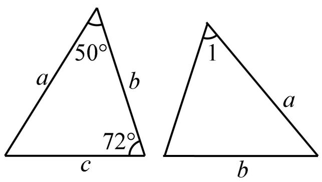
模型	在正方形 $ABCD$ 中，连接 BD，点 E 在边 BC 上，点 F 在边 DC 上，$\angle FAE=45°$，$AH\perp EF$ 于点 H		将△AFD 绕着点 A 旋转 90° 到△AGB，则△AFD≌△AGB ①$AH=AB$ ②$DF+BE=EF$ ③ $MN^2=BM^2+DN^2$

【同步讲练】

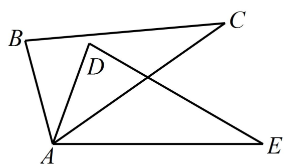
一、选择题

1. 已知图中的两个三角形全等，则 $\angle 1$ 等于 (　　)

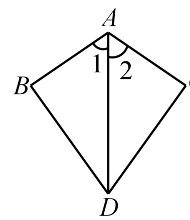
A. $72°$　　B. $60°$　　C. $50°$　　D. $58°$



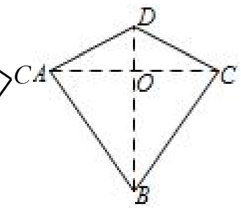
第 1 题图



第 2 题图



第 3 题图



第 4 题图

2. 如图，$\triangle ABC\cong\triangle ADE$，$\angle B=80°$，$\angle C=30°$，$\angle DAC=35°$，则 $\angle EAC$ 的度数为 (　　)

A. $40°$　　B. $35°$　　C. $30°$　　D. $25°$

3. 如图，已知 $\angle 1=\angle 2$，则不一定能使 $\triangle ABD\cong\triangle ACD$ 的条件是 (　　)

A. $AB=AC$　　B. $BD=CD$

C. $\angle B=\angle C$　　D. $\angle BDA=\angle CDA$

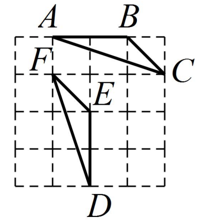
4. 两组邻边分别相等的四边形叫做"筝形"．如图，四边形 $ABCD$ 是一个筝形，其中 $AD=CD$，$AB=CB$．詹姆斯在探究筝形的性质时，得到如下结论：① $AC\perp BD$；② $AO=CO=\frac{1}{2}AC$；③ $\triangle ABD\cong\triangle CBD$．其中正确的结论有 (　　)

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

5. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 3，5，7，$\triangle DEF$ 的三边长分别为 3，$3x-2$，$2x-1$，若这两个三角形全等，则 x 为 (　　)

A. $\frac{7}{3}$　　B. 4　　C. 3　　D. 不能确定

6. 方格纸中，每个小格顶点叫做格点．以格点连线为边的三角形叫格点三角形．如图在 4×4 的方格纸中，有两个格点三角形 $\triangle ABC$、$\triangle DEF$．下列说法中，成立的是 (　　)

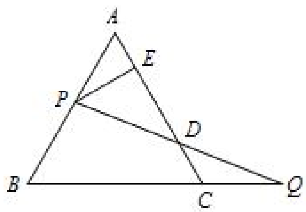


A. $\angle BCA=\angle EDF$　　B. $\angle BCA=\angle EFD$

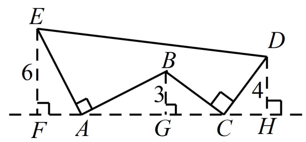
C. $\angle BAC=\angle EFD$　　D. 这两个三角形中没有相等的角

7. 如图，过边长为 1 的等边 $\triangle ABC$ 的边 AB 上一点 P，作 $PE \perp AC$ 于 E，Q 为 BC 延长线上一点，当 $PA = CQ$ 时，连 PQ 交 AC 边于 D，则 DE 的长为（　　）

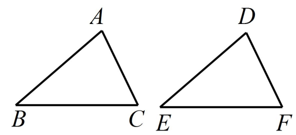
A. $\frac{1}{3}$　　　　B. $\frac{1}{2}$　　　　C. $\frac{2}{3}$　　　　D. 不能确定



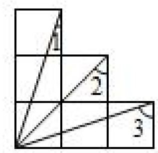
第 7 题图



第 8 题图



第 9 题图



第 10 题图

8. 如图，$AE \perp AB$ 且 $AE = AB$，$BC \perp CD$ 且 $BC = CD$，请按照图中所标注的数据，计算图中实线所围成的图形的面积 S 为（　　）

