11.1 与三角形有关的线段

【学习任务】

1.理解三角形及其有关的概念.

2.掌握三角形三边关系，并能够熟练运用这个三角形的三边关系判定已知的三条线段能否构成三角形.

3.知道三角形具有稳定性，并且能够运用到实际问题中去.

【知识梳理】

从三角形的一个顶点向它的对边画垂线，顶点和垂足之间的线段叫做三角形的高（altitude）.

连接三角形的一个顶点和它对边中点的线段叫做三角形的中线（median）.

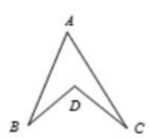
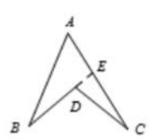
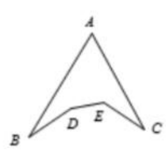
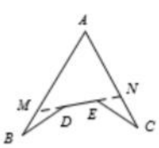
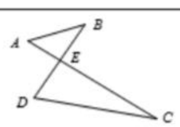
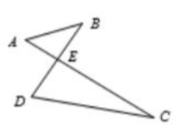
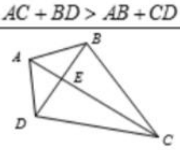
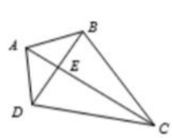
三角形一个角的平分线与这个角的对边相交，这个角的顶点和交点之间的线段叫做三角形的角平分线（angular bisector）.

三角形三条中线的交点叫做三角形重心.三角形三条内角平分线的交点叫做三角形内心.三角形三边上的三条高所在直线交于一点叫做三角形垂心.三角形三边的垂直平分线的交点叫做三角形外心.三角形的一条内角平分线与其他两个角的外角平分线交于一点叫做三角形的旁心.

三角形的三边关系描述三角形三边关系：

①三角形任意两边的和大于第三边；②三角形任意两边的差小于第三边.

常见的线段大小比较

图形+结论	图形	证明
 $AB+AC>BD+CD$		延长 BD 交 AC 于点 E，所以 $\begin{cases}AB+AE>BD+DE\\DE+EC>CD\end{cases}$ 两个不等式左右相加得 $AB+AC>BD+CD$
 $AB+AC>BD+DE+EC$		延长 ED 交 AC 、AB 于点 N 、M，所以 $\begin{cases}AM+AN>DM+DE+EN\\DM+BM>BD\\NE+NC>CE\end{cases}$ 两个不等式左右相加得 $AB+AC>BD+DE+EC$
 $AC+BD>AB+CD$		因为 $\begin{cases}EA+EB>AB\\ED+EC>CD\end{cases}$ 两个不等式左右相加得 $AC+BD>AB+CD$
 $2(AC+BD)>AB+BC+CD+AD$		因为 $\begin{cases}EA+EB>AB\\EC+ED>DC\\EA+ED>AD\\EB+EC>BC\end{cases}$ 两个不等式左右相加得 $2(AC+BD)>AB+BC+CD+AD$

三角形的稳定性

三角形具有稳定性，有着稳固、坚定、耐压的特点.

等腰三角形

有两条边相等的三角形叫做等腰三角形（isosceles triangle）.相等的两边都叫做腰，另一边叫做底边，两腰的夹角叫做顶角，腰和底边的夹角叫做底角.

三角形分类

- 按角分
  - 锐角三角形（三个角都是锐角）
  - 直角三角形（一个角是直角）
  - 钝角三角形（一个角是钝角）
- 按边分
  - 不等边三角形（三条边都不相等）
  - 等腰三角形
    - 一般等腰三角形（两条边相等）
    - 等边三角形（三条边都相等）

一、选择题

1. 下列说法：①等边三角形是等腰三角形；②等腰三角形也可能是直角三角形；③三角形按边分类可分为等腰三角形、等边三角形和三边都不相等的三角形；④三角形按角分类可分为锐角三角形、直角三角形和钝角三角形．其中正确的有(　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

2. 已知 a，b，c 是 $\triangle ABC$ 的三边长，且 $(a+b+c)(a-b)=0$ ，则 $\triangle ABC$ 一定是(　　)

A. 等腰三角形　　B. 直角三角形

C. 等边三角形　　D. 以上答案都不对

3. 如果一个三角形的三条高的交点恰是三角形的一个顶点，那么这个三角形是(　　)

A. 锐角三角形　　B. 钝角三角形

C. 直角三角形　　D. 以上三种都有可能

4. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=3\text{ cm}$ ，$AC=5\text{ cm}$ ．若 BC 的长为整数，则 BC 的长可能是(　　)

