13.3 等腰三角形 13.4 课题学习 最短路径问题

【学习任务】

1、了解等腰三角形和等边三角形的概念.

2、掌握等腰三角形和等边三角形的性质定理和判定定理，掌握含 30°角的直角三角形的性质.

3、能够进行轴对称作图，找到满足路径最短的点.

4、能够运用轴对称作图来解决选址问题，及路径最短问题.

【知识梳理】

等腰三角形 有两条边相等的三角形叫做等腰三角形（isosceles triangle）. 相等的两边都叫做腰，另一边叫做底边，两腰的夹角叫做顶角，腰和底边的夹角叫做底角.

等腰三角形的判定 如果一个三角形有两个角相等，那么这两个角所对的边也相等（简写成“等角对等边”）.

等腰三角形的性质 ① 等腰三角形的两个底角相等； ② 等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高相互重合（简写成“三线合一”）.

等边三角形：三条边都相等的三角形角等边三角形。

等边三角形的性质：等边三角形具有等腰三角形的所有性质，其中不同的是等边三角形的三个内角都相等，都等于 60°.

等边三角形的判定：

（1）定义法：证明三条边相等。

（2）等角法：有 2 个角等于 60°的三角形是等边三角形。

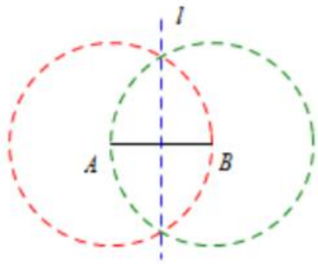
（3）等腰法：有一个角等于 60°的等腰三角形是等边三角形。

含 30°角的直角三角形

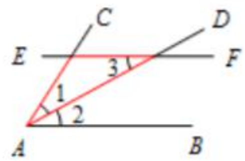
在直角三角形中，如果有一个锐角等于 30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半。

构造等腰三角形的方法

两圆一线

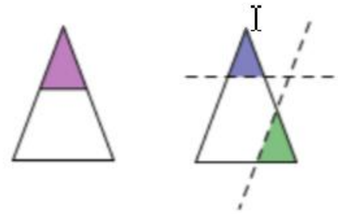


角平分线＋平行线



$\angle1=\angle2=\angle3$

等腰三角形＋平行线



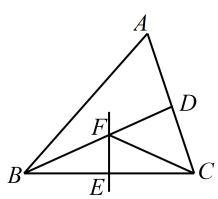
1、以A为圆心AB长为半径作圆，则圆周上除B以外的所有点，与点A、B构成等腰三角形；
2、以B为圆心AB长为半径，作圆，则圆周上除A以外的所有点，与点A、B构成等腰三角形；
3、作AB垂直平分线，除与AB的交点外，都能与点A、B构成等腰三角形.

【同步讲练】

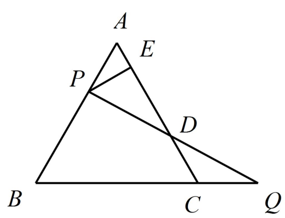
一、选择题

1. 如图，$\triangle ABC$ 中，BD 平分 $\angle ABC$，BC 的中垂线交 BC 于点 E，交 BD 于点 F，连接 CF．若 $\angle A=60°$，$\angle ABD=24°$，则 $\angle ACF$ 的度数为(　　)

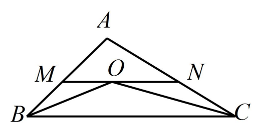
A. $48°$　　B. $36°$　　C. $30°$　　D. $24°$



第 1 题图



第 2 题图



第 3 题图

2. 如图，过边长为 1 的等边 $\triangle ABC$ 的边 AB 上一点 P，作 $PE\perp AC$ 于点 E，Q 为 BC 延长线上一点，当 $PA=CQ$ 时，连 PQ 交 AC 边于点 D，则 DE 的长为(　　)