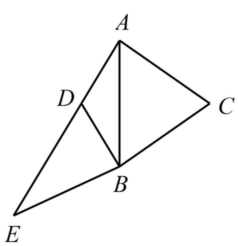
A. 50　　　　B. 62　　　　C. 65　　　　D. 68

二、填空题

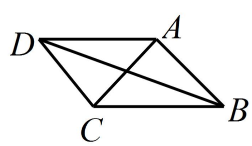
9. 如图，下列四组条件中：① $AB = DE$，$BC = EF$，$AC = DF$；② $AB = DE$，$\angle B = \angle E$，$BC = EF$；③ $AB = DE$，$AC = DF$，$\angle B = \angle E$；④ $\angle B = \angle E$，$BC = EF$，$\angle C = \angle F$．其中不一定能使 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 的条件是__________（只填序号）．

10. 如图为 6 个边长等的正方形的组合图形，则 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 =$ ________ °．

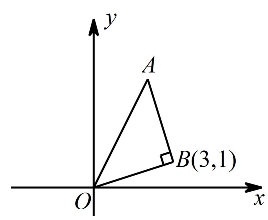
11. 如图，E 是 $\triangle ABC$ 外一点，D 是 AE 上一点，$AC = BC = BE$，$DA = DB$，$\angle EBD = \angle CBD$，$\angle C = 70^\circ$，则 $\angle BED$ 的度数为________．



第 11 题图



第 12 题图



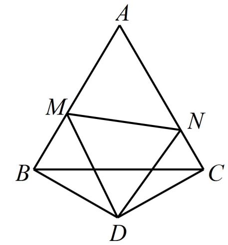
第 13 题图

12. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD = 4$，$CD = 3$，$\angle ABC = \angle ACB = \angle ADC = 45^\circ$，则 BD 的长为________．

补充知识：**【勾股定理】在平面上的一个直角三角形中，两个直角边边长的平方加起来等于斜边长的平方。如果设直角三角形的两条直角边长度分别是 a 和 b，斜边长度是 c，那么可以用数学语言表达：**$a^2 + b^2 = c^2$

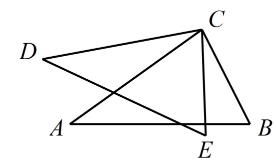
13. 如图所示，在平面坐标系中 $B(3,1)$，$AB = OB$，$\angle ABO = 90^\circ$，则点 A 的坐标是________．

14. 如图，$\triangle ABC$ 是边长为 3 的等边三角形，$\triangle BDC$ 是等腰三角形，且 $\angle BDC=120°$．以 D 为顶点作一个 $60°$ 角，使其两边分别交 AB 于点 M，交 AC 于点 N，连接 MN，则 $\triangle AMN$ 的周长为________.

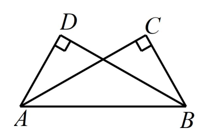


三、解答题

15. 如图 $CE=CB$，$CD=CA$，$\angle DCA=\angle ECB$，求证：$DE=AB$．



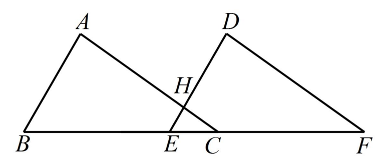
16. 如图，$AC\perp BC$，$BD\perp AD$，垂足分别为 C，D，$AC=BD$．求证：$BC=AD$．



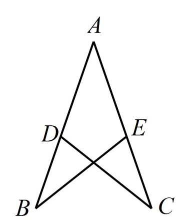
17. 如图，已知 $\triangle ABC\cong\triangle DEF$，$\angle A=85°$，$\angle B=60°$，$AB=8$，$EH=2$．

（1）求 $\angle F$ 的度数与 DH 的长；

（2）求证：$AB\parallel DE$．



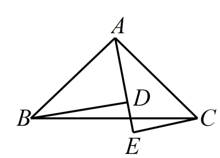
18. 如图，D 在 AB 上，E 在 AC 上，$AB=AC$，$\angle B=\angle C$，求证：$BD=CE$．



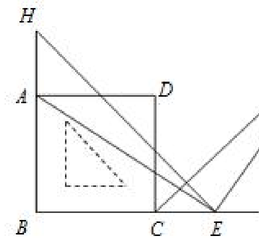
19. 如图所示，A，D，E 三点在同一直线上，且 $\triangle BAD\cong\triangle ACE$，试说明：

（1）$BD=CE+DE$；

（2）当 $\triangle ABD$ 满足什么条件时，$BD\parallel CE$？



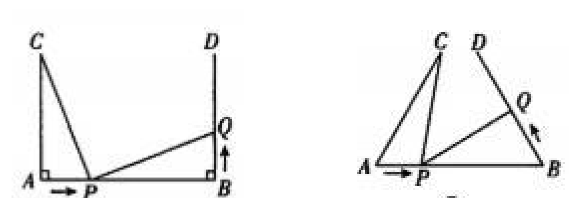
20. 如图，一个含 45° 的三角板 HBE 的两条直角边与正方形 $ABCD$ 的两邻边重合，过 E 点作 $EF \perp AE$ 交 $\angle DCE$ 的角平分线于 F 点，试探究线段 AE 与 EF 的数量关系，并说明理由.



