12.2 全等三角形的判定复习 12.3 角的平分线的性质

【学习任务】

1、复习巩固全等三角形的性质和判定。

2、会用尺规作一个角的平分线，并知道三角形的三条角平分线交于一点.

3、掌握角平分线的性质和判定，并会解决相关的问题.

【知识梳理】

角平分线的性质

角的平分线上的点到角的两边的距离相等.

三角形角平分线的性质

①三角形三条角平分线交于一点，这点到三边距离相等；

② 三角形的两个外角的平分线也交于一点，这点到三边所在的直线的距离相等 .

角平分线的判定

角的内部到角的两边距离相等的点在角的平分线上.

三角形外角平分线交点共有三个，所以到三角形三边所在直线距离相等的点共有 4 个.

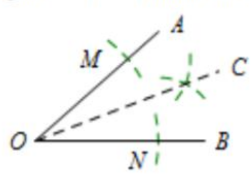
作已知角的平分线

作 $\angle AOB$ 的平分线.

作法：① 以 O 为圆心，适当长为半径画弧，交 OA 于点 M，交 OB 于点 N；

② 分别以点 M，N 为圆心，大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径画弧，两弧在 $\angle AOB$ 的内部交于点 C；

③ 过 O，C 两点作射线 OC，则射线 OC 就是所作的角的平分线.



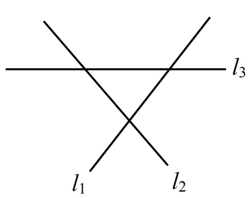
【同步讲练】

一、选择题

1. 若 $\triangle ABC$ 内一点 O 到三角形三条边的距离相等，则 O 为 $\triangle ABC$ （　　）的交点.

A. 角平分线　　B. 高线　　C. 中线　　D. 边的中垂线

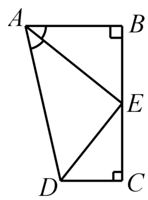
2. 如图，直线 l_1，l_2，l_3 表示三条互相交叉的公路，现在建一个货物中转站，要求到三条公路的距离相等，则可选择的地址有 (　　)

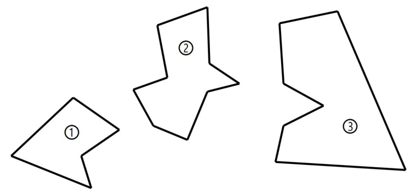


A. 一处　　B. 两处　　C. 三处　　D. 四处

3. 如图，$AB \perp BC$ ，$DC \perp BC$ ，AE 平分 $\angle BAD$ ，DE 平分 $\angle ADC$ ，以下结论：① $\angle AED = 90°$ ；②点 E 是 BC 的中点；③ $DE = BE$ ；④ $AD = AB + CD$ ．其中正确的是(　　)

A. ①②③　　　B. ①②④　　　C. ①③④　　　D. ②③④





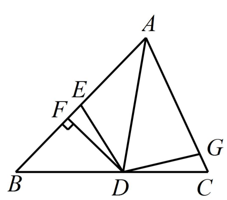
4. 如图，某同学把一块三角形的玻璃打碎成了三块，现在要到玻璃店去配一块完全一样的玻璃，那么最省事的办法是(　　)

A. 带①去　　　B. 带②去　　　C. 带去③去　　　D. 带①和②去

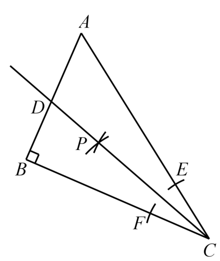
二、填空题

5. 已知一个三角形的周长为 16 cm ，且它的内角平分线的交点到一边的距离是 2.5 cm ，则这个三角形的面积是________ cm^2 .

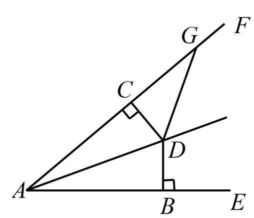
6. 如图，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，$DF \perp AB$ ，垂足为 F，$DE = DG$ ，$\triangle ADG$ 和 $\triangle AED$ 的面积分别为 64 和 42，则 $\triangle EDF$ 的面积为________.



