11.2 与三角形有关的角

【学习任务】

1.掌握三角形的内角和和外角和定理，并会熟练运用内外角和定理解决相关的角的问题.

2.会证明三角形内角和和外角和定理.

3.掌握直角三角形中角的性质和判定.

【知识梳理】

三角形内角与外角

在三角形中，相邻两边组成的角，叫做三角形的**内角**，简称三角形的角．三角形的一边与其邻边的延长线组成的角，叫做三角形的**外角**.

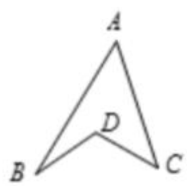
三角形内角和定理

三角形三个内角的和等于 **180°**.

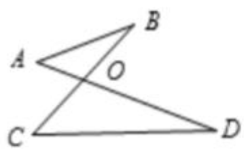
三角形外角和定理

三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和.

飞镖模型及“8”字模型

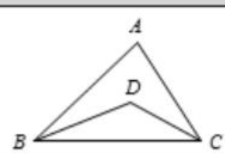
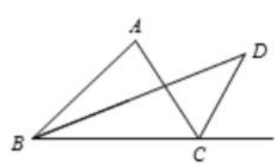
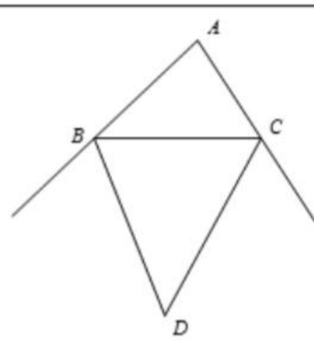


$\angle D=\angle A+\angle B+\angle C$



$\angle A+\angle B=\angle C+\angle D$

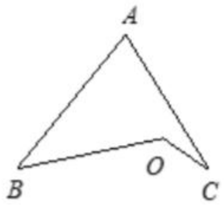
三角形角平分线与内角和

已知	如图	结论
在△ABC 中，$\angle ABC$，$\angle ACB$的平分线交于点 D		$\angle D=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$
在△ABC 中，$\angle ABC$的平分线与$\angle ACB$的外角平分线交于点 D		$\angle D=\frac{1}{2}\angle A$
在△ABC 中，$\angle ABC$，$\angle ACB$的外角平分线交于点 D		$\angle D=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A$

在 $\triangle ABC$，$\angle A:\angle B:\angle C=2:1:3$，则 $\angle A=$____．

一个三角形三个外角之比为 $2:3:4$，三个内角的度数分别是____．

如图所示，已知 $\angle A=70^\circ$，$\angle B=40^\circ$，$\angle C=20^\circ$，求 $\angle BOC$ 的度数．

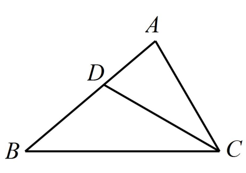


如图所示，$\angle A=10^\circ$，$\angle ABC=90^\circ$，$\angle ACB=\angle DCE$，$\angle ADC=\angle EDF$，$\angle CED=\angle FEG$，求 $\angle F$ 的度数．

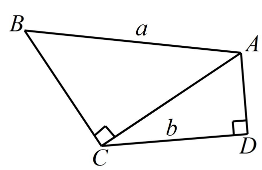
一、选择题

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，CD 是 $\angle ACB$ 的平分线，$\angle A=80^\circ$，$\angle ACB=60^\circ$，则 $\angle BDC$ 为（　　）

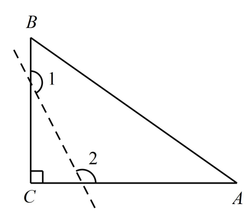
   A. 80°　　B. 90°　　C. 100°　　D. 110°



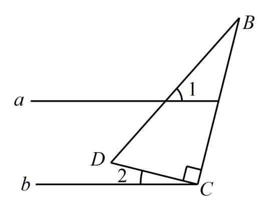
第 1 题图



第 2 题图



第 3 题图



第 4 题图

2. 如图，$AC\perp BC$，$AD\perp CD$，$AB=a$，$CD=b$，则 AC 的取值范围是（　　）

   A. 大于 b　　B. 小于 a

   C. 大于 b 且小于 a　　D. 无法确定

3. 如图，已知 $\triangle ABC$ 为直角三角形，$\angle C=90^\circ$，若沿图中虚线剪去 $\angle C$，则 $\angle 1+\angle 2=$（　　）