21. 如图①，$AB = 4\ \text{cm}$，$AC \perp AB$，$BD \perp AB$，$AC = BD = 3\ \text{cm}$. 点 P 在线段 AB 上以 $1\ \text{cm/s}$ 的速度由点 A 向点 B 运动，同时，点 Q 在线段 BD 上由点 B 向点 D 运动，它们运动的时间为 t s.

（1）若点 Q 的运动速度与点 P 的运动速度相等，当 $t = 1$ s 时，$\triangle ACP$ 与 $\triangle BPQ$ 是否全等?请说明理由，并判断此时线段 PC 和线段 PQ 的位置关系.

（2）如图②，将图①中的“$AC \perp AB$，$BD \perp AB$”改为“$\angle CAB = \angle DBA = 60^\circ$”，其他条件不变．设点 Q 的运动速度为 $x\ \text{cm/s}$，是否存在实数 x，使得 $\triangle ACP$ 与 $\triangle BPQ$ 全等?若存在，求出相应的 x，t 的值；若不存在，请说明理由.



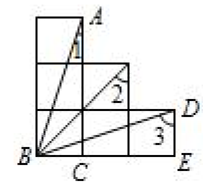
① ②

12.1 全等三角形 答案

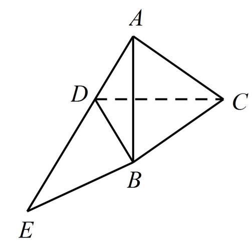
第一部分

1. D　2. B　3. B　4. D　5. C　6. B　7. B　8. A

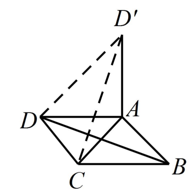
第二部分



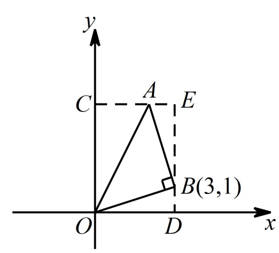
9. ③　10. 135【解析】观察图形可知：$\triangle ABC \cong \triangle BDE$，$\therefore \angle 1 = \angle DBE$，又$\because \angle DBE + \angle 3 = 90^\circ$，$\therefore \angle 1 + \angle 3 = 90^\circ$．$\because \angle 2 = 45^\circ$，$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 3 + \angle 2 = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$．



11. 35°【解析】提示：连接 CD．易证 $\triangle ADC \cong \triangle BDC$，$\therefore \angle DCB = \angle DCA = 35^\circ$．易证 $\triangle DEB \cong \triangle DCB$，$\therefore \angle BED = \angle DCB = 35^\circ$．



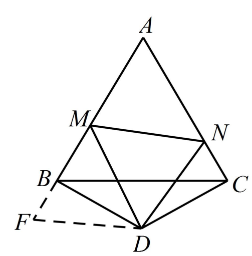
12. $\sqrt{41}$【解析】如图，作 $AD' \perp AD$，且 $AD' = AD$，连接 CD'，DD'．$\because \angle BAC + \angle CAD = \angle DAD' + \angle CAD$，即 $\angle BAD = \angle CAD'$，由 SAS 可得 $\triangle BAD \cong \triangle CAD'$，$\therefore BD = CD'$．
$\because \angle DAD' = 90^\circ$，由勾股定理得 $DD' = \sqrt{AD^2 + AD'^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$，
$\because \angle D'DA + \angle ADC = 90^\circ$，由勾股定理得
$CD' = \sqrt{CD^2 + DD'^2} = \sqrt{9 + 32} = \sqrt{41}$，$\therefore BD = CD' = \sqrt{41}$．



13. $(2,4)$【解析】如图，过点 A 作 $AC \parallel x$ 轴，交 y 轴与点 C，过点 B 作 $BD \parallel y$ 轴，交 x 轴与点 D，两条直线相交于点 E，$\because B(3,1)$，
$\therefore OD = 3$，$BD = 1$．$\because \angle DOB + \angle OBD = 90^\circ$，
$\angle OBD + \angle ABE = 90^\circ$，$\angle BAE + \angle ABE = 90^\circ$，
$\therefore \angle BOD = \angle ABE$，$\angle OBD = \angle BAE$．

