



15.2 分式的运算

【学习任务】

- 1、理解负整数指数幂的意义，会进行幂的运算.
- 2、掌握分式的四则混合运算，提高计算能力.

【知识梳理】

负指数幂运算

描述 负整数次幂

a^n 的意义亦可视为 $a^n = 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ 个}}$ ，起始值为 1（乘法的单位元）乘上 n 个 a ，这样就很容易得到：

指数是负整数时就等于重复除以底数（或底数的倒数自乘指数这么多次），即

$$a^{-n} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ 个}}} = 1 \cdot \underbrace{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a}}_{n \text{ 个}} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad (a \neq 0, n \text{ 为正整数}), \text{ 例如: } a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$(a \neq 0); 2^{-3} = \frac{1}{8}.$$

分式的乘除

描述 分式的乘法法则

分式乘分式，用分子的积作为积的分子，分母的积作为积的分母，即 $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

分式的除法法则

分式除以分式，把除式的分子、分母颠倒位置后，与被除式相乘，即 $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$.

整数指数幂

$$\textcircled{1} a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0, m, n \text{ 是整数});$$

$$\textcircled{2} \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (n \text{ 是整数});$$

$$\textcircled{3} a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0, n \text{ 是整数}).$$

分式的加减

描述 分式的加减法则

$$\textcircled{1} \text{ 同分母分式相加减，分母不变，把分子相加减，即 } \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}.$$

$$\textcircled{2} \text{ 异分母分式相加减，先通分，变为同分母的分式，再加减，即 } \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}.$$

分式的混合运算

描述 混合运算法则

① 先乘方，再乘除，最后加减；

② 同级运算，按照从左到右的顺序进行；

③ 如果有括号，先做括号内的运算，按小括号、中括号、大括号依次进行.



【同步讲练】

一、选择题

1. 下列运算正确的是 ()

A. $-a^2 \cdot 3a^3 = -3a^6$

B. $\left(-\frac{1}{2}a^3b\right)^2 = \frac{1}{4}a^5b^2$

C. $a^5 \div a^5 = a$

D. $\left(-\frac{y}{2x}\right)^3 = -\frac{y^3}{8x^3}$

2. 计算 $\frac{1}{a} \div \left(-\frac{1}{a^2}\right)$ 的结果为 ()

A. a

B. $-a$

C. $-\frac{1}{a^3}$

D. $\frac{1}{a^3}$

3. 计算 $\left(-\frac{3ax^2}{2y}\right)^3$ 的结果是 ()

A. $-\frac{27a^3x^6}{8y^3}$

B. $\frac{27a^3x^6}{8y^3}$

C. $-\frac{9a^3x^6}{6y^3}$

D. $\frac{9a^3x^6}{6y^3}$

4. 石墨烯目前是世界上最新也是最坚硬的纳米材料，同时还是导电性最好的材料，其理论厚度仅 0.00000000034 米，将这个数用科学记数法表示为 ()

A. 0.34×10^{-9}

B. 3.4×10^{-9}

C. 3.4×10^{-10}

D. 3.4×10^{-11}

5. 雾霾天气影响着我国北方中东部地区，给人们的健康带来严重的危害。为了让人们对雾霾有所了解，摄影师张超通过显微镜，将空气中细小的霾颗粒放大 1000 倍，发现这些霾颗粒平均直径为 10 微米 ~ 20 微米，其中 20 微米 (1 米 = 1000000 微米) 用科学记数法可表示为 ()

A. 2×10^5 米

B. 0.2×10^{-4} 米

C. 2×10^{-5} 米

D. 2×10^{-4} 米

6. 化简 $\left(1 - \frac{2x-1}{x^2}\right) \div \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$ 的结果为 ()

A. $\frac{x-1}{x+1}$

B. $\frac{x+1}{x-1}$

C. $\frac{x+1}{x}$

D. $\frac{x-1}{x}$

7. 若 x 等于它的倒数，则 $\frac{x^2-x-6}{x-3} \div \frac{x-3}{x^2-5x+6}$ 的值是 ()

A. -3

B. -2

C. -1

D. 0

8. 计算 $(-a)^2 \cdot \frac{b}{a^2}$ 的结果为 () .

