



## 14.3 因式分解

### 【学习任务】

- 1、了解因式分解的含义及它与整式乘法的区别与联系。
- 2、掌握因式分解的几种方法，能够熟练准确把一个多项式进行因式分解。

### 【知识梳理】

#### 提公因式法

多项式各项都有的一个公共的因式叫做这个多项式各项的**公因式** (common factor) .

如果多项式的各项有公因式，可以把这个公因式提取出来，将多项式写成公因式与另一个因式的乘积的形式，这种分解因式的方法叫做提公因式法，即  $ma + mb + mc = m(a + b + c)$ .

#### 公式法

如果把乘法公式的等号两边互换位置，就可以得到用于分解因式的公式，用来把某些具有特殊形式的多项式分解因式，这种分解因式的方法叫做公式法。

平方差公式法： $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ ；完全平方公式法： $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ ， $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ .

#### 分组分解法

分组分解的目的就是在分组后能提取公因式或用公式、十字相乘，然后再分解，常见的四项式有两种方式：一、三分组和二、二分组。

**十字相乘法分解因式：**利用十字交叉线来分解系数，把二次三项式分解因式的方法叫做十字相乘法。

(1) 对于二次三项式  $x^2 + bx + c$ ，若存在  $\begin{cases} pq = c \\ p + q = b \end{cases}$ ，则  $x^2 + bx + c = (x + p)(x + q)$

(2) 首项系数不为 1 的十字相乘法

在二次三项式  $ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 中，如果二次项系数  $a$  可以分解成两个因数之积，即  $a = a_1a_2$ ，常数项  $c$  可以分解成两个因数之积，即  $c = c_1c_2$ ，把  $a_1, a_2, c_1, c_2$  排列如右图：

$$\begin{array}{cc} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \\ \hline a_1c_2 + a_2c_1 \end{array}$$

按斜线交叉相乘，再相加，得到  $a_1c_2 + a_2c_1$ ，若它正好等于二次三项式  $ax^2 + bx + c$  的一次项系数  $b$ ，即  $a_1c_2 + a_2c_1 = b$ ，那么二次三项式就可以分解为两个因式  $a_1x + c_1$  与  $a_2x + c_2$  之积，即  $ax^2 + bx + c = (a_1x + c_1)(a_2x + c_2)$ .

#### 其他因式分解的方法

##### 描述 配方法

对于一些不能直接利用公式法分解的多项式，有的可以利用将其配成一个完全平方式，然后再利用平方差公式，就能将其因式分解。

##### 拆、添项法

把多项式拆成若干部分再进行因式分解。

##### 换元法

选择多项式中的相同部分换成另一个未知数，将原式简化，然后进行因式分解，最后再转换回来。

##### 主元法

先选定一个字母为主元，然后把各项按这个字母次数从高到低排列，在进行因式分解。

##### 待定系数法

首先判断出分解因式的形式，然后设出相应整式的字母系数，求出字母系数，从而把多项式因式分解。



例题 分解因式：(主元)  $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$  .

解：

$$\begin{aligned} & a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) \\ &= a^2(b-c) - a(b^2 - c^2) + (b^2c - c^2b) \\ &= (b-c)[a^2 - a(b+c) + bc] \\ &= (b-c)(a-b)(a-c) . \end{aligned}$$