A. 7 cm　　B. 8 cm　　C. 1 cm　　D. 2 cm

5. 等腰三角形的一条边长为 6，另一边长为 13，则它的周长为(　　)

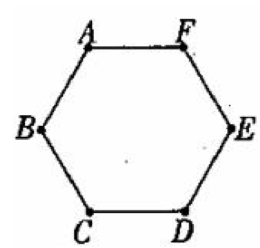
A. 25　　B. 25 或 32　　C. 32　　D. 19

6. 若周长为 12 厘米的三角形的三边长为连续整数，则它的最短边长为(　　)

A. 2 厘米　　B. 3 厘米　　C. 4 厘米　　D. 5 厘米

二、填空题

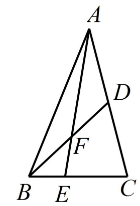
7. 如图，用六根木条钉成一个六边形框架 $ABCDEF$ ，要使框架稳固且不活动，则至少还需要添加________根木条.



8. 已知一个三角形有两条边长度分别是 4，9，则第三边长度 x 的范围是________.

9. 用一条长为 18 cm 的细绳围成一个等腰三角形，如果腰长是底边长的 2 倍，那么各边的长是________.

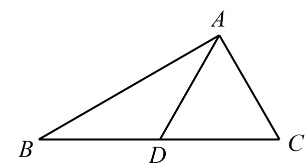
10. 如图，在 $\triangle ABC$ 中 E 是 BC 上的一点，$EC=2BE$，点 D 是 AC 的中点，设 $\triangle ABC$，$\triangle ADF$，$\triangle BEF$ 的面积分别为 $S_{\triangle ABC}$，$S_{\triangle ADF}$，$S_{\triangle BEF}$，且 $S_{\triangle ABC}=12$，则 $S_{\triangle ADF}-S_{\triangle BEF}=$ ________.



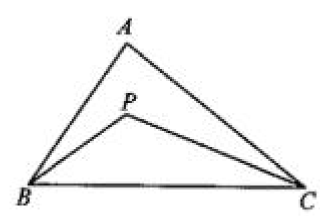
三、解答题

11. 一个等腰三角形的三边长分别为 7，$3x-2$，$x+1$，求 x 的值，并求这个等腰三角形三边的长.

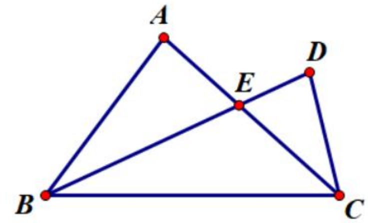
12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，AC=3 cm，中线 AD 把 $\triangle ABC$ 分成两个小三角形．若 $\triangle ABD$ 的周长比 $\triangle ADC$ 的周长大 2 cm，求 AB 的长.



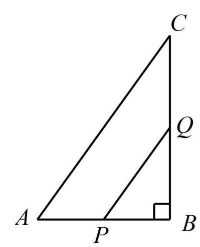
13. 如图，点 P 为 $\triangle ABC$ 内任意一点，连接 PB，PC，请说明不等式 $PB+PC<AB+AC$ 的理由.



14. 如图，$\triangle ABC$ 的边 AC 与 $\triangle BCD$ 的边 BD 相交于点 E，试用三边关系定理说明 $AC+BD>AB+CD$ 的理由.



15. 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=90^{\circ}$，$AB=12\ \mathrm{cm}$，$BC>AB$，点 P 从点 A 开始沿 AB 边向点 B 以 $1\ \mathrm{cm/s}$ 的速度移动，点 Q 从点 B 开始沿 BC 边向点 C 以 $2\ \mathrm{cm/s}$ 的速度移动．如果 P，Q 分别从 A，B 同时出发，经过多长时间 $\triangle PQB$ 为等腰三角形?



16. 已知在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C > \angle B$ ，AE 平分 $\angle BAC$ ，F 为射线 AE 上一点（不与点 E 重合），且 $FD \perp BC$ 于 D .

（1）如果点 F 与点 A 重合，且 $\angle C = 50°$ ，$\angle B = 30°$ ，如图 1，求 $\angle EFD$ 的度数；

（2）如果点 F 在线段 AE 上（不与点 A 重合），如图 2，问 $\angle EFD$ 与 $\angle C - \angle B$ 有怎样的数量关系?并说明理由；

（3）如果点 F 在 $\triangle ABC$ 外部，如图 3，此时 $\angle EFD$ 与 $\angle C - \angle B$ 的数量关系是否会发生变化?请说明理由.