第 6 题图



第 7 题图



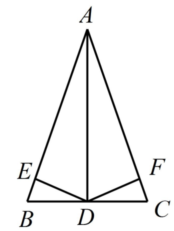
第 8 题图

7. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle B = 90°$ ，以顶点 C 为圆心，适当长为半径画弧，分别交 AC，BC 于点 E，F，再分别以点 E，F 为圆心，大于 $\frac{1}{2}EF$ 的长为半径画弧，两弧交于点 P，作射线 CP 交 AB 于点 D，若 $BD = 3$ ，$AC = 10$ ，则 $\triangle ACD$ 的面积是________.

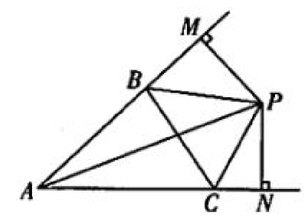
8. 如图所示，$DB \perp AE$ 于点 B，$DC \perp AF$ 于点 C，且 $DB = DC$ ，$\angle BAC = 40°$ ，$\angle ADG = 130°$ ，则 $\angle DGF =$ ________.

三、解答题

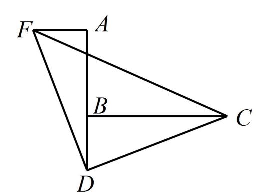
9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 的中点，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，垂足分别是 E，F，$BE=CF$．求证：AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线．



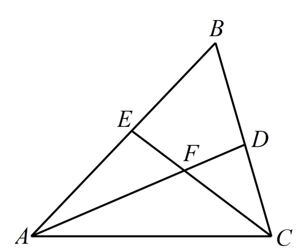
10. 已知：如图，BP，CP 分别是 $\triangle ABC$ 的外角平分线，$PM\perp AB$ 于点 M，$PN\perp AC$ 于点 N．求证：AP 平分 $\angle MAN$．



11. 如图，已知 $\angle ABC=90^\circ$，D 是 AB 延长线上的点，$AD=BC$，过点 A 作 $AF\perp AB$，并截取 $AF=BD$，连接 DC，DF，CF，求证：$FD\perp CD$．



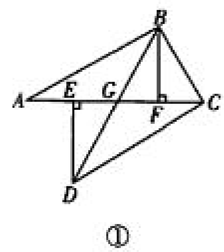
12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=60^\circ$，AD，CE 分别是 $\angle BAC$，$\angle BCA$ 的平分线，AD，CE 相交于点 F．请写出 FE 与 FD 之间的数量关系，并证明．

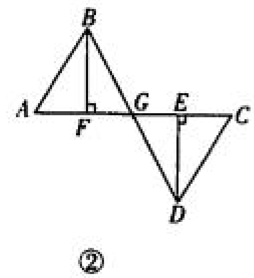


13. 如图①，点 A，E，F，C 在一条直线上，$AE=CF$，过点 E，F 分别作 $DE\perp AC$，$BF\perp AC$，若 $AB=CD$．

（1）求证：BD 平分 EF（即 $EG=FG$）．

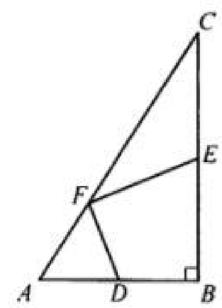
（2）若将 DE 向右平移、将 BF 向左平移，得到图②所示图形，在其余条件不变的情况下，（1）中的结论是否仍然成立?请说明理由．



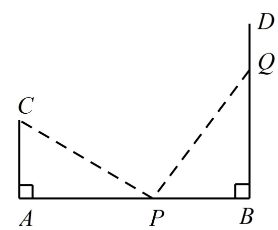


14. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=90^\circ$，D 是边 AB 的中点，点 E，F 分别在边 BC，AC 上，且 $EF=EC$，$DF=DA$．

求证：点 D 在 $\angle BEF$ 的平分线上．



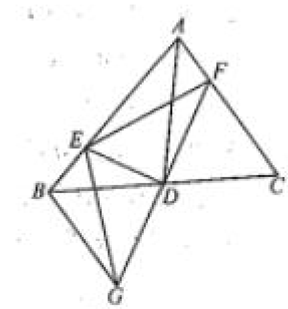
15. 如图，已知 $AB=12\text{cm}$，$CA\perp AB$ 于点 A，$DB\perp AB$ 于点 B，且 $AC=4\text{cm}$，点 P 从点 B 向点 A 运动，每秒钟走 1cm，点 Q 从点 B 向点 D 运动，每秒钟走 2cm，P，Q 两点同时出发，运动几秒钟后，$\triangle CPA$ 与 $\triangle PQB$ 全等?