### 【同步讲练】

#### 一、选择题

- 把  $a^2 - 2a$  分解因式，正确的是 ( )  
 A.  $a(a-2)$                       B.  $a(a+2)$                       C.  $a(a^2-2)$                       D.  $a(2-a)$
- 将多项式  $ax^2 - 4ax + 4a$  分解因式，下列结果中正确的是 ( )  
 A.  $a(x-2)^2$                       B.  $a(x+2)^2$   
 C.  $a(x-4)^2$                       D.  $a(x+2)(x-2)$
- 把  $ax^2 - 4ay^2$  分解因式正确的是 ( )  
 A.  $a(x+2y)(x-2y)$                       B.  $a(x-2y)^2$   
 C.  $a(x-4y)^2$                       D.  $a(x+4y)(x-4y)$
- 对于任何整数  $m$ ，多项式  $(4m+5)^2 - 9$  都能 ( )  
 A. 被 8 整除                      B. 被  $m$  整除  
 C. 被  $(m-1)$  整除                      D. 被  $(2m-1)$  整除
- 下列多项式中，能分解因式的是 ( )  
 A.  $a^2 + b^2$                       B.  $-a^2 - b^2$                       C.  $a^2 - 4a + 4$                       D.  $a^2 + ab + b^2$
- 因式分解  $x^2 - 4y^2$  的结果是 ( )  
 A.  $(x+4y)(x-4y)$                       B.  $(x+2y)(x-2y)$   
 C.  $(x-4y)^2$                       D.  $(x-2y)^2$
- 下列各式： $x^2 - y^2$ ， $-x^2 + y^2$ ， $-x^2 - y^2$ ， $(-x)^2 + (-y)^2$ ， $x^4 - y^4$  中能用平方差公式分解因式的有 ( )  
 A. 1 个                      B. 2 个                      C. 3 个                      D. 4 个
- 把  $x^3 - 9x$  分解因式，结果正确的是 ( )  
 A.  $x(x^2 - 9)$                       B.  $x(x-3)^2$   
 C.  $x(x+3)^2$                       D.  $x(x+3)(x-3)$
- 若  $x = \sqrt{3} + 1$ ， $y = \sqrt{3} - 1$ ，则  $x^2 - y^2 =$  ( )  
 A.  $4\sqrt{3}$                       B.  $2\sqrt{3}$                       C. 0                      D. 2
- 下列分解因式正确的是 ( )  
 A.  $x(x+2) = x^2 + 2x$                       B.  $x^2 - 4x + 1 = x(x-4) + 1$   
 C.  $4x^2 - 1 = (4x+1)(4x-1)$                       D.  $-x^2 + 2x - 1 = -(x-1)^2$





29.  $x^2 - 5x + 6 =$  \_\_\_\_\_.

30. 已知多项式  $2x^2 + 3xy - 2y^2 - x + 8y - 6$  可以分解为  $(x + 2y + m)(2x - y + n)$  的形式，那么  $\frac{m^3 + 1}{n^2 - 1}$  的值是\_\_\_\_\_.

### 三、解答题

31. 分解因式：

(1)  $x^2 - 7x - 18$  .

(2)  $a^2 + 12ab + 32b^2$  .

(3)  $a^4 - 3a^2 - 4$  .

(4)  $x^4 - 13x^2 + 36$  .

(5)  $(a + 2b)^2 - 15(a + 2b) - 16$  .

(6)  $a^3 - 5a^2b - 24ab^2$  .

(7)  $(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 3$  .

(8)  $(x^2 - 3)^2 - x(x^2 - 3) - 2x^2$  .

32. 分解因式： $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2$  .

33. 因式分解.  $(t^2 + 4t)^2 + 7(t^2 + 4t) + 12$  .



34. 分解因式： $(m+n)^2 - 6m(m+n) + 9m^2$  .

35. 因式分解： $(x^2 + 3x)^2 - 2(x^2 + 3x) - 8$  .

36. 已知  $a - b = 2$  , 求  $a^2 - 2ab + b^2 - 3a + 3b + 1$  的值.

37. (1) 计算： $(x+2)(x-5)$  ; (2) 分解因式： $9x^3y - 4xy$  ;

38. 分解因式： $4m^2 - 9n^2$  .

39. 因式分解：(1)  $3ax^2 - 3ay^2$  ; (2)  $(2a-b)^2 + 8ab$  .

40. 分解因式：(1)  $3x - 12x^3$  ; (2)  $9a^2(x-y) + 4b^2(y-x)$  .



41. (1) 计算： $(x + 1)(x + 2)$  ； (2) 分解因式： $x^2y + 2xy + y$  。

42. 因式分解：(1)  $3am^2 - 3an^2$  ； (2)  $(2x - y)^2 + 8xy$  。

43. 因式分解： $x^4 + x^2 + 1$  。

44. 已知  $x, y$  都是正整数，且满足  $xy - x - y + 1 = 2$  ，求  $x, y$  的值。

45. 因式分解： $(x^2 + x)^2 + 3(x^2 + x) - 10$  。

46. 因式分解： $(a^2 - 2a)^2 - (a^2 - 2a) - 12$  。



47. 分解因式： $x^2 - 2xy + y^2 - 9$  .

48. 分解下列因式：

(1)  $4x^2 - 12xy + 9y^2$  ;

(2)  $25x^2 - 10x + 1$  ;

(3)  $a^4 - 18a^2 + 81$  ;

(4)  $(a^2 + 6a)^2 + 18(a^2 + 6a) + 81$  .

49. 已知  $x, y$  满足： $(x + y)^2 = 5$  ,  $(x - y)^2 = 41$  ; 求  $x^3y + xy^3$  的值.

50. 分解因式： $(x^2 + xy + y^2)^2 - 4xy(x^2 + y^2)$ .