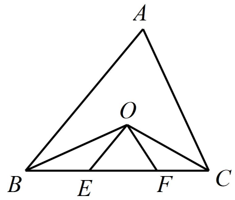
A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. 不能确定

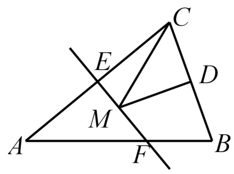
3. 如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC$，$\angle ACB$ 的平分线交于点 O，过 O 点作 $MN\parallel BC$ 分别交 AB，AC 于 M，N 两点，$AB=7$，$AC=8$，$CB=9$，则 $\triangle AMN$ 的周长是(　　)

A. 14　　B. 16　　C. 17　　D. 15

4. 如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC$，$\angle ACB$ 的平分线 BO，CO 相交于点 O，$OE\parallel AB$，$OF\parallel AC$，$\triangle OEF$ 的周长 $=10$，则 BC 的长为（　　）

A. 8　　B. 10　　C. 12　　D. 14





第 4 题图　　第 5 题图

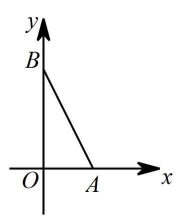
5. 如图，等腰三角形 ABC 的底边 BC 长为 4，面积是 16，腰 AC 的垂直平分线 EF 分别交 AC，AB 边于 E，F 点，若点 D 为 BC 边的中点，点 M 为线段 EF 上一动点，则 $\triangle CDM$ 周长的最小值为（　　）

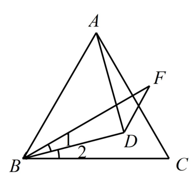
A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 12

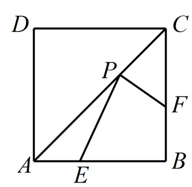
二、填空题

6. 平面直角坐标系中，已知 $A(2,2)$，$B(4,0)$．若在坐标轴上取点 C，使 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，则满足条件的点 C 的个数是________ 个．

7. 在平面直角坐标系中，点 $A(4,0)$，$B(0,8)$，以 AB 为斜边作等腰直角 $\triangle ABC$，则点 C 坐标为________．







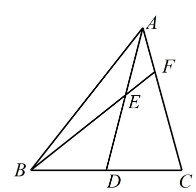
第 7 题图　　第 8 题图　　第 9 题图

8. 如图，D 为等边三角形 ABC 内一点，$DB=DA$，$BF=AB$，$\angle DBF=\angle DBC$，则 $\angle BFD$ 的度数为________．

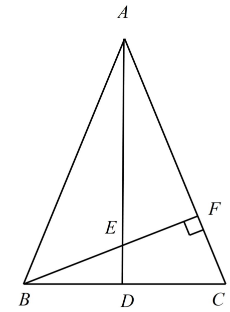
9.如图，正方形 $ABCD$ 的面积是 4，E，F，P 分别是 AB，BC，AC 上的动点，$PE+PF$ 的最小值等于________．

三、解答题

10. 已知：在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 BC 边上的中线，E 是 AD 上一点，且 $BE=AC$，延长 BE 交 AC 于 F，求证：$AF=EF$．



11. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，点 D 是 BC 的中点，$BF\perp AC$ 于点 F，交 AD 于点 E，$\angle BAC=45^\circ$．求证：$\triangle AEF\cong\triangle BCF$．

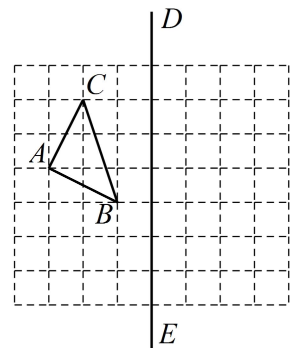


12. 如图，在所给的网格图中，完成下列各题（用直尺画图，否则不给分）．

（1）画出格点 $\triangle ABC$ 关于直线 DE 对称的 $\triangle A_1B_1C_1$；

（2）在 DE 上画出点 P，使 $PA+PC$ 最小；

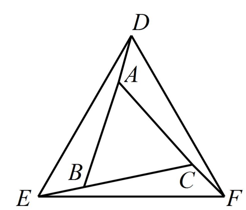
（3）在 DE 上画出点 Q，使 $QA-QB$ 最大.