A. b

B. $-b$

C. ab

D. $\frac{b}{a}$

9. 下列各式中，正确的是 ()

A. $\left(\frac{x+y}{xy}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$

B. $\left(-\frac{y^2}{2x}\right)^3 = -\frac{y^5}{6x^3}$

C. $\left(\frac{x^2}{y}\right)^n \cdot \left(\frac{y^n}{x^{n+1}}\right)^2 = \frac{y^2}{x^2}$

D. $\left(\frac{n}{3m}\right)^2 \div \left(-\frac{n}{m}\right)^6 = \frac{m^4}{9n^4}$



10. 如果 $a = \sqrt{3} - 1$ ，那么代数式 $\left(1 + \frac{1}{a-1}\right) \div \frac{a}{a^2-1}$ 的值为 ()
- A. 3 B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\sqrt{3} - 2$
11. 化简 $\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x^2-4}$ 的结果是 ()
- A. $\frac{1}{x+2}$ B. $\frac{x+4}{x^2-4}$ C. $x+2$ D. $x+4$
12. 化简 $\frac{2b}{a^2-b^2} + \frac{1}{a+b}$ ，其结果为 ()
- A. $\frac{1}{a-b}$ B. $\frac{1}{a+b}$ C. $\frac{1}{a^2-b^2}$ D. $\frac{a}{a^2-b^2}$
13. 若 $x = -1$ ， $y = 2$ ，则 $\frac{2x}{x^2-9y^2} - \frac{1}{x-3y}$ 的值等于 ()
- A. 1 B. -1 C. $\frac{1}{5}$ D. $-\frac{1}{7}$
14. 计算 $\frac{x}{x+1} - \frac{1}{x(x+1)}$ 的结果为 ()
- A. x^2 B. $\frac{x-1}{x}$ C. $\frac{x+1}{x}$ D. $\frac{x}{x-1}$
15. 若分式 $\frac{x^2}{x+1} \square \frac{x}{x+1}$ 的运算结果为 $x (x \neq 0)$ ，则在“ \square ”中添加的运算符号为 ()
- A. + B. - C. + 或 \div D. - 或 \times
16. 如果 $x^2 + 2x - 2 = 0$ ，那么代数式 $\frac{1}{x-2} \cdot \frac{x^2-4x+4}{x} - \frac{x}{x+2}$ 的值为 ()
- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

二、填空题

17. 计算： $\frac{2a^2}{7} \cdot \frac{3b}{4a} =$ _____.
18. $\left(\frac{a-b}{a}\right)^4 \cdot \left(\frac{a}{b-a}\right)^5 =$ _____.
19. 化简： $-\left(-\frac{a^2}{b}\right)^2 \cdot \left(-\frac{b^2}{a}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{ab}\right)^4 \cdot (2a^3) =$ _____.
20. 若 n 为正整数，则化简 $\left(-\frac{a}{b}\right)^{2n+1} \cdot \left(-\frac{b}{a}\right)^{2n} =$ _____.
21. 计算： $\left(\frac{y}{x}\right)^2 \div \left(-\frac{x^3}{y}\right)^3 \cdot \left(\frac{5y}{2x^2}\right)^2 =$ _____.
22. 计算： $\frac{x-2}{x^2-2x+1} \cdot \frac{1-x^2}{x^2-x-2} =$ _____.



23. 计算： $\sqrt{4} + (\pi - 2)^0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} =$ _____.

24. 计算： $1 \div (x^{-2} + y^{-2}) =$ _____.

25. 将代数式 $2x^2y^{-3}$ 表示成只含有正整数指数幂的形式为_____.

26. 化简 $\left(a - \frac{b^2}{a}\right) \div \frac{a-b}{a}$ 的结果是_____.

27. 计算： $\frac{6}{a-3} + \frac{2a}{3-a} =$ _____.

28. 化简： $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 2x} \div \left(\frac{4}{x+2} - 1\right) =$ _____.

29. 化简分式 $\left(\frac{2}{x+y} - \frac{x-3y}{x^2-y^2}\right) \div \frac{1}{x-y}$ 的结果为_____.

30. 已知 $m + n = -3$ ，则分式 $\frac{m+n}{m} \div \left(\frac{-m^2-n^2}{m} - 2n\right)$ 的值是_____.

31. 如果 $m + n = 4$ ，那么代数式 $\left(\frac{m^2+n^2}{m} + 2n\right) \cdot \frac{2m}{m+n}$ 的值为_____.

32. 若 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 2$ ，则分式 $\frac{5m+5n-2mn}{-m-n}$ 的值为_____.

三、解答题

33. 计算题 $\frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{x^2-1}{x^2-4}$

34. 计算： $\frac{2a+2b}{3ab} \div \frac{a^2-b^2}{9a^2b}$.