16. 如图，$\triangle ABC$ 中，D 是 BC 的中点，过 D 点的直线 GF 交 AC 于点 F，交 AC 的平行线 BG 于点 G，$DE \perp GF$ 交 AB 于点 E，连接 EG.

（1）试说明 $BG = CF$ 的理由.

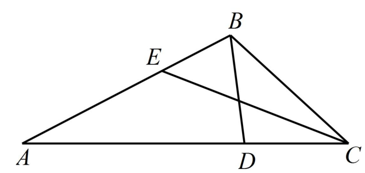
（2）请你判断 $BE + CF$ 与 EF 的大小关系，并试说明理由.



17. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC = 110°$，$\angle C$ 的平分线交 AB 于 E，在 AC 上取点 D，使得 $\angle CBD = 40°$.

（1）求证：点 E 到 AC 和 BD 的距离相等；

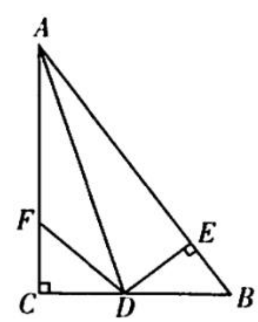
（2）连接 ED，求 $\angle CED$ 的度数.



18. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，$DE \perp AB$ 于点 E，点 F 在 AC 上，且 $BD = DF$.

（1）求证：$CF = EB$；

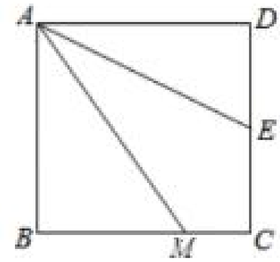
（2）试判断 AB 与 AF，EB 之间存在的数量关系，并说明理由.



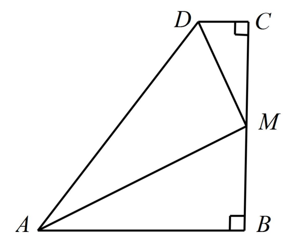
19. 如图、四边形 $ABCD$ 是正方形，M 是 BC 边上的一点，E 是 CD 的中点，AE 平分 $\angle DAM$.

（1）判断 $\angle AMB$ 与 $\angle MAE$ 的数量关系，并说明理由；

（2）求证：$AM=AD+MC$ ；



20. 如图，已知 $\angle B=\angle C=90°$ ，M 是 BC 中点，AM 平分 $\angle DAB$. 求证：DM 平分 $\angle ADC$.



21. 如图 1，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=BC=CD=AD=4\ \text{cm}$ ，$\angle BAD=\angle B=\angle C=\angle ADC=90°$ ，点 P 以 $1\ \text{cm/s}$ 的速度自点 A 向终点 B 运动，点 Q 同时以 $1\ \text{cm/s}$ 的速度自点 B 向终点 C 运动，连接 AQ，DP，设运动时间为 t s .

（1）当 $t=$ ________ s 时，点 P 到达点 B；

（2）求证：在运动过程中，$\triangle ABQ\cong\triangle DAP$ 始终成立；

（3）如图 2，作 $QM\parallel PD$ ，且 $QM=PD$ ，作 $MN\perp$ 射线 BC 于点 N，连接 CM，请问在 Q 的运动过程中，$\angle MCN$ 的度数是否改变?如果不变，请求出 $\angle MCN$ ；如果改变，请说明理由.

