# 14.2 乘法公式

【学习任务】

1、理解平方差、完全平方公式的推导过程及结构特征 .

2、掌握添括号法则，会利用公式进行简便运算 .

【知识梳理】

平方差公式

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

利用平方差公式计算：

（1）499×501　　　　（2）$2019\times2021-2020^2$

完全平方公式

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$　　　　$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

**混合运算法则**

①先乘方，再乘除，最后加减；

②同级运算，按照从左到右的顺序进行；

③如果有括号，先做括号内的运算，按小括号、中括号、大括号依次进行.

**【同步讲练】**

**一、选择题**

1. 用乘法公式进行简单的计算 $(a+2b)(a-2b)$ 的结果是（　　）

A. $a^2-4b^2$　　B. $a^2-2b^2$　　C. $a^2+4b^2$　　D. $-a^2+4b^2$

2. 下列计算正确的是（　　）

A. $(x+y)^2=x^2+y^2$　　B. $(x-y)^2=x^2-2xy-y^2$

C. $(x+1)(x-1)=x^2-1$　　D. $-x\left(x^2+x-1\right)=-x^3+x^2-x$

3. 下列计算正确的是（　　）

A. $a^4+a^5=a^9$　　B. $\left(2a^2b^3\right)^2=4a^4b^6$

C. $-2a(a+3)=-2a^2+6a$　　D. $(2a-b)^2=4a^2-b^2$

4. 运用乘法公式计算 $(a-2)^2$ 的结果是（　　）

A. $a^2-4a+4$　　B. $a^2-2a+4$　　C. $a^2-4$　　D. $a^2-4a-4$

5. 下列说法中错误的是（　　）

A. 若 $a=b$，则 $3-2a=3-2b$　　B. 若 $a=b$，则 $ac=bc$

C. 若 $ac=bc$，则 $a=b$　　D. 若 $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$，则 $a=b$

6. 下列计算正确的是（　　）

A. $a^2\cdot a^3=a^6$　　B. $a(a+1)=a^2+a$

C. $(a-b)^2=a^2-b^2$　　D. $2a+3b=5ab$

7. 如果 $a^2-a-2=0$，那么代数式 $(a-1)^2+(a+2)(a-2)$ 的值是（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

8. 下列等式中成立的是（　　）

A. $(x-y)^3=(-x-y)^3$　　B. $(a-b)^4=-(b-a)^4$

C. $(m-n)^2=m^2-n^2$　　D. $(x+y)(x-y)=(-x-y)(-x+y)$

9. 若 $\sqrt{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}=\sqrt{6}$，$0<x<1$，则 $\sqrt{x}-\sqrt{\frac{1}{x}}=$（　　）

A. $-\sqrt{2}$　　B. $-2$　　C. $\pm 2$　　D. $\pm\sqrt{2}$

10. 当 $x=1$ 时，代数式 $ax^5+bx^3+1$ 的值为 6，则 $x=-1$ 时，$ax^5+bx^3+1$ 的值是（　　）

A. $-6$　　B. $-5$　　C. 4　　D. $-4$

11. 已知 $y=ax^5+bx^3+cx-5$，当 $x=-3$ 时，$y=7$，那么，当 $x=3$ 时，$y=$（　　）

A. $-3$　　B. $-7$　　C. $-17$　　D. 7

12. 计算 $\left[(a+b)^2-(a-b)^2\right]\div 4ab$ 的结果是（　　）

A. $\frac{a+b}{4}$　　B. $\frac{a-b}{4}$　　C. 1　　D. $2ab$

13. 若 $n$ 满足 $(n-2015)^2+(2016-n)^2=1$，则 $(n-2015)(2016-n)=$（　　）

A. $-1$　　B. 0　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

14. 若 $\begin{cases}x=2,\\ y=3\end{cases}$ 是方程 $ax-by=-3$ 的解，则 $4a^2-12ab+9b^2+2020$ 的值为（　　）