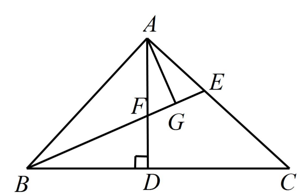
13. 如图，已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形，D，E，F 分别是射线 BA，CB，AC 上一点，且 $AD=BE=CF$，连接 DE，EF，DF.

（1）求证：$\angle BDE=\angle CEF$；

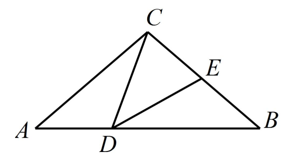
（2）试判断 $\triangle DEF$ 的形状，并简要说明理由.



14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，$AD\perp BC$，BE 平分 $\angle ABC$，BE 交 AD 于 F，G 为 EF 的中点，求证：$AG\perp EF$．



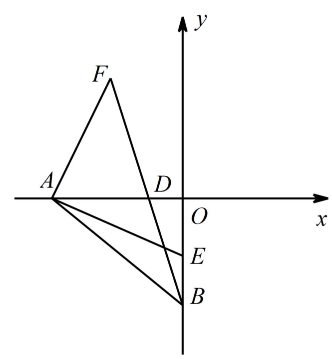
15. 如图，在等腰三角形 $\triangle ABC$ 中，$AC = BC$，D，E 分别为 AB，BC 上一点，$\angle CDE = \angle A$．若 $BC = BD$，求证：$CD = DE$；



16. 平面直角坐标系中，点 $A(a,0)$，点 $B(0,b)$，已知 a，b 满足 $a^2+b^2+8a+8b+32=0$；

（1）. 求点 A、点 B 的坐标；

（2）. 如图 1，点 E 为线段 OB 上一点，连接 AE，过 A 作 $AF \perp AE$，且 $AF = AE$，连接 BF 交 x 轴于点 D，若点 $D(-1,0)$，求点 E 的坐标；



17. 等腰 $\mathrm{Rt}\triangle ACB$ ，$\angle ACB = 90^\circ$ ，$AC = BC$ ，点 A，C 分别在 x 轴、 y 轴的正半轴上.

（1）. 如图 1，求证：$\angle BCO = \angle CAO$ ；

（2）. 如图 2，若 $OA = 5$ ，$OC = 2$ ，求 B 点的坐标.

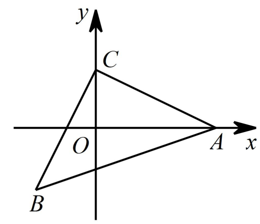


图1

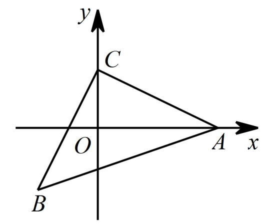


图2

18. 如图 a，在平面直角坐标系中，A，B 坐标分别为 $(6,0)$ ，$(0,6)$ ，P 为线段 AB 上的一点.

（1）如图 a，若 $S_{\triangle AOP} = 12$ ，求 P 的坐标；

（2）如图 b，若 P 为 AB 的中点，点 M，N 分别是 OA，OB 边上的动点，点 M 从顶点 A，点 N 从顶点 O 同时出发，且它们的速度都为 $1\ \mathrm{cm/s}$ ，则在 M，N 运动的过程中，线段 PM，PN 之间有何关系?并证明；

（3）如图 c，若 P 为线段 AB 上异于 A，B 的任意一点，过 B 点作 $BD \perp OP$ ，交 OP，OA 分别于 F，D 两点，E 为 OA 上一点，且 $\angle PEA = \angle BDO$ ，试判断线段 OD 与 AE 的数量关系，并说明理由.