   A. 90°　　B. 135°　　C. 270°　　D. 315°

4. 如图，直线 $a\parallel b$，直角三角形如图放置，$\angle BCD=90^\circ$，$\angle 1+\angle B=70^\circ$，则 $\angle 2$ 的度数为（　　）

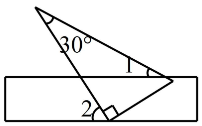
   A. 20°　　B. 25°　　C. 35°　　D. 40°

5. 如图，将一块含有 30° 角的直角三角板的两个顶点放在矩形直尺的一组对边上，如果 $\angle 2=$ ，那么 $\angle 1$ 的度数为（　　）

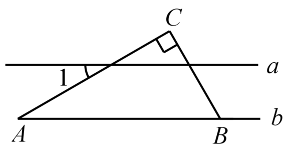
A. 60°　　B. 50°　　C. 40°　　D. 30°

6. 如图，$a\parallel b$，以直线 b 上两点 A 和 B 为顶点的 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$（其中 $\angle C=90^\circ$）与直线 a 相交，若 $\angle 1=30^\circ$，则 $\angle ABC$ 的度数为（　　）

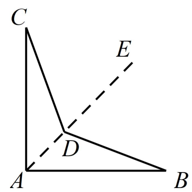
A. 30°　　B. 60°　　C. 120°　　D. 150°



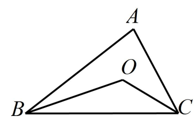
第 5 题图



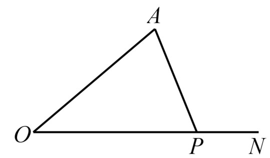
第 6 题图



第 7 题图



第 8 题图



第 10 题图

二、填空题

7. 一个零件的形状如图所示，$\angle BAC=90^\circ$，$\angle B=21^\circ$，$\angle C=20^\circ$，则 $\angle BDC=$ ________.

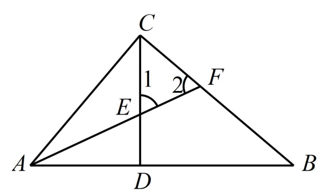
8. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的平分线交于点 O，若 $\angle A=80^\circ$，则 $\angle BOC=$ ________.

9. 如果一个等腰三角形一腰上的高与腰的夹角是 30°，则它的顶角度数是________.

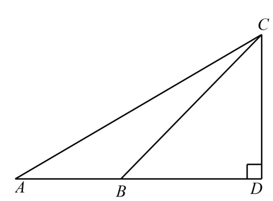
10. 如图，已知 $\angle AON=40^\circ$，点 P 是射线 ON 上一动点，当 $\triangle AOP$ 为直角三角形时，$\angle A=$ ________。.

三、解答题

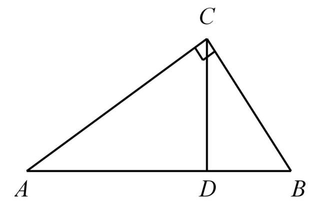
11. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$CD\perp AB$ 于点 D，$\angle 1=\angle 2$，AF 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，交 CD 于点 E，求证：$\angle ACB=90^\circ$.



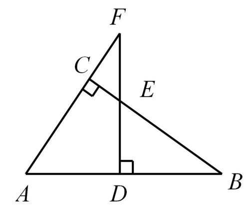
12. 如图，从 A 处观测 C 处时的仰角 $\angle CAD=30^\circ$，从 B 处观测 C 处时的仰角 $\angle CBD=45^\circ$，求 $\angle ACB$ 的度数.



13. 如图，在直角三角形 ABC 中，$\angle ACB=90^{\circ}$，D 是 AB 上一点，且 $\angle ACD=\angle B$．求证：$CD\perp AB$．



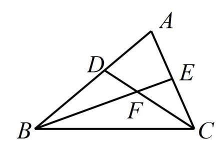
14. 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^{\circ}$，F 是 AC 延长线上一点，$FD\perp AB$，垂足为 D，FD 与 BC 相交于点 E，$\angle BED=55^{\circ}$．求 $\angle A$ 的度数．



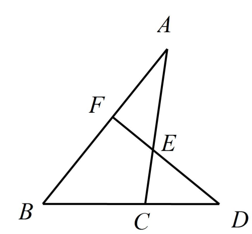
15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC$，$\angle ACB$ 的平分线 BE，CD 相交于点 F，