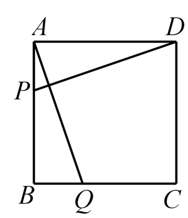


图1

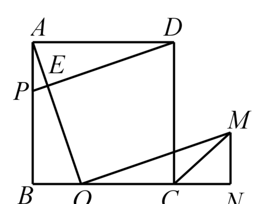


图2

12.2 全等三角形的判定复习 12.3 角的平分线的性质 答案

第一部分

1. A　2. D　3. B　4. C

第二部分

5. 20　6. 11　7. 15　8. 150°

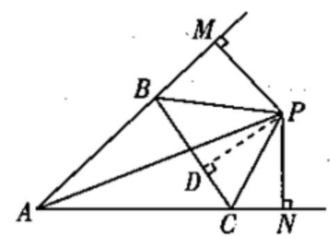
第三部分

9. $\because DE\perp AB$，$DF\perp AC$，$\therefore \angle BED=\angle DFC=90^\circ$．在 $\mathrm{Rt}\triangle BDE$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle CDF$ 中，

$\begin{cases} BD=DC, \\ BE=CF, \end{cases}$ $\therefore \mathrm{Rt}\triangle BDE\cong \mathrm{Rt}\triangle CDF$．$\therefore DE=DF$，

又 $DE\perp AB$，$DF\perp AC$，$\therefore$ 点 D 在 $\angle BAC$ 的平分线上，即 AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线.

10. 如答图，作 $PD\perp BC$ 于点 D.



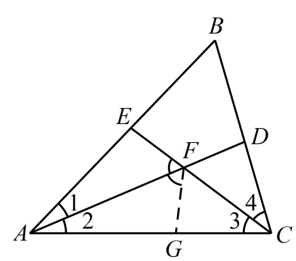
$\because BP$ 是 $\triangle ABC$ 的外角平分线，$PM\perp AB$，$PD\perp BC$，
$\therefore PM=PD$，同理，$PN=PD$，$\therefore PM=PN$，又 $PM\perp AB$，$PN\perp AC$，$\therefore AP$ 平分 $\angle MAN$.

11. $\because AF\perp AD$，$\angle ABC=90^\circ$，$\therefore \angle FAD=\angle DBC=90^\circ$，
在 $\triangle FAD$ 和 $\triangle DBC$ 中，

$\begin{cases} AD=BC, \\ \angle FAD=\angle DBC, \\ AF=BD, \end{cases}$ $\therefore \triangle FAD\cong\triangle DBC$，$\therefore \angle FDA=\angle DCB$，

$\because \angle BDC+\angle DCB=90^\circ$，$\therefore \angle BDC+\angle FDA=90^\circ$，$\therefore \angle FDC=90^\circ$，
$\therefore DF\perp CD$.

12. $FE=FD$.
如图，在 AC 上截取 $AG=AE$，连接 FG.



$\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线，$\therefore \angle 1=\angle 2$.
$\because AF=AF$，$\therefore \triangle AEF\cong\triangle AGF$．$\therefore \angle AFE=\angle AFG$，
$FE=FG$．$\because \angle B=60^\circ$，$CE$ 是 $\angle BCA$ 的平分线，
$\therefore \angle 2+\angle 3=60^\circ$．$\therefore \angle AFC=120^\circ$，
$\angle AFE=\angle CFD=\angle AFG=60^\circ$.
$\therefore \angle CFG=\angle CFD=60^\circ$．$\because \angle 3=\angle 4$，$FC$ 为公共边，
$\therefore \triangle CFG\cong\triangle CFD$．$\therefore FG=FD$．$\therefore FE=FD$.

13.（1）$\because AE=CF$，$\therefore AE+EF=CF+EF$，即 $AF=CE$．

$\because DE\perp AC$，$BF\perp AC$，$\therefore \angle DEG=\angle BFG=90^\circ$．在 $\mathrm{Rt}\triangle ABF$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle CDE$ 中，

$\begin{cases} AF=CE, \\ AB=CD, \end{cases}$ $\therefore \mathrm{Rt}\triangle ABF\cong \mathrm{Rt}\triangle CDE$，$\therefore DE=BF$．在 $\triangle DEG$ 和 $\triangle BFG$ 中，

$\begin{cases} \angle EGD=\angle FGB, \\ \angle DEG=\angle BFG, \\ DE=BF, \end{cases}$ $\therefore \triangle DEG\cong \triangle BFG$，$\therefore EG=FG$，即 BD 平分 EF．