A. 2011　　B. 2017　　C. 2029　　D. 2035

15. 我国宋朝数学家杨辉 1261 年的著作《详解九章算法》给出了在 $(a+b)^n$ （$n$ 为非负整数）的展开式中，把各项系数按一定的规律排成右表（展开后每一项按 $a$ 的次数由大到小的顺序排列）．人们把这个表叫做“杨辉三角”．据此规律，则 $(x+1)^{2019}$ 展开式中含 $x^{2018}$ 项的系数是(　　)

| | |
|---|---|
| $(a+b)^0=1,$ | 1 |
| $(a+b)^1=a+b$ | 1　1 |
| $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ | 1　2　1 |
| $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ | 1　3　3　1 |
| $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ | 1　4　6　4　1 |
| …… | …… |

A. 2016　　B. 2017　　C. 2018　　D. 2019

## 二、填空题

16. 将二次三项式 $x^2+4x+5$ 化成 $(x+p)^2+q$ 的形式应为________.

17. 若 $x^2+2x+m$ 是一个完全平方式，则 $m=$ ________.

18. 若 $x^2+2(m-3)x+16$ 是一个完全平方式，那么 $m$ 应为________.

19. 若 $x^m-y^n=\left(x+y^2\right)\left(x-y^2\right)\left(x^2+y^4\right)$ ，则 $m=$ ________，$n=$ ________.

20. 已知 $a+\dfrac{1}{a}=3$ ，则 $a^2+\dfrac{1}{a^2}$ 的值是________.

21. 计算：$49\dfrac{49}{50}\times 50\dfrac{1}{50}=$ ________.

22. 若 $x+y=5$ ，$xy=-4$ 则 $x^2+y^2=$ ________.

23. 若 $x^2+2(m-3)x+16=(x+n)^2$ ，则 $m=$ ________.

24. 已知，$ab=2$ ，$a+b=4$ ，则式子 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=$ ________.

25. $(3a+3b+1)(3a+3b-1)=899$ ，则 $a+b=$ ________.

## 三、解答题

26. 计算：

（1）$2xy\cdot\left(-\dfrac{1}{2}x^2y^2z\right)$ ；　　（2）$(x-2y)^2+(x+y)(x-y)$ .

27. 计算：

（1）$(2m-3)(5-3m)$ （2）$\left(3a^3\right)^2\cdot\left(2b^2\right)^3\div(6ab)^2$

（3）$(a-b)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)$

28. 运用乘法公式计算：

（1）$(2a-3b)(-2a+3b)-(2a+3b)^2$ ． （2）$(2a-b-3c)(-2a+b-3c)$ ．

29. 先化简，再求值：$a(a+2b)-2b(a+b)$ ，其中 $a=\sqrt{5}$ ，$b=\sqrt{3}$ ．

30. 先化简，再求值．

（1）$4a+2b-5a-3b$ ，其中 $a=-2$ ，$b=1$ ；

（2）$-3\left(\frac{1}{3}n-mn\right)+2\left(mn-\frac{1}{2}m\right)$ ，其中 $|m+n+3|+(mn-2)^2=0$ ．

31. 已知：$a$，$b$，$c$ 为 $\triangle ABC$ 的三边长，且 $2a^2+2b^2+2c^2=2ab+2ac+2bc$ ，试判断 $\triangle ABC$ 的形状，并证明你的结论.

32. 先化简，再求值：$(x-2y)^2-(x-y)(x+y)-2y^2$ ，其中 $x=\frac{1}{4}$，$y=-\frac{1}{3}$ .

33. 已知 $x=\sqrt{3}+1$ ，$y=\sqrt{3}-1$ ，求下列各式的值：

（1）$x^2-y^2$ ；　　（2）$x^2+xy+y^2$ .

34. 先化简，再求值.

（1）$2(x-2y)+3(2x-y)$ ，其中 $x=2$，$y=1$；

（2）$3a^2-3ab+2b^2-2\left(a^2-ab+2b^2\right)$ ，其中，$a^2+ab=3$ ，$b^2+ab=2$ .