（1）$\angle ABC=42^{\circ}$，$\angle A=60^{\circ}$，求 $\angle BFC$ 的度数；

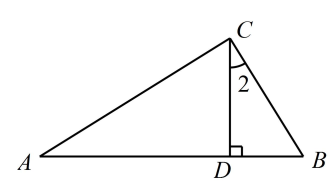
（2）直接写出 $\angle A$ 与 $\angle BFC$ 的数量关系．



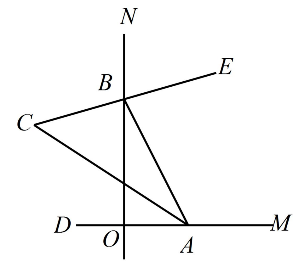
16. 如图，已知点 D 为 $\triangle ABC$ 边 BC 延长线上一点，$DF\perp AB$ 于点 F 交 AC 于点 E，$\angle A=35^{\circ}$，$\angle D=42^{\circ}$，求 $\angle ACD$ 的度数．



17. 如图所示，已知 $AC\perp BC$，$CD\perp AB$，$\angle 2$ 与 $\angle A$ 有什么关系?请说明理由．



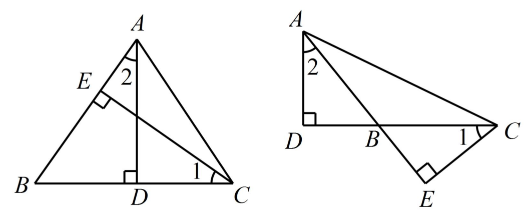
18. 如图，$\angle MON = 90°$，点 A，B 分别在射线 OM，ON 上移动，BE 是 $\angle ABN$ 的平分线，BE 的反向延长线与 $\angle OAB$ 平分线相交于点 C，试问：$\angle ACB$ 的大小是否发生变化?如果保持不变，请给出证明；如果随点 A，B 移动发生变化，请求出变化范围.



19. 如图①，在 $\triangle ABC$ 中，$AD \perp BC$ 于点 D，$CE \perp AB$ 于点 E.

（1）猜测 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 的关系，并说明理由；

（2）如果 $\angle B$ 是钝角，如图②，（1）中的结论是否还成立?说明理由.



①　②

20.（1）观察、发现：如图 1，过三角形 ABC 的顶点 A 作直线 $EF \parallel BC$，观察角之间的关系，发现：$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB =$ ________ 度；

（2）猜测、验证：如图 2，已知四边形 $ABCD$，请运用（1）中作平行线的方法猜测：$\angle BAD + \angle ABC + \angle BCD + \angle ADC =$ ________ 度；请作图并证明你发现的结论；

（3）综合运用：如图 3，$AB \perp BC$，点 P 为 $\angle ABC$ 内一点，点 D 为 BC 边上一点，连接 PA，PD；QA、QD 分别平分 $\angle PAB$、$\angle PDC$，判断 $\angle P$、$\angle Q$ 的数量关系，并说明理由.

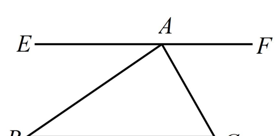


图1

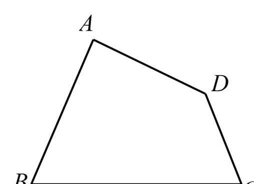


图2

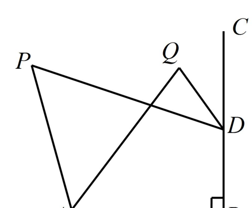
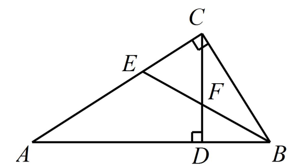


图3

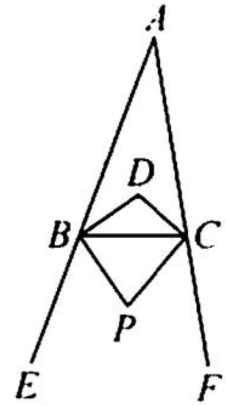
21. 已知 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，CD 为 AB 边上的高，BE 平分 $\angle ABC$，分别交 CD，AC 于点 F，E，试证明：$\angle CFE = \angle CEF$．



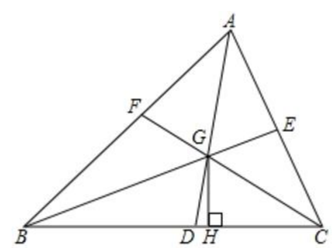
22. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，BD，CD 分别是 $\angle ABC$，$\angle ACB$ 的平分线，它们交于点 D；BP，CP 分别是 $\angle EBC$，$\angle FCB$ 的平分线，它们交于点 P.