（2）BD 仍然平分 EF．理由：$\because AE=CF$，$\therefore AE-EF=CF-EF$，即 $AF=CE$．

$\because DE\perp AC$，$BF\perp AC$，$\therefore \angle DEG=\angle BFG=90^\circ$．

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABF$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle CDE$ 中，$\begin{cases} AF=CE, \\ AB=CD, \end{cases}$ $\therefore \mathrm{Rt}\triangle ABF\cong \mathrm{Rt}\triangle CDE$，$\therefore DE=BF$．

$\because$ 在 $\triangle DEG$ 和 $\triangle BFG$ 中，$\begin{cases} \angle EGD=\angle FGB, \\ \angle DEG=\angle BFG, \\ DE=BF, \end{cases}$ $\therefore \triangle DEG\cong \triangle BFG$，$\therefore EG=FG$，

即 BD 平分 EF．

14. 提示：先证明 $\angle DFE=90^\circ$，再推出 $DF=DB$．

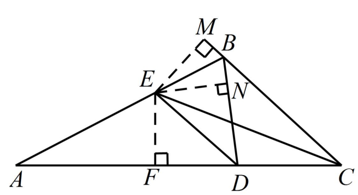
15. 设 t 秒后 $\triangle CPA\cong \triangle PQB$．由题意的，$AP=AB-BP=12-t$，$BQ=2t$，当 $\triangle CAP\cong \triangle PBQ$ 时，$AP=BQ$，即 $12-t=2t$，解得：$t=4$．即 4 秒后 $\triangle CPA\cong \triangle PQB$．

16.（1）$\triangle BDG\cong \triangle CDF\,(\mathrm{AAS})$．

（2）$BE+CF>EF$．

$BG=CF$，$\triangle GED\cong \triangle FED\,(\mathrm{SAS})$，$GE=EF$，$BE+BG>EG$．

17.（1）过 E 分别作 AC，BD，BC 垂线，垂足分别为 F，N，M．



$\because CE$ 平分 $\angle BCA$，$\therefore EF=EM$．$\because \angle ABC=110^\circ$，

$\therefore \angle MBE=70^\circ$．又 $\angle DBC=40^\circ$，

$\therefore \angle ABD=\angle ABC-\angle CBD=110^\circ-40^\circ=70^\circ$．

在 $\triangle MEB$ 和 $\triangle NEB$ 中

$\begin{cases} \angle EMB=\angle ENB, \\ \angle EBM=\angle EBN, \\ EB=EB. \end{cases}$ $\therefore \triangle MEB\cong \triangle NEB$，$\therefore EM=EN$，则 $EN=EF$．

（2）设 $\angle BCD=\alpha$，$\therefore\ \angle ECD=\dfrac{\alpha}{2}$，$\angle FEC=90^\circ-\dfrac{\alpha}{2}$，

$\angle BDA=\angle DBC+\angle BCD=40^\circ+\alpha$，$\therefore\ \angle EDA=20^\circ+\dfrac{\alpha}{2}$，

$$\begin{aligned}\angle FED&=90^\circ-\angle EDA\\&=90^\circ-20^\circ-\frac{\alpha}{2}\\&=70^\circ-\frac{\alpha}{2}.\end{aligned}\qquad \begin{aligned}\therefore\angle DEC&=\angle FEC-\angle FED\\&=90^\circ-\frac{\alpha}{2}-70^\circ+\frac{\alpha}{2}\\&=20^\circ.\end{aligned}$$

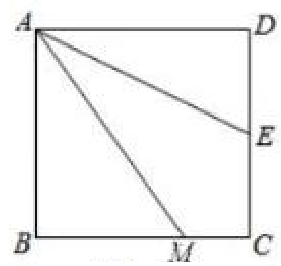
18.（1）$\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线，$DE\perp AB$，$\angle C=90^\circ$，$\therefore DC=DE$．在 $\mathrm{Rt}\triangle FCD$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle BED$ 中，$\begin{cases}DC=DE,\\DF=DB,\end{cases}$ $\therefore \mathrm{Rt}\triangle FCD\cong\mathrm{Rt}\triangle BED$，$\therefore CF=EB$．

（2）在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle AED$ 中，

$\begin{cases}DC=DE,\\AD=AD,\end{cases}$ $\therefore \mathrm{Rt}\triangle ACD\cong\mathrm{Rt}\triangle AED$，$\therefore AC=AE$，