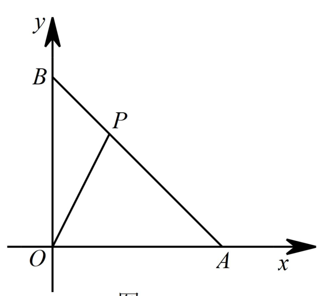


图 a

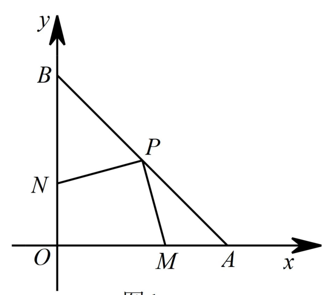


图 b

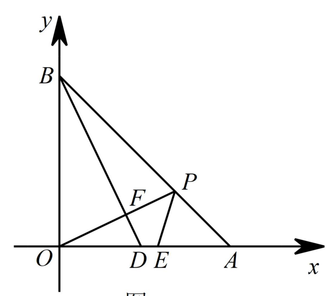
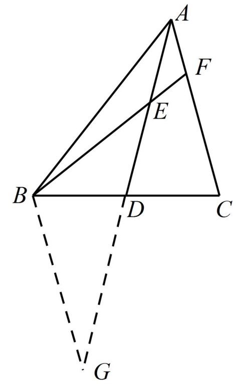


图 c

13.3 等腰三角形 13.4 课题学习 最短路径问题 答案

1. A　2. B　3. D　4. B　5. C

6. 5　7. $(6,6)$，$(-2,2)$　8. 30°　9. 2



10. 如图，延长 AD 到点 G，使得 $AD=DG$，连接 BG.

$\because$ AD 是 BC 边上的中线（已知），$\therefore$ $DC=DB$，

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle GDB$ 中，$\begin{cases} AD=DG, \\ \angle ADC=\angle GDB\ (\text{对顶角相等}), \\ DC=DB, \end{cases}$

$\therefore$ $\triangle ADC \cong \triangle GDB\,(\mathrm{SAS})$，$\therefore$ $\angle CAD=\angle G$，$BG=AC$.

又 $\because$ $BE=AC$，$\therefore$ $BE=BG$，$\therefore$ $\angle BED=\angle G$，$\because$ $\angle BED=\angle AEF$，

$\therefore$ $\angle AEF=\angle CAD$，即：$\angle AEF=\angle FAE$，$\therefore$ $AF=EF$.

11. $\because \angle BAC=45^\circ$，$BF\perp AF$，$\therefore \triangle ABF$ 为等腰直角三角形，$\therefore AF=BF$，

$\because AB=AC$，点 D 是 BC 的中点，$\therefore AD\perp BC$，$\therefore \angle EAF+\angle C=90^\circ$，

$\because BF\perp AC$，$\therefore \angle CBF+\angle C=90^\circ$，$\therefore \angle EAF=\angle CBF$，

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle BCF$ 中，$\begin{cases} \angle EAF=\angle CBF, \\ AF=BF, \\ \angle AFE=\angle BFC=90^\circ, \end{cases}$ $\therefore \triangle AEF \cong \triangle BCF$.

12.（1）

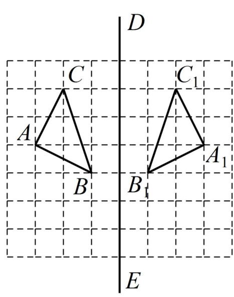


图1

（2）

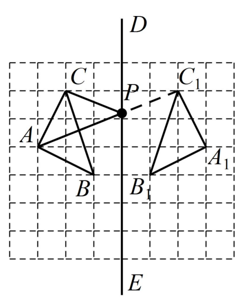


图2

（3）

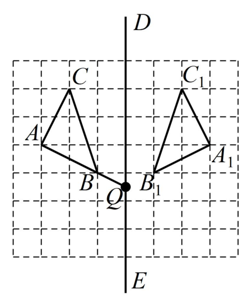


图3

13.（1）$\because \triangle ABC$ 为等边三角形，且 $AD=BE=CF$，

$\therefore \angle BAC=\angle ABC=\angle ACB=60^\circ$，$BD=CE$，$\therefore \angle EBD=\angle FCE$，