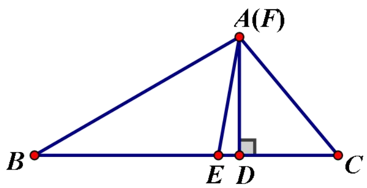


图 1

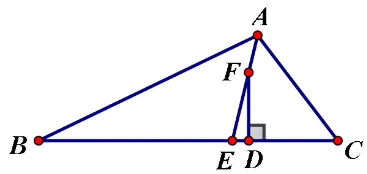


图 2

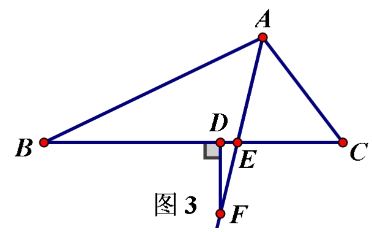


图 3

17.（1）【问题情境】

如图 1：在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，点 P 为边 BC 上的任意一点，过点 P 作 $PD\perp AB$，$PE\perp AC$，垂足分别为点 D，E，过点 B 作 $BG\perp AC$，垂足为点 G．求证：$PD+PE=BG$．

（2）【变化一下】

（1）当点 P 在 BC 延长线上时，请画图探究 PD，PE，BG 三者之间的数量关系并给出证明;

（2）如图 2，$\triangle ABC$ 满足 $AB=AC=BC$，点 P 为 $\triangle ABC$ 内任意一点，过点 P 分别作 $PD\perp AB$，$PE\perp AC$，$PF\perp BC$，垂足分别为点 D，E，F，请直接写出 PD，PE，PF 和 BG 之间的关系.

（3）【深入探究】

如图 3，在 $\triangle ABC$ 中，点 P 为 $\triangle ABC$ 内任意一点，过点 P 分别作 $PD\perp AB$，$PE\perp AC$，$PF\perp BC$，垂足分别为点 D，E，F，过点 A，B，C 分别作 $AI\perp BC$，$BG\perp AC$，$CH\perp AB$，垂足分别为点 I，G，H，记 CH，BG，AI 分别为 h_1，h_2，h_3，请直接写出 PD，PE，PF 和 h_1，h_2，h_3 之间的关系.

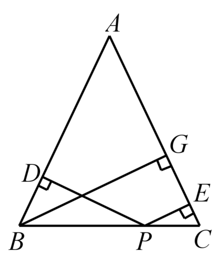


图1

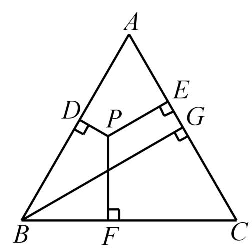


图2

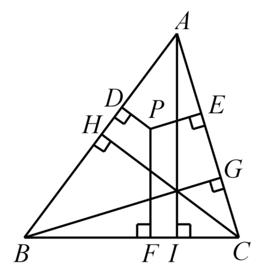
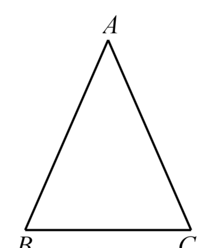


图3



备用图

11.1 与三角形有关的线段答案

第一部分

1. C　2. A　3. C　4. A　5. C　6. B

第二部分

7. 3　8. $5<x<13$　9. 7.2 cm，7.2 cm，3.6 cm　10. 2

第三部分

11. 记 $AB=7$，$BC=3x-2$，$AC=x+1$，则：

① $AB=BC$，$3x-2=7$，$x=3$；

② $AB=AC$，$x+1=7$，$x=6$；

③ $BC=AC$，$3x-2=x+1$，$x=\frac{3}{2}$；

三边长分别为 7，7，4 或 7，7，16 或 7，2.5，2.5．

综上，①能构成一个三角形，符合题意，②不能构成三角形，舍去，③不能构成三角形，舍去，所以 x 的值为 3，此等腰三角形的三边长分别为 7，7，4．

12. $\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线，$\therefore BD=CD$．$\because$ $\triangle ABD$ 的周长比 $\triangle ADC$ 的周长大 2 m，$\therefore AB-AC=2$．$\because$ $AC=3\text{ cm}$，$\therefore$ $AB=5\text{ cm}$．