35. 计算： $\left(\frac{a^2b}{-4a}\right)^2 \cdot \left(\frac{2ma^2}{-b}\right)^2 \div \left(\frac{ma}{-2b}\right)^4$.

36. 计算题： $\frac{x^2-4y^2}{x^2+2xy+y^2} \div \frac{x^2-2xy}{x^2+3xy+2y^2}$.



37. 计算： $x^4 y \cdot (x^{-2} y)^{-3} \div \left(\frac{1}{y}\right)^2$.

38. 计算： $\frac{x^2 - a^2}{x^2 - 9a^2} + \frac{a(5a - 4x)}{(x - 3a)(x + 3a)} + \frac{25a^2}{9a^2 - x^2}$.

39. 计算：

(1) $\frac{x+1}{x^2-5x+6} - \frac{x+4}{x^2-5x+6} - \frac{2x-1}{5x-x^2-6}$; (2) $\frac{x^2}{x-1} + \frac{2x}{x-1} - \frac{3}{x-1}$.

40. 已知 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$, 求 $\frac{x^4 - y^4}{(x+y)(2x-y)} \cdot \frac{2x-y}{xy-y^2} \div \left(\frac{x^2+y^2}{y}\right)^2$ 的值.

41. 计算：

(1) $\left(\frac{a^2}{b}\right)^2 \left(-\frac{2b^2}{a}\right)^3$; (2) $\frac{9}{3-a} + \frac{a^2}{a-3}$.

42. 计算：

(1) $\frac{x^2}{x-5} + \frac{25}{5-x}$; (2) $\frac{2x-4}{x^2+3x} \div \frac{x-2}{x^2+6x+9}$; (3) $\frac{x^2}{x-1} - x - 1$.



43. 化简： $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} \div \frac{x - 2}{x^2 + 2x} + 2$.

44. 先化简，再求值： $\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 - b^2} + \frac{b}{a + b}$ ，其中 $a = -2$ ， $b = 1$.

45. 先化简，再求值： $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} \div \frac{x^2 + x}{x - 1}$ ，其中 $x = 2$.

46. 规定： $0.1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$ ； $0.01 = \frac{1}{100} = 10^{-2}$ ； $0.001 = \frac{1}{1000} = 10^{-3} \dots\dots$.

(1) 请用 10 的指数的形式表示 0.0001 ， 0.00001 ；

(2) 请将 0.002796 表示成 $a \times 10^{-n}$ （其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为正整数）的形式.

47. 已知 $a^2 - 6a + 13 + b^2 + 4b = 0$ ，求 $(a^{-1} + b^{-1}) \div (a^{-2} - b^{-2})$ 的值.

48. (1) 先化简，再求值： $\left(\frac{a+b}{2ab^2}\right)^3 \div \left(\frac{a^2-b^2}{ab^3}\right)^2 \div \left[\frac{1}{2(a-b)}\right]^2$ ，其中 $a = -\frac{1}{2}$ ， $b = \frac{2}{3}$.

(2) 已知 $x^2 - 3x - 2 = 0$ ，求代数式 $\frac{(x-1)^3 - x^2 + 1}{x-1}$ 的值.



15.2 分式的运算 答案

第一部分

1. D 2. B 3. A 4. C 5. C 6. A 7. A 8. A 9. D 10. B
11. B 12. A 13. C 14. B 15. C 16. A

第二部分

17. $\frac{3ab}{14}$ 【解析】 $\frac{2a^2}{7} \cdot \frac{3b}{4a} = \frac{3ab}{14}$. 18. $\frac{a}{b-a}$ 19. 2 20. $-\frac{a}{b}$ 21. $-\frac{25y^7}{4x^{15}}$
22. $\frac{1}{1-x}$ 23. 1 24. $\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ 25. $\frac{2x^2}{y^3}$ 26. $a+b$
27. -2 28. $-\frac{x-2}{x}$ 29. 1 30. $-\frac{1}{m+n}, \frac{1}{3}$ 31. 8 32. -4

第三部分

33. $\frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{x^2-1}{x^2-4} = \frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-1}{x+2}$.
原式 = $\frac{2(a+b)}{3ab} \cdot \frac{9a^2b}{(a+b)(a-b)}$
34. $= \frac{6a}{a-b}$.
35. $\frac{4a^2b^4}{m^2}$ 36. $\frac{(x+2y)^2}{x(x+y)}$. 37. x^{10} . 38. $\frac{x-7a}{x-3a}$. 39. (1) $\frac{2}{x-3}$. (2) $x+3$.
40. 由 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$, 得 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 0$,
 $\therefore x=1, y=-2$.
原式 = $\frac{(x^2+y^2)(x+y)(x-y)}{(x+y)(2x-y)} \cdot \frac{2x-y}{y(x-y)} \cdot \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y}{x^2+y^2}$.
当 $x=1, y=-2$ 时, 原式 = $\frac{-2}{1^2+(-2)^2} = -\frac{2}{5}$.