35. 观察下列一组等式：

$(a+1)\left(a^2-a+1\right)=a^3+1$ ；

$(a-2)\left(a^2+2a+4\right)=a^3-8$ ；

$(a+3)\left(a^2-3a+9\right)=a^3+27$ .

（1）从以上等式中，你有何发现?利用你发现的规律，在下面括号中填上适当的式子.

① $(x-3)\left(x^2+3x+9\right)=$ ________；

② $(2x+1)($ ________ $)=8x^3+1$ ；

③ ( ________ ) $\left(x^2+xy+y^2\right)=x^3-y^3$ .

（2）计算：$\left(a^2-b^2\right)\left(a^2+ab+b^2\right)\left(a^2-ab+b^2\right)$ .

36. 先化简，再求值

求 $\frac{1}{2}x-2(x-\frac{1}{3}y^2)+(-\frac{3}{2}x+\frac{1}{3}y^2)$ ，其中 $x=2,y=\frac{1}{2}$ .

37. 化简并求值：$(m-2)\left(m^2+2m+4\right)-2m\left(m^2-3\right)$ ，其中 $m=2$ .

38. 先化简，再求值：$(x+y)(x-y)+y(x+2y)-(x-y)^2$ ，其中 $x=2+\sqrt{3}$ ，$y=2-\sqrt{3}$ .

39. 已知：$a+b=3, ab=2$，求下列各式的值：

（1）$a^2b+ab^2$　　（2）$a^2+b^2$

40. 已知 $x+y=4$，$x^2+y^2=10$．

（1）求 $xy$ 的值；　　（2）求 $(x-y)^2-3$ 的值．

41. 运用乘法公式计算：

（1）$(m-2n+3)(m+2n-3)$；　　（2）$(a-3b+2)^2$

42. 化简求值：$(x-y)^2+(x+y)(y-x)-2x(1-y)$，其中 $x=1$，$y=-2$．

43. 先化简，再求值：$(2a-b)^2-(a+1-b)(a+1+b)+(a+1)^2$，其中 $a=\frac{1}{2}$，$b=-2$．

44. 先化简，再求值：$(2a-3)^2-(a-2)(a+2)-a(a-4)$，其中 $a^2-4a-1=0$．

45. 化简：$\left[\left(a-\frac{1}{3}\right)^2+\left(a+\frac{1}{3}\right)^2\right]\left(2a^2+\frac{2}{9}\right)$．

46. “$a^2\geqslant 0$”这个结论在数学中非常有用，有时我们需要将代数式配成完全平方式．例如：$x^2+4x+5=x^2+4x+4+1=(x+2)^2+1$，$\because (x+2)^2\geqslant 0$，$\therefore (x+2)^2+1\geqslant 1$，$\therefore x^2+4x+5\geqslant 1$．试利用“配方法”解决下列问题：

（1）填空：$x^2-4x+5=(x\_\_\_\_)^2+\_\_\_\_$．

（2）已知 $x^2-4x+y^2+2y+5=0$，求 $x+y$ 的值．

（3）比较代数式：$x^2-1$ 与 $2x-3$ 的大小．

# 乘法公式 答案

### 第一部分

1. A  2. C  3. B  4. A  5. C  6. B  7. A  8. D  9. A  10. D
11. C  12. C  13. B  14. C  15. D

### 第二部分

16. $(x+2)^2+1$ 【解析】$\begin{aligned}&x^2+4x+5\\=&x^2+4x+4+1\\=&(x+2)^2+1.\end{aligned}$

17. 1  18. $-1$ 或 7  【解析】提示：$2(m-3)=\pm 8$

19. 4，8  20. 7  21. $2499\dfrac{2499}{2500}$  22. 33  23. 7 或 $-1$  24. 6

【解析】$\because ab=2$，$a+b=4$，$\therefore a^2+b^2=12$，$\therefore \dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=\dfrac{a^2+b^2}{ab}=6$．

25. $\pm10$ 【解析】已知等式整理得：$9(a+b)^2-1=899$，即 $(a+b)^2=100$，开方得：$a+b=\pm10$．

### 第三部分

26. （1）$\begin{aligned}原式&=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)x^{1+2}y^{1+2}z\\&=-x^3y^3z.\end{aligned}$