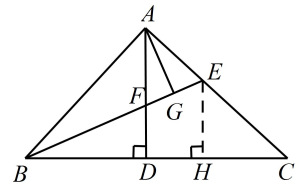
在 $\triangle BED$ 与 $\triangle CFE$ 中，$\begin{cases} DB=EC, \\ \angle DBE=\angle ECF, \\ BE=CF, \end{cases}$ $\therefore \triangle BED \cong \triangle CFE$，$\therefore \angle BDE=\angle CEF$.

（2）$\triangle DEF$ 是一个等边三角形．理由：同（1）可得 $\triangle ADF \cong \triangle BED \cong \triangle CFE$，

$\therefore DF=ED=EF$，$\therefore \triangle DEF$ 是一个等边三角形．

14. 过点 E 作 BC 的垂线，垂足为 H． $\because$ BE 平分 $\angle ABC$， $\angle BAE=90^\circ$， $EH\perp BC$，
$\therefore$ $\angle ABE=\angle HBE$， $AE=EH$， $\angle BAE=\angle BHE=90^\circ$，

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle HBE$ 中， $\begin{cases}\angle ABE=\angle HBE,\\ \angle BAE=\angle BHE,\\ BE=BE,\end{cases}$ $\therefore$ $\triangle ABE\cong\triangle HBE$，



$\therefore$ $\angle AEB=\angle BEH$， $\because$ $AD\perp BC$， $EH\perp BC$， $\therefore$ $EH\parallel AD$， $\therefore$ $\angle AFE=\angle HEF$，
$\therefore$ $\angle AFE=\angle AEF$， $\therefore$ $AE=AF$，又 G 为 EF 中点， $\therefore$ $AG\perp EF$．

15. （1） $\because$ $AC=BC$， $\angle CDE=\angle A$， $\therefore$ $\angle A=\angle B=\angle CDE$． $\therefore$ $\angle ACD=\angle BDE$．
又 $BC=BD$， $\therefore$ $BD=AC$，在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle BED$ 中，

$\begin{cases}\angle ACD=\angle BDE,\\ AC=BD,\\ \angle A=\angle B,\end{cases}$ $\therefore$ $\triangle ADC\cong\triangle BED$ （ASA）． $\therefore$ $CD=DE$．

16 (1) $a^2+b^2+8a+8b+32=(a+4)^2+(b+4)^2=0$，
所以 $a=-4$， $b=-4$，所以 $A(-4,0)$， $B(0,-4)$．

(2) 过 F 作 $FK\perp x$ 轴 交 x 轴于点 K，
易得 $\angle AKF=\angle AOE=90^\circ$，
因为 $\angle FAK+\angle EAO=\angle FAE=90^\circ$， $\angle EAO+\angle OEA=90^\circ$，
所以 $\angle FAK=\angle OEA$，在 $\triangle FKA$ 和 $\triangle AOE$ 中，

$\begin{cases}\angle FAK=\angle OEA,\\ \angle FKA=\angle AOE,\\ AF=AE,\end{cases}$ 所以 $\triangle FKA\cong\triangle AOE$，所以 $FK=AO$， $OE=AK$．因 $OA=OB$，

所以 $FK=OB$，在 $\triangle FKD$ 和 $\triangle BOD$ 中， $\begin{cases}\angle FDK=\angle BDO,\\ \angle FKD=\angle BOD,\\ FK=OB,\end{cases}$ 所以 $\triangle FKD\cong\triangle BOD$，所以 $DK=DO$，所以 $OE=AK=OA-2OD=2$，所以 $E(0,-2)$．