$\therefore AB=AE+BE=AF+FC+BE=AF+2BE$．

19.（1）如图 1 所示：



$\angle AMB$ 与 $\angle MAE$ 的数量关系：$\angle AMB=2\angle MAE$，理由如下：

$\because\ AD\parallel BC$ $\therefore\ \angle DAM=\angle AMB$，$\because\ AE$ 平分 $\angle DAM$，

$\therefore\ \angle MAE=\dfrac{1}{2}\angle DAM$，$\therefore\ \angle AMB=2\angle MAE$．

（2）如图 2 所示：

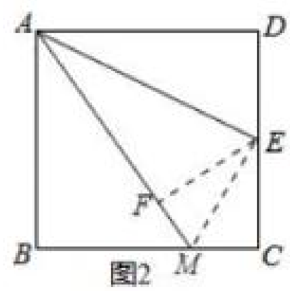


图2

过点 E 作 $EF\perp AM$ 交 AM 于点 F，连接 EM．

$\because AE$ 平分 $\angle DAM$，$DE\perp AD$，$DF\perp AM$，

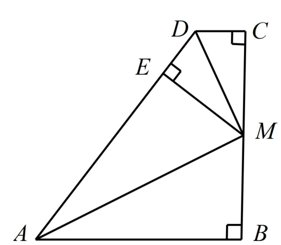
$\therefore ED=EF$，又 $\because E$ 是 CD 的中点，

$\therefore ED=EC$，$\therefore EF=EC$，$AD=AF$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle EFM$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle ECM$ 中，

$\begin{cases}EF=EC,\\EM=EM,\end{cases}$ $\therefore \mathrm{Rt}\triangle EFM\cong\mathrm{Rt}\triangle ECM\ (\mathrm{HL})$，

$\therefore FM=MC$，又 $\because AM=AF+FM$，$\therefore AM=AD+MC$．



20. 如图，过点 M 作 $ME\perp AD$ 于点 E，根据角平分线定理有 $MB=ME$，

根据已知条件有 $ME=MC$，则点 M 在 $\angle ADC$ 的平分线上，即 DM 平分 $\angle ADC$．

21.（1） 4

（2） 由题意：在运动过程中，$AP=BQ=t$ ，在正方形 $ABCD$ 中，$AB=AD$ ，$\angle DAP=\angle B=90^\circ$ ，$\therefore$ 在 $\triangle ABQ$ 和 $\triangle DAP$ 中，

$$\begin{cases} AB=AD, \\ \angle DAP=\angle B, \\ AP=BQ. \end{cases} \quad \therefore \triangle ABQ \cong \triangle DAP\,(\text{SAS})$$.

（3） $\angle MCN=45^\circ$ 为一定值．理由如下：$\because \triangle ABQ \cong \triangle DAP$ ，$\therefore \angle ADP=\angle BAQ$ ，$PD=AQ$ ，$\therefore \angle ADP+\angle DAQ=\angle BAQ+\angle DAQ=90^\circ$ ，即 $\angle AED=90^\circ$ ，
$\because QM \parallel PD$ ，$\therefore \angle EQM=\angle AED=90^\circ$ ，$\therefore \angle AQB+\angle MQN=90^\circ$ ，
$\because \angle BAQ+\angle AQB=90^\circ$ ，$\therefore \angle MQN=\angle BAQ$ ，$\because MN \perp BN$ ，$\therefore \angle N=90^\circ=\angle B$ ，
$\because PD=AQ$ ，$AQ=DP$ ，$\therefore AQ=QM$ ．在 $\triangle ABQ$ 和 $\triangle QNM$ 中，

$$\begin{cases} \angle N=90^\circ=\angle B, \\ \angle MQN=\angle BAQ, \\ AQ=QM. \end{cases} \quad \therefore \triangle ABQ \cong \triangle QNM\,(\text{AAS})$$ ，$\therefore QN=AB=BC$ ，$MN=BQ$ ，

$\therefore QN-QC=BC-QC$ ，即 $BQ=CN$ ，又 $MN=BQ$ ，$\therefore NC=MN$ ，
$\because \angle N=90^\circ$ ，$\therefore \triangle CMN$ 是等腰直角三角形，
$\therefore \angle MCN=45^\circ$ 为一定值．