



15.1 分式

【学习任务】

- 1、了解分式和最简分式及最简公分母的概念，能够确定分式有意义的条件，确定使分式值为 0 的条件.
- 2、掌握分式的基本性质，并能够对分式进行通分和约分运算.
- 3、类比小学分数的性质来学习分式，体会其中蕴含的类比、转化的数学思想.

【知识梳理】

分式的概念

形如 $\frac{A}{B}$ ， A 、 B 表示整式， B 中含有字母且 B 不等于 0 的式子叫做分式 (fraction). 其中 A 称为分式的分子， B 称为分式的分母，对于任意一个分式，分母都不能为零.

例题 1. 给出下列式子： $\frac{1}{a}$ ， $\frac{3a^2b^3c}{4}$ ， $\frac{x}{7} + \frac{y}{8}$ ， $9x + \frac{10}{y}$ ，其中，是分式的有 ()

- A. 4 个 B. 3 个 C. 2 个 D. 1 个

例题 2. 下列各式： $\frac{a-b}{2}$ ， $\frac{x-3}{x}$ ， $\frac{5+y}{\pi}$ ， $\frac{a+b}{a-b}$ ， $\frac{1}{m}(x-y)$ 中，是分式的共有 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

分式有无意义

在分式 $\frac{A}{B}$ 中，若 $B \neq 0$ ，则分式 $\frac{A}{B}$ 有意义；若 $B = 0$ ，则分式 $\frac{A}{B}$ 没有意义.

例题 3. 若代数式 $\frac{1}{x-3}$ 在实数范围内有意义，则实数 x 的取值范围是 ()

- A. $x < 3$ B. $x > 3$ C. $x \neq 3$ D. $x = 3$

分式值为正，为负，为零的条件

描述 分式值为 0

在分式 $\frac{A}{B}$ 中，当 $A = 0$ 且 $B \neq 0$ 时，分式 $\frac{A}{B}$ 的值为 0，即 $\frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0, \\ B \neq 0. \end{cases}$

分式值为正

在分式 $\frac{A}{B}$ 中，当 A 、 B 同号且 $B \neq 0$ 时，分式 $\frac{A}{B}$ 的值为正.

分式值为负

在分式 $\frac{A}{B}$ 中，当 A 、 B 异号且 $B \neq 0$ 时，分式 $\frac{A}{B}$ 的值为负.

例题 4. 若分式 $\frac{x-2}{2x+1}$ 的值为 0，则 x 的值为 ()

- A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

例题 5. 若分式 $\frac{x^2-1}{x+1}$ 的值为零，那么 x 的值为 ()

- A. $x = 1$ 或 $x = -1$ B. $x = 1$ C. $x = -1$ D. $x = 0$



分式的基本性质

描述 分式的基本性质

分式的分子与分母同乘（或除以）一个不等于 0 的整式，分式的值不变，即 $\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C}$ ，

$\frac{A}{B} = \frac{A \div C}{B \div C}$ ($C \neq 0$ ，其中 A 、 B 、 C 是整式)。

约分

约去分式的分子和分母的公因式，不改变分式的值，这样的分式变形叫做**分式的约分** (reduction of a fraction)。

一个分式的分子与分母没有公因式时，叫做**最简分式**。化简分式时，通常要使结果成为最简分式或者整式。

通分

把几个异分母的分式分别化成与原来的分式相等的同分母的分式，叫做**分式的通分** (reduction of fractions to a common denominator)。

各分式分母中的系数的最小公倍数与所有字母（或因式）的最高次幂的积，叫做**最简公分母**。

例题 6. 化简 $\frac{m^2 - 3m}{9 - m^2}$ 的结果是 ()

- A. $\frac{m}{m+3}$ B. $-\frac{m}{m+3}$ C. $\frac{m}{m-3}$ D. $\frac{m}{3-m}$

例题 7. 如果把分式 $\frac{x}{x+y}$ 中的 x 和 y 的值都扩大为原来的 3 倍，那么分式的值 ()

- A. 扩大为原来的 3 倍 B. 不变
C. 缩小为原来的 $\frac{1}{3}$ D. 缩小为原来的 $\frac{1}{6}$

例题 8. 下列分式从左至右的变形正确的是 ()

- A. $\frac{-a}{2b} = \frac{a}{-2b}$ B. $\frac{1}{n} = \frac{m+1}{m+n}$ C. $\frac{y^2+y}{xy} = \frac{y+1}{xy}$ D. $\frac{a}{b} = \frac{ac^2}{bc^2}$

例题 9. 分式 $\frac{x}{3y}$ 与 $\frac{3x}{2y^2}$ 的最简公分母是 ()

- A. $6y$ B. $3y^2$ C. $6y^2$ D. $6y^3$

例题 10. 分式 $\frac{1}{a^2-2a+1}$ ， $\frac{1}{a^2-1}$ ， $\frac{1}{a^2+2a+1}$ 的最简公分母是 ()

- A. $(a^2-1)^2$ B. $(a^2-1)(a^2+1)$
C. $(a^2+1)^2$ D. $(a-1)^4$

【同步讲练】

一、选择题

1. 若分式 $\frac{x^2-4}{2x-4}$ 的值为零，则 x 等于 ()