17 (1) 如图 1， $\because\angle ACB=90^\circ$， $\angle AOC=90^\circ$，
$\therefore\angle BCO+\angle ACO=90^\circ=\angle CAO+\angle ACO$，
$\therefore\angle BCO=\angle CAO$．

(2) 如图 2，过点 B 作 $BD\perp y$ 轴于 D，

则 $\angle CDB=\angle AOC=90^\circ$， $\triangle CDB$ 和 $\triangle AOC$ 中，

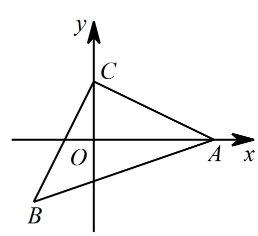


图1

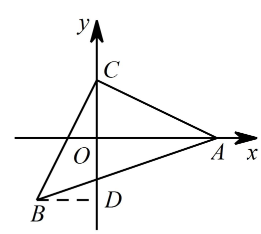


图2

$\begin{cases} \angle CDB = \angle AOC, \\ \angle BCO = \angle CAO, \\ BC = AC, \end{cases}$ $\therefore \triangle CDB \cong \triangle AOC\,(\mathrm{AAS})$ ，$\therefore BD = CO = 2$ ，

$CD = AO = 5$ ，$\therefore OD = 5 - 2 = 3$ ，又 $\because$ 点 B 在第三象限，

$\therefore B\,(-2, -3)$.

18.（1）$\because$ $S_{\triangle OAP} = \frac{1}{2} \times 6 \times y_P = 12$ ，$\therefore$ $y_P = 4$.

$\because$ $S_{\triangle BOP} = S_{\triangle OAB} - S_{\triangle OAP} = 6 = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot x_P$ ，$\therefore$ $x_P = 2$. $\therefore$ $P\,(2, 4)$.

（2）$PM = PN$ 且 $PM \perp PN$ ，证明如下：

如图 1，连接 PO，在 $\triangle NOP$ 与 $\triangle MAP$ 中，

$\begin{cases} ON = AM, \\ \angle NOP = \angle MAP = 45^\circ, \\ OP = AP, \end{cases}$ $\therefore$ $\triangle ONP \cong \triangle AMP$ ，

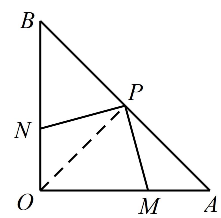


图1

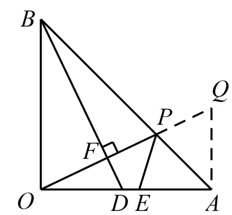


图2

$\therefore$ $PN = PM$. 且 $\angle OPN = \angle APM$.

又 $\because$ $\angle APM + \angle MPO = 90^\circ$ ，

$\therefore$ $\angle OPN + \angle MPO = 90^\circ$ ，即 $\angle MPN = 90^\circ$ ，

$\therefore$ $PM \perp PN$ ，综上：$PM = PN$ 且 $PM \perp PN$.

（3）$OD = AE$ ，理由：如图 2，

作 $AQ \perp AO$ 交 OP 延长线于 Q，易知 $\angle OBD = \angle AOQ$ ，在 $\triangle OBD$ 与 $\triangle AOQ$ 中，

$\begin{cases} \angle OBD = \angle AOQ, \\ OB = AO, \\ \angle BOD = \angle OAQ, \end{cases}$ $\therefore$ $\triangle OBD \cong \triangle AOQ$ ，$\therefore$ $\angle BDO = \angle Q = \angle PEA$ ，$OD = AQ$ ，

易证 $\triangle APE \cong \triangle APQ$ ，$\therefore$ $AE = AQ = OD$ ，$\therefore$ $OD = AE$.