（2）$\begin{aligned}原式&=x^2+4y^2-4xy+x^2-y^2\\&=2x^2+3y^2-4xy.\end{aligned}$

27. （1）$\begin{aligned}原式&=10m-6m^2-15+9m\\&=-6m^2+19m-15;\end{aligned}$

（2）$\begin{aligned}原式&=9a^6\cdot 8b^6\div 36a^2b^2\\&=2a^4b^4;\end{aligned}$

（3）原式 $=a^3-b^3$．

28. （1）$\begin{aligned}原式&=-(2a-3b)(2a-3b)-(2a+3b)^2\\&=-\left(4a^2-12ab+9b^2\right)-\left(4a^2+12ab+9b^2\right)\\&=-8a^2-18b^2;\end{aligned}$

（2）$\begin{aligned}原式&=-(2a-b-3c)(2a-b+3c)\\&=-[(2a-b)-3c][(2a-b)+3c]\\&=-(2a-b)^2+9c^2\\&=9c^2-4a^2+4ab-b^2.\end{aligned}$

29. $\begin{aligned}原式&=a^2+2ab-2ab-2b^2\\&=a^2-2b^2.\end{aligned}$

当 $a=\sqrt{5}$，$b=\sqrt{3}$ 时，$\begin{aligned}原式&=\left(\sqrt{5}\right)^2-2\times\left(\sqrt{3}\right)^2\\&=5-6\\&=-1.\end{aligned}$

30.（1）原式 $=-a-b$ ．当 $a=-2$ ，$b=1$ 时，原式 $=2-1=1$ ．

（2）$$\begin{aligned}原式&=-n+3mn+2mn-m\\&=5mn-m-n.\end{aligned}$$

又 $\because |m+n+3|+(mn-2)^2=0$ ，$\therefore m+n=-3$ ，$mn=2$ ，$$\begin{aligned}\therefore 原式&=5\times2-(-3)\\&=13.\end{aligned}$$

31. $\triangle ABC$ 是等边三角形．证明如下：因为 $2a^2+2b^2+2c^2=2ab+2ac+2bc$ ，

所以 $2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc=0$ ，

$a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2=0$ ，

$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0$ ，所以 $(a-b)^2=0$ ，$(a-c)^2=0$ ，$(b-c)^2=0$ ，得 $a=b$ 且 $a=c$ 且 $b=c$ ，即 $a=b=c$ ，所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形．

32. $$\begin{aligned}原式&=x^2-4xy+4y^2-x^2+y^2-2y^2\\&=3y^2-4xy.\end{aligned}$$ 将 $x=\frac{1}{4}$，$y=-\frac{1}{3}$ 代入得：

$$\begin{aligned}原式&=3\times\frac{1}{9}-4\times\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{3}\right)\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\\&=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

33.（1）$\because x=\sqrt{3}+1$ ，$y=\sqrt{3}-1$ ，$\therefore x+y=2\sqrt{3}$ ，$x-y=2$ ，

$xy=\left(\sqrt{3}+1\right)\times\left(\sqrt{3}-1\right)=2$ ，$$\begin{aligned}&x^2-y^2\\&=(x+y)(x-y)\\&=2\sqrt{3}\times2\\&=4\sqrt{3}.\end{aligned}$$

（2）$\because x=\sqrt{3}+1$ ，$y=\sqrt{3}-1$ ，

$\therefore x+y=2\sqrt{3}$ ，$x-y=2$ ，$xy=\left(\sqrt{3}+1\right)\times\left(\sqrt{3}-1\right)=2$ ，$$\begin{aligned}&x^2+xy+y^2\\&=(x+y)^2-xy\\&=\left(2\sqrt{3}\right)^2-2\\&=10.\end{aligned}$$

34.（1）$$\begin{aligned}原式&=2x-4y+6x-3y\\&=8x-7y,\end{aligned}$$ 当 $x=2$，$y=1$ 时，$$\begin{aligned}原式&=8\times2-7\times1\\&=9.\end{aligned}$$

（2）$$\begin{aligned}原式&=3a^2-3ab+2b^2-2a^2+2ab-4b^2\\&=a^2-ab-2b^2,\end{aligned}$$

当 $a^2+ab=3$ ，$b^2+ab=2$ 时，$$\begin{aligned}原式&=a^2+ab-2\left(b^2+ab\right)\\&=3-4\\&=-1.\end{aligned}$$

35. （1） $x^3-27$ ；$4x^2-2x+1$ ；$x-y$

（2） $a^6-b^6$ .