- A. 2 B. -2 C. ± 2 D. 0



二、填空题

11. 将分式约分： $\frac{x^5}{3x^2} =$ _____.
12. 已知 $ab \neq 0$ ， $a^2 + 2ab - 3b^2 = 0$ ，那么分式 $\frac{a+2b}{2a-b}$ 的值等于_____.
13. 若 $a + b = 2$ ， $ab = -5$ ，则 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} =$ _____.
14. 若分式 $\frac{a^2 - 9}{a - 3}$ 的值为 0，则实数 a 的值为_____.
15. 将分式 $\frac{9x - 18}{x^2 - 4}$ 化简的结果是_____.
16. 已知 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 3$ ，则代数式 $\frac{2x - 14xy - 2y}{x - 2xy - y}$ 的值为_____.
17. 如果分式 $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ 的值为零，则 $x =$ _____.
18. 已知 $\frac{b}{a} = \frac{2}{3}$ ，则 $\frac{a}{a+b}$ 的值是_____.
19. 在括号内填入适当的式子： $\frac{x+1}{x+2} = \frac{2x+2}{(\quad)} = \frac{(\quad)}{3x+6} = \frac{x^2+x}{(\quad)} = \frac{(\quad)}{2x^3+4x^2}$.
20. 分式 $\frac{1}{x^2 - 2x + 1}$ 和 $\frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ 的最简公分母是_____.
21. 若 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 3$ ，则分式 $\frac{3x + xy - 3y}{2x + 5xy - 2y} =$ _____.
22. 当 x _____ 时，分式 $\frac{1}{-x+5}$ 的值为正；当 x _____ 时，分式 $\frac{-4}{x^2+1}$ 的值为负.
23. 若 $a = 2b$ ，那么 $\frac{a^2 - 3b^2}{2ab}$ 的值是_____.

三、解答题

24. 已知 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 2$ ，求 $\frac{2a + 3ab - 2b}{3a + 2ab - 3b}$ 的值.



25. 当 a 取什么值时，分式 $\frac{a-3}{a+1}$ 的值是正数？

26. 当 x 为何值时，分式 $\frac{x-1}{2x+3}$ 的值是负数？

27. 底面为正方形的长方体，体积为 32 立方厘米，底面边长为 x 厘米，请用含 x 的式子表示这个长方体的高 h ，并求当底面边长 $x = 2$ 厘米时， h 的值.

28. 小巧购入每米售价为 a 元的红色彩绳 x 米与每米售价为 b 元的蓝色彩绳 y 米，将两种彩绳混合编织成一种新的彩绳，编织后的长度为两种彩绳长度之和，若不计人工费，则这种彩绳的成本为每米多少元？

29. 计算：

$$(1) (a^2 - 2a) \div (ab - 2b) \quad .$$

$$(2) (x^2 - 9) \div (x^2 - 6x + 9) \quad .$$



30. 约分：

$$(1) \frac{x^2 - 9}{x^2 + 6x + 9} ;$$

$$(2) \frac{m^2 - 3m}{m^2 - 9} .$$

31. 化简： $\frac{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}{a^2 - b^2 - c^2 - 2bc}$.

32. 已知 $x + \frac{1}{x} = 3$ ，求 $\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$ 的值.

33. 已知 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 4$ ，求 $\frac{2x + xy - 2y}{x - 2xy - y}$ 的值.

34. 已知 $x - 3y = 0$ ，且 $xy \neq 0$ ，求 $\frac{x^2 - y^2}{x^2 - xy + y^2}$ 的值.



15.1 分式 答案

例题

1. C 2. C 3. C 4. A 5. B 6. B 7. B 8. A 9. C 10. A

第一部分

1. B 2. A 3. D 4. D 5. B 6. A 7. A 8. B 9. C 10. C

第二部分

11. $\frac{x^3}{3}$ 12. 3 或 $\frac{1}{7}$ 13. $-\frac{14}{5}$ 14. -3 15. $\frac{9}{x+2}$ 16. 4

17. -1 18. $\frac{3}{5}$ 19. $2x+4$, $3x+3$, x^2+2x , $2x^3+2x^2$

20. $(x-1)^2 \cdot (x-2)$ 21. 8 22. < 5 , 为任意实数 23. $\frac{1}{4}$

第三部分

24. 由 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 2$ 得: $b - a = 2ab$, 即 $a - b = -2ab$,

$$\frac{2a + 3ab - 2b}{3a + 2ab - 3b} = \frac{2(a - b) + 3ab}{3(a - b) + 2ab} = \frac{-4ab + 3ab}{-6ab + 2ab} = \frac{1}{4} .$$

25. \because 分式 $\frac{a-3}{a+1}$ 的值是正数,

$$\therefore \begin{cases} a-3 < 0, \\ a+1 < 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a-3 > 0, \\ a+1 > 0. \end{cases} \text{ 解得 } a < -1 \text{ 或 } a > 3 ,$$

故当 $a < -1$ 或 $a > 3$ 时, 分式 $\frac{a-3}{a+1}$ 的值是正数.

26. $-\frac{3}{2} < x < 1$.

27. $h = \frac{32}{x^2}$, $h = 8$ 厘米.

28. $\frac{ax + by}{x + y}$ 元.

29. (1) $\frac{a}{b}$. (2) $\frac{x+3}{x-3}$.



30. (1) $\frac{x-3}{x+3}$ (2) $\frac{m}{m+3}$

31. $\frac{a+b-c}{a-b-c}$.

32. $\frac{1}{8}$.

33. $\frac{7}{6}$.

34. $x - 3y = 0 \Rightarrow x = 3y$,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{(3y)^2 - y^2}{(3y)^2 - 3y \cdot y + y^2} \\ &= \frac{8}{7}. \end{aligned}$$

$$\text{或 } \frac{x^2 - y^2}{x^2 - xy + y^2} = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} + 1} \quad (xy \neq 0) \quad ,$$

又 $x - 3y = 0 \Rightarrow \frac{x}{y} = 3$,

代入

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{9-1}{9-3+1} \\ &= \frac{8}{7}. \end{aligned}$$