13. 提示：延长 BP 交 AC 于 D，则 $AB+AD>BD$；$PD+DC>PC$；两式相加即可．

14. $AE+BE>AB$，$EC+DE>CD$，两式相加即可得证．

15. 设经过 x s，$\triangle PQB$ 为等腰三角形，则 $PB=QB$．
$\because$ $AB=12\text{ cm}$，$AP=x\text{ cm}$，$BQ=2x\text{ cm}$，$\therefore$ $12-x=2x$，解得 $x=4$，即出发 4 s 后 $\triangle PQB$ 为等腰三角形．

16. （1）$\angle EFD=10^\circ$．　（2）$\angle EFD=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$，理由略．

（3）$\angle EFD=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$．理由如下：如图，

因为 AE 平分 $\angle BAC$，所以 $\angle BAE=\dfrac{180^\circ-\angle B-\angle C}{2}$，

所以 $\angle DEF=\angle B+\dfrac{180^\circ-\angle B-\angle C}{2}=90^\circ+\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$．

因为 $\angle FDE=90^\circ$，所以 $\angle EFD=90^\circ-90^\circ-\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$．

18.（1）如图 1 中，连接 PA．$\because S_{\triangle ABC}=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PAC}$，

$\therefore \frac{1}{2}\times AC\times BG=\frac{1}{2}\times AB\times PD+\frac{1}{2}\times AC\times PE$，

$\because AB=AC$，$\therefore BG=PD+PE$．

（2）（1）如图 $1-1$ 中，结论：$BG=PD-PE$．

理由：连接 PA．$\because S_{\triangle ABC}=S_{\triangle PAB}-S_{\triangle PAC}$，

$\therefore \frac{1}{2}\times AC\times BG=\frac{1}{2}\times AB\times PD-\frac{1}{2}\times AC\times PE$，

$\because AB=AC$，$\therefore BG=PD-PE$．

（2）$PD+PE+PF=BG$．【解析】（2）如图 2 中，结论：$PD+PE+PF=BG$．理由：连接 PA，PB，PC．

$\because S_{\triangle ABC}=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PAC}+S_{\triangle PBC}$，

$\therefore \frac{1}{2}\times AC\times BG=\frac{1}{2}\times AB\times PD+\frac{1}{2}\times AC\times PE+\frac{1}{2}\cdot BC\cdot PF$，

$\because AB=AC$，$\therefore BG=PD+PE+PF$．

（3）$\frac{PD}{h_1}+\frac{PE}{h_2}+\frac{PF}{h_3}=1$．

【解析】如图 3 中，结论：$\frac{PD}{h_1}+\frac{PE}{h_2}+\frac{PF}{h_3}=1$．

理由：连接 PA，PB，PC．设 $\triangle ABC$ 的面积为 S．

$\because S=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot h_1=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot h_2=\frac{1}{2}BC\cdot h_3$，

$\therefore AB=\frac{2S}{h_1}$，$AC=\frac{2S}{h_2}$，$BC=\frac{2S}{h_3}$，

$$\begin{aligned}\because S&=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PAC}+S_{\triangle PBC}\\&=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot PD+\frac{1}{2}\cdot AC\cdot PE+\frac{1}{2}\cdot BC\cdot PF\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{2S}{h_1}\cdot PD+\frac{1}{2}\cdot\frac{2S}{h_2}\cdot PE+\frac{1}{2}\cdot\frac{2S}{h_3}\cdot PF,\end{aligned}$$

$\therefore \frac{PD}{h_1}+\frac{PE}{h_2}+\frac{PF}{h_3}=1$．

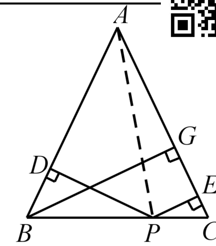


图1

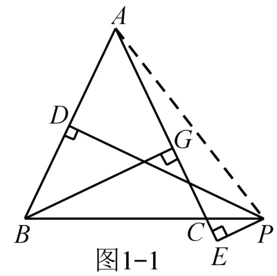


图1−1

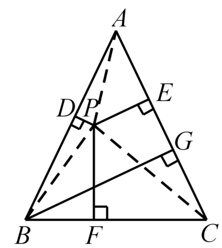


图2

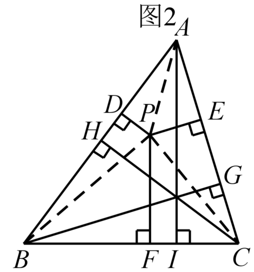


图3