## 14.3 因式分解 答案

### 第一部分

1. A 2. A 3. A 4. A 5. C 6. B 7. C 8. D 9. A 10. D  
11. C 12. A 13. C 14. C 15. D 16. B 17. A 18. A

### 第二部分

19.  $2x(x+2)(x-2)$  20.  $mn(m+n)(m-n)$  21.  $2a(2a+b)(2a-b)$   
22.  $(y+x+2)(y-x-2)$  23.  $(m+n+1)(m+n-1)$  24.  $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$  25.  $-2, -5$

【解析】 $\because (x+3)(x+n) = x^2 + (3+n)x + 3n$  ,  
 $\therefore x^2 + mx - 15 = x^2 + (3+n)x + 3n$  ,  
 $\therefore m = 3+n$  ,  $3n = -15$  , 解得  $m = -2$  ,  $n = -5$  .

26. 15 27.  $(x+2y-1)(x+2y-2)$  28.  $(x-6)(x+1)$  ,  $(x-1)(y-1)$  29.  $(x-2)(x-3)$   
30.  $-\frac{7}{8}$

### 第三部分

31. (1)  $(x-9)(x+2)$  . (2)  $(a+4b)(a+8b)$  . (3)  $(a+2)(a-2)(a^2+1)$  .  
(4)  $(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)$  . (5)  $(a+2b-16)(a+2b+1)$  .  
(6)  $a(a-8b)(a+3b)$  . (7)  $(x-3)(x+1)(x-1)^2$  .  
(8)  $(x-3)(x+1)(x^2+x-3)$  .

32. 令  $x^2 + 4x + 8 = u$  , 利用十字相乘得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= u^2 + 3xu + 2x^2 \\ &= (u+x)(u+2x) \\ &= (x^2 + 4x + 8 + x)(x^2 + 4x + 8 + 2x) \\ &= (x^2 + 5x + 8)(x^2 + 6x + 8) \\ &= (x+2)(x+4)(x^2 + 5x + 8) . \end{aligned}$$

33.  $(t+2)^2(t+1)(t+3)$  .

34.  $\text{原式} = (m+n-3m)^2$   
 $= (n-2m)^2$  .

35.  $(x+4)(x-1)(x+1)(x+2)$  .

36.  $-1$  .

37. (1) 原式  $= x^2 - 3x - 10$  . (2) 原式  $= xy(9x^2 - 4) = xy(3x+2)(3x-2)$  .

38.  $4m^2 - 9n^2 = (2m+3n)(2m-3n)$  .





39. (1)  $3ax^2 - 3ay^2 = 3a(x^2 - y^2) = 3a(x + y)(x - y).$
- (2)  $(2a - b)^2 + 8ab = 4a^2 + b^2 - 4ab + 8ab = 4a^2 + b^2 + 4ab = (2a + b)^2.$
40. (1) 原式  $= -3x(4x^2 - 1) = -3x(2x + 1)(2x - 1).$
- (2) 原式  $= 9a^2(x - y) - 4b^2(x - y) = (x - y)(9a^2 - 4b^2) = (x - y)(3a + 2b)(3a - 2b).$
41. (1) 原式  $= x^2 + 2x + x + 2 = x^2 + 3x + 2.$
- (2) 原式  $= y(x^2 + 2x + 1) = y(x + 1)^2.$
42. (1) 原式  $= 3a(m^2 - n^2) = 3a(m + n)(m - n).$
- (2) 原式  $= 4x^2 + y^2 - 4xy + 8xy = 4x^2 + y^2 + 4xy = (2x + y)^2.$
43.  $(x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)$  .
44. 由  $(x - 1)(y - 1) = 2$  得,  $x - 1 = 2, y - 1 = 1$  或  $x - 1 = 1, y - 1 = 2$ , 解得:  $x = 3, y = 2; x = 2, y = 3$  .
45.  $(x^2 + x + 5)(x + 2)(x - 1)$  .
46.  $(a^2 - 2a + 3)(a^2 - 2a - 4)$  .
47.  $(x - y + 3)(x - y - 3)$  .
48. (1)  $(2x - 3y)^2$  .
- (2)  $(5x - 1)^2$  .
- (3)  $(a + 3)^2(a - 3)^2$  .
- (4)  $(a + 3)^4$  .
49. 由  $(x + y)^2 = 5$  得:  $x^2 + 2xy + y^2 = 5$  .
- 由  $(x - y)^2 = 41$  得:  $x^2 - 2xy + y^2 = 41$  .
- 得:  $x^2 + y^2 = 23; xy = -9$  ,
- $x^3y + xy^3 = xy(x^2 + y^2) = (-9) \times 23 = -207$  .
50. 设  $x^2 + y^2 = a, xy = b$  ,
- 则原式  $= (a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2 = (x^2 + y^2 - xy)^2$  .