36. $$\begin{aligned}原式&=\frac{1}{2}x-2x+\frac{2}{3}y^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{3}y^2\\&=-3x+y^2\end{aligned}$$ 当 $x=2, y=\frac{1}{2}$ 时 $$\begin{aligned}-3x+y^2&=-3\times2+(\frac{1}{2})^2\\&=-6+\frac{1}{4}\\&=-\frac{23}{4}\end{aligned}$$

37. $$\begin{aligned}原式&=m^3-8-2m^3+6m\\&=-m^3+6m-8.\end{aligned}$$ 当 $m=2$ 时，$-m^3+6m-8=-2^3+6\times2-8=-4$ .

38. $$\begin{aligned}原式&=x^2-y^2+xy+2y^2-\left(x^2-2xy+y^2\right)\\&=3xy.\end{aligned}$$ $\because x=2+\sqrt{3}$ ，$y=2-\sqrt{3}$ ，

$$\begin{aligned}\therefore 原式&=3\times\left(2+\sqrt{3}\right)\times\left(2-\sqrt{3}\right)\\&=3.\end{aligned}$$

39. （1） $a^2b+ab^2=ab(a+b)=2\times3=6$

（2） $\because a^2+b^2=(a+b)^2-2ab,\quad a^2+b^2=3^2-2\times2=5$ .

40. （1） 因为 $x+y=4$ ，所以 $(x+y)^2=16$ ，

所以 $x^2+2xy+y^2=16$ ，又因为 $x^2+y^2=10$ ，所以 $10+2xy=16$ ，所以 $xy=3$ .

（2） $$\begin{aligned}&(x-y)^2-3\\=&x^2-2xy+y^2-3\\=&10-2\times3-3\\=&1.\end{aligned}$$

41. （1） 原式 $=m^2-(2n-3)^2=m^2-4n^2+12n-9$ .

（2） 原式 $=a^2-6ab+9b^2+4a-12b+4$ .

42. $2y^2-2x$ ，6.

43. $$\begin{aligned}原式&=4a^2-4ab+b^2-\left(a^2+2a+1-b^2\right)+a^2+2a+1\\&=4a^2-4ab+b^2-a^2-2a-1+b^2+a^2+2a+1\\&=4a^2-4ab+2b^2,\end{aligned}$$

当 $a=\frac{1}{2}$，$b=-2$ 时，原式 $=1+4+8=13$ .

44. 原式 $=4a^2-12a+9-\left(a^2-4\right)-a^2+4a=2a^2-8a+13$ .

因为 $a^2-4a-1=0$ ，（所以 $a^2-4a=1$ ）原式 $=2+13=15$ .

45. $4a^4+\frac{8}{9}a^2+\frac{4}{81}$ .

（4）$\begin{aligned}&原式=\left(x^2-4\right)\left(x^2+4\right)\\&=x^4-16.\end{aligned}$

46. （1）$-2$；1【解析】$x^2-4x+5=(x-2)^2+1$ .

（2）$\begin{aligned}&x^2-4x+y^2+2y+5=0,\\&(x-2)^2+(y+1)^2=0,\end{aligned}$

则$x-2=0, y+1=0$，解得$x=2, y=-1$，则$x+y=2-1=1$.

（3）$\begin{aligned}&x^2-1-(2x-3),\\&=x^2-2x+2\\&=(x-1)^2+1,\end{aligned}$ $\because (x-1)^2\geqslant 0$ ，$\therefore (x-1)^2+1>0$ ，$\therefore x^2-1>2x-3$ .