41. (1) $\left(\frac{a^2}{b}\right)^2 \left(-\frac{2b^2}{a}\right)^3 = \left(\frac{a^4}{b^2}\right) \left(-\frac{8b^6}{a^3}\right) = -8ab^4$. (2) $= \frac{9}{3-a} + \frac{a^2}{a-3}$
 $= -\frac{9}{a-3} + \frac{a^2}{a-3}$
 $= \frac{a^2-9}{a-3}$
 $= \frac{(a+3)(a-3)}{a-3}$
 $= a+3$.



$$42. \quad (1) \quad \begin{aligned} \text{原式} &= \frac{x^2}{x-5} - \frac{25}{x-5} \\ &= \frac{x^2-25}{x-5} \\ &= \frac{(x+5)(x-5)}{x-5} \\ &= x+5. \end{aligned} \quad (2) \quad \begin{aligned} \text{原式} &= \frac{2(x-2)}{x(x+3)} \cdot \frac{(x+3)^2}{x-2} \\ &= \frac{2(x+3)}{x} \\ &= \frac{2x+6}{x}. \end{aligned} \quad (3) \quad \begin{aligned} \text{原式} &= \frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2-1}{x-1} \\ &= \frac{1}{x-1}. \end{aligned}$$

$$43. \quad \begin{aligned} \text{原式} &= \frac{(x-2)^2}{(x+2)(x-2)} \div \frac{x-2}{x(x+2)} + 2 \\ &= \frac{(x-2)^2}{(x+2)(x-2)} \cdot \frac{x(x+2)}{x-2} + 2 \\ &= x+2. \end{aligned} \quad 44. \quad \begin{aligned} \text{原式} &= \frac{(a-b)^2}{(a+b)(a-b)} + \frac{b}{a+b} \\ &= \frac{a-b}{a+b} + \frac{b}{a+b} \\ &= \frac{a}{a+b}. \end{aligned}$$

把 $a = -2$, $b = 1$ 代入得：原式 = $\frac{-2}{-2+1} = 2$.

$$45. \quad \text{原式} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)} \times \frac{x-1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} \quad , \quad \text{当 } x = 2 \text{ 时, 原式} = \frac{1}{2} .$$

$$46. \quad (1) \quad 0.0001 = 10^{-4} \quad , \quad 0.00001 = 10^{-5} .$$

$$(2) \quad 0.002796 = 2.796 \times 0.001 = 2.796 \times 10^{-3} .$$

47. 由 $a^2 - 6a + 13 + b^2 + 4b = 0$ 得, $(a-3)^2 + (b+2)^2 = 0$, 解得 $a = 3$, $b = -2$.

$$\text{原式} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \div \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = \frac{a+b}{ab} \cdot \frac{a^2b^2}{b^2-a^2} = \frac{ab}{b-a} = \frac{6}{5} .$$

$$48. \quad (1) \quad \begin{aligned} &\frac{\left(\frac{a+b}{2ab^2}\right)^3 \div \left(\frac{a^2-b^2}{ab^3}\right)^2 \div \left[\frac{1}{2(a-b)}\right]^2}{8a^3b^6} \cdot \frac{a^2b^6}{(a+b)^2(a-b)^2} \cdot \frac{4(a-b)^2}{1} \\ &= \frac{a+b}{2a}. \end{aligned} \quad \text{当 } a = -\frac{1}{2}, b = \frac{2}{3} \text{ 时, } \begin{aligned} \text{原式} &= \frac{-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} \\ &= -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad &x^2 - 3x - 2 = 0 \quad , \quad \therefore x^2 - 3x = 2 \quad , \\ &\therefore \frac{(x-1)^3 - x^2 + 1}{x-1} \\ &= \frac{(x-1)^3 - (x^2-1)}{x-1} \\ &= \frac{(x-1)^3 - (x+1)(x-1)}{x-1} \\ &= (x-1)^2 - (x+1) \\ &= x^2 - 2x + 1 - x - 1 \\ &= x^2 - 3x \\ &= 2. \end{aligned}$$