（1）若 $\angle A = 30°$，求 $\angle BPC$ 的度数.

（2）若 $\angle A = \alpha$，求 $\angle BPC$ 的度数，并探究当 $\angle A$ 的度数变化时 $\angle D + \angle P$ 的值是变化还是不变化，为什么?



23. 如图，在 $\triangle ABC$ 中 AD，BE，CF 是角平分线，交点是点 G，$GH \perp BC$．试说明 $\angle BGD = \angle CGH$ 的理由.



11.2 与三角形有关的角 答案

例题：1、∠A=60° 2、100°，60°，20° 3、130°

在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=10^\circ$，$\angle ABC=90^\circ$，
$\therefore \angle ACB=80^\circ$.
$\because \angle DCE=\angle ACB=80^\circ$，$\angle DCE$ 是 $\triangle ACD$ 的一个外角，
$\therefore \angle DCE=\angle A+\angle ADC$，即 $80^\circ=10^\circ+\angle ADC$.
$\therefore \angle ADC=70^\circ$，$\angle EDF=\angle ADC=70^\circ$.
$\because \angle EDF$ 是 $\triangle ADE$ 的一个外角，
$\therefore \angle EDF=\angle A+\angle AED$，即 $70^\circ=10^\circ+\angle AED$.
$\therefore \angle AED=60^\circ$，$\angle FEG=\angle AED=60^\circ$.
$\because \angle FEG$ 是 $\triangle AEF$ 的一个外角，
$\therefore \angle FEG=\angle A+\angle F$.
$\therefore \angle F=\angle FEG-\angle A=60^\circ-10^\circ=50^\circ$.

第一部分

1. D 2. C 3. C 4. A 5. D 6. B

第二部分

7. 131° 8. 130° 9. 120° 或 60° 10. 50 或 90

第三部分

11. $\because$ AF 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，$\therefore$ $\angle CAF=\angle BAF$，$\because$ $\angle 1=\angle 2$，$\angle 1=\angle AED$，$\therefore$ $\angle 2=\angle AED$，$\because$ $CD\perp AB$，$\therefore$ $\angle EDA=90^\circ$，$\therefore$ $\angle BAF+\angle AED=90^\circ$，$\therefore$ $\angle CAF+\angle 2=90^\circ$，$\therefore$ $\angle ACB=90^\circ$.

12. 因为 $\angle D=90^\circ$，$\angle CAD=30^\circ$，所以 $\angle ACD=180^\circ-\angle CAD-\angle D=180^\circ-30^\circ-90^\circ=60^\circ$. 同理 $\angle BCD=45^\circ$，从而 $\angle ACB=\angle ACD-\angle BCD=60^\circ-45^\circ=15^\circ$.

13. $\because$ $\angle ACB=90^\circ$，$\therefore$ $\angle A+\angle B=90^\circ$，$\because$ $\angle ACD=\angle B$，$\therefore$ $\angle A+\angle ACD=90^\circ$，$\therefore$ $\angle ADC=90^\circ$，$\therefore$ $CD\perp AB$.

14. 因为在 $\mathrm{Rt}\triangle BDE$ 中，$\angle B+\angle BED=90^\circ$，$\angle BED=55^\circ$，所以 $\angle B=90^\circ-\angle BED=90^\circ-55^\circ=35^\circ$，因为 $\angle ACB=90^\circ$，所以 $\angle A+\angle B=90^\circ$，所以 $\angle A=90^\circ-\angle B=90^\circ-35^\circ=55^\circ$.

15. （1）$\because$ $\angle ABC=42^\circ$，$\angle A=60^\circ$，$\therefore$ $\angle ACB=78^\circ$，$\because$ $\angle ABC$，$\angle ACB$ 的平分线相交于点 F，$\therefore$ $\angle FBC=\frac{1}{2}\angle ABC=21^\circ$，$\angle FCB=\frac{1}{2}\angle ACB=39^\circ$，$\therefore$ $\angle BFC=180^\circ-(\angle FBC+\angle FCB)=120^\circ$.

（2）$\angle BFC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$.