在 $\triangle ABE$ 与 $\triangle BOD$ 中，$\because \begin{cases} \angle BOD = \angle ABE, \\ AB = OB, \\ \angle OBD = \angle BAE, \end{cases}$ $\therefore$

$\triangle ABE \cong \triangle BOD\,(\text{ASA})$，$\therefore AE = BD = 1$，$BE = OD = 3$，
$\therefore AC = OD - AD = 3 - 1 = 2$，$DE = BD + BE = 1 + 3 = 4$，$\therefore A(2,4)$．



14. 6【解析】提示：延长 AB 至 F，使 $BF = CN$，连接 DF．
可证 $\triangle BDF \cong \triangle CDN$ 及 $\triangle DMN \cong \triangle DMF$．
得 $MN = MF$．$\triangle AMN$ 的周长等于 $AB + AC$ 的长．

第三部分

15. $\because \angle DCA = \angle ECB$，$\therefore \angle DCA + \angle ACE = \angle BCE + \angle ACE$，
$\therefore \angle DCE = \angle ACB$，$\because$ 在 $\triangle DCE$ 和 $\triangle ACB$ 中，

$\begin{cases} DC = AC, \\ \angle DCE = \angle ACB, \\ CE = CB, \end{cases}$ $\therefore \triangle DCE \cong \triangle ACB$ ，$\therefore DE = AB$.

16. $\because$ $AC \perp BC$ ，$BD \perp AD$ ，$\therefore \angle ADB = \angle BCA$.在 $\mathrm{Rt}\triangle ADB$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle BCA$ 中，

$\begin{cases} AB = BA, \\ BD = AC. \end{cases}$ $\therefore \mathrm{Rt}\triangle ADB \cong \mathrm{Rt}\triangle BCA$ ，$\therefore BC = AD$.

17. （1） $\because \angle A = 85^\circ$ ，$\angle B = 60^\circ$ ，$\therefore \angle ACB = 180^\circ - \angle A - \angle B = 35^\circ$ ，
$\because \triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，$AB = 8$ ，$\therefore \angle F = \angle ACB = 35^\circ$ ，$DE = AB = 8$ ，
$\because EH = 2$ ，$\therefore DH = 8 - 2 = 6$.

（2） $\because \triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，$\therefore \angle DEF = \angle B$ ，$\therefore AB \parallel DE$.

18. 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACD$ 中，

$\begin{cases} \angle B = \angle C, \\ AB = AC, \\ \angle A = \angle A, \end{cases}$ $\therefore$ $\triangle ABE \cong \triangle ACD$. $\therefore$ $AD = AE$. $\therefore$ $BD = CE$.

19. （1） $\because \triangle BAD \cong \triangle ACE$ ，$\therefore BD = AE$ ，$AD = CE$. 又$\because AE = AD + DE$ ，
$\therefore BD = CE + DE$.

（2） 当 $\triangle ABD$ 满足 $\angle ADB = 90^\circ$ 时，$BD \parallel CE$.

20. 提示：线段 AE 与 EF 相等，由 $\begin{cases} \angle H = \angle FCE, \\ AH = CE, \\ \angle HAE = \angle FCE, \end{cases}$ 可证 $\triangle HAE \cong \triangle CEF$.

从而得到 $AE = EF$.

21. （1） 当 $t = 1\ \mathrm{s}$ 时，$AP = BQ = 1\ \mathrm{cm}$ ，$BP = AC = 3\ \mathrm{cm}$ ，

在 $\triangle ACP$ 和 $\triangle BPQ$ 中，$\begin{cases} AP = BQ, \\ \angle A = \angle B, \\ AC = BP, \end{cases}$ $\therefore \triangle ACP \cong \triangle BPQ\,(\mathrm{SAS})$ ，$\therefore \angle ACP = \angle BPQ$ ，

$\therefore \angle APC + \angle BPQ = \angle APC + \angle ACP = 90^\circ$ ，$\therefore \angle CPQ = 90^\circ$ ，即线段 PC 与线段 PQ 垂直.

（2） ①若 $\triangle ACP \cong \triangle BPQ$ ，则 $AC = BP$ ，$AP = BQ$ ，

$\therefore \begin{cases} 3 = 4 - t, \\ t = xt, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} t = 1, \\ x = 1. \end{cases}$

②若 $\triangle ACP \cong \triangle BQP$ ，则 $AC = BQ$ ，$AP = BP$ ，

$\therefore \begin{cases} 3 = xt, \\ t = 4 - t, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} t = 2, \\ x = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$ 综上，存在 $\begin{cases} t = 1, \\ x = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} t = 2, \\ x = \dfrac{3}{2} \end{cases}$ 使得 $\triangle ACP$ 与 $\triangle BPQ$ 全等.