16. $\because$ $\angle AFE=90^\circ$，$\therefore$ $\angle AEF=90^\circ-\angle A=90^\circ-35^\circ=55^\circ$，$\therefore$ $\angle CED=\angle AEF=55^\circ$，$\therefore$ $\angle ACD=180^\circ-\angle CED-\angle D=180^\circ-55^\circ-42^\circ=83^\circ$.
答：$\angle ACD$ 的度数为 83°.

17. $\angle 2=\angle A$，理由如下：$\because$ $AC\perp BC$，$CD\perp AB$，$\therefore$ $\angle ACB=\angle CDB=90^\circ$，$\therefore$ $\angle 2+\angle ACD=90^\circ$，$\angle A+\angle ACD=90^\circ$，$\therefore$ $\angle 2=\angle A$.

18. $\angle ACB$ 的大小保持不变．理由：因为 $\angle ABN = 90° + \angle OAB$，$AC$ 平分 $\angle OAB$，BE 平分 $\angle ABN$，所以 $\angle ABE = \frac{1}{2}\angle ABN = \frac{1}{2}(90° + \angle OAB) = 45° + \frac{1}{2}\angle OAB$，

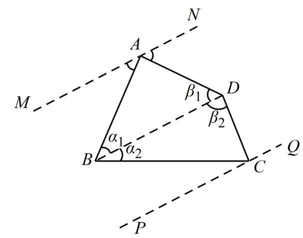
即 $\angle ABE = 45° + \angle CAB$，又 $\angle ABE = \angle ACB + \angle CAB$，所以 $\angle ACB = 45°$，

故 $\angle ACB$ 的大小不发生变化，且始终保持 $45°$．

19.（1）$\angle 1 = \angle 2$，理由：同角的余角相等．

（2）结论仍然成立，理由：根据外角和定理，$\angle 1 = \angle 2 = \angle B - 90°$．

20.（1）180　（2）360 证法如下：连接 BD，过点 A 作 $MN \parallel BD$，过点 C 作 $PQ \parallel BD$． BD 把 $\angle B$ 分为 α_1，α_2，把 $\angle D$ 分为 β_1，β_2，



因为 $MN \parallel BD$，所以 $\angle MAB = \angle ABD = \alpha_1$，$\angle NAD = \angle ADB = \beta_1$，

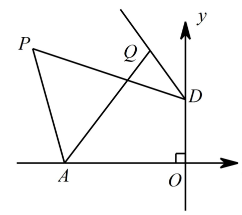
所以 $\angle BAD + \alpha_1 + \beta_1 = 180°$，　……①

同理：$\angle BCD + \alpha_2 + \beta_2 = 180°$，　……②

①＋② 得：$\angle BAD + \angle BCD + \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 = 360°$，

即：$\angle BAD + \angle BCD + \angle ABC + \angle ADC = 360°$．

（3）如图：设：$\angle PAQ = \angle QAO = x$，$\angle PDQ = \angle QDy = y$．



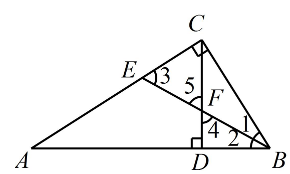
由图知：$\begin{cases} \angle P + 90° + 2x + 180° - 2y = 360°, \\ \angle Q + 90° + x + 180° - y = 360°. \end{cases}$

所以 $\angle P = 90° - 2x + 2y$，$\angle Q = 90° - x + y$，所以 $\angle P = 2\angle Q - 90°$．

21. $\because \angle ACB = 90°$，$\therefore \angle 1 + \angle 3 = 90°$． $\because CD \perp AB$，

$\therefore \angle 2 + \angle 4 = 90°$．又 BE 平分 $\angle ABC$，$\therefore \angle 1 = \angle 2$，

$\therefore \angle 3 = \angle 4$． $\because \angle 4 = \angle 5$，$\therefore \angle 3 = \angle 5$，即 $\angle CFE = \angle CEF$．



22.（1）$75°$．　（2）$\angle BPC = 90° - \frac{\alpha}{2}$，$\angle D + \angle P = 180°$，不变化．

23. 提示：$\angle BGD = \angle ABG + \angle BAG$，

$$\begin{aligned} \angle HGC &= 90° - \angle GCH \\ &= 90° - \frac{1}{2}(180° - 2\angle ABG - 2\angle BAG) \\ &= \angle ABG + \angle BAG. \end{aligned}$$