16.2 二次根式的乘除 学案

一、知识梳理

二次根式的乘法法则

$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\ (a\geqslant 0,b\geqslant 0)$

二次根式的除法法则

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}\ (a\geqslant 0,b>0)$

最简二次根式

一个二次根式满足被开方数不含有分母，且不含有能开得尽方的因数或因式，叫做**最简二次根式**（simplest quadratic radical）．

分母有理化

① 如果两个含有二次根式的非零代数式相乘，它们的积不含有二次根式，就说这两个非零代数式互为有理化因式；

② 将原有无理数的分母化为有理数的过程，也就是将分母中的根号化去，叫做**分母有理化**，例如：

$\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{1\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\dfrac{1\cdot(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})\cdot(\sqrt{2}-\sqrt{5})}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$；

③ 将原有无理数的分子化为有理数的过程，也就是将分子中的根号化去，叫做**分子有理化**．例如：

$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$．

二、同步练习

（一）选择题

1. 若 $\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$ 成立，则 x 的取值范围为 (　　)

A. $x\geqslant 0$　　B. $0\leqslant x<1$　　C. $x<1$　　D. $x\geqslant 0$ 或 $x<1$

2. 下列二次根式中，是最简二次根式的是 (　　)

A. $\sqrt{8}$　　B. $\sqrt{2x^3y}$　　C. $\sqrt{\dfrac{ab}{2}}$　　D. $\sqrt{3x^2+y^2}$

3. 下列二次根式中是最简二次根式的是 (　　)

A. $\sqrt{4x}$　　B. $\sqrt{\dfrac{1}{x}}$　　C. $\sqrt{x^2+y^2-2xy}$　　D. $\sqrt{x^2-y^2}$

4. 等式 $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}$ 成立的条件是 (　　)

A. $x>1$　　B. $x<-1$　　C. $x\geqslant 1$　　D. $x\leqslant -1$

5. 化简 $(\sqrt{3}-2)^{2020}\times(\sqrt{3}+2)^{2021}$ 的结果是 (　　)

A. -1　　B. $\sqrt{3}-2$　　C. $\sqrt{3}+2$　　D. $-\sqrt{3}-2$

6. 估计 $\sqrt{8}\times\sqrt{\dfrac{1}{2}}+\sqrt{18}$ 的运算结果应在哪两个连续自然数之间 (　　)

A. 5 和 6　　B. 6 和 7　　C. 7 和 8　　D. 8 和 9

7. 已知 $a=\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$，$b=\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$，则 $\sqrt{a^2+b^2+7}$ 的值为 (　　)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

8. 下列各式计算正确的是（　　）

A. $2\sqrt{2}\times3\sqrt{3}=6\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{4\frac{1}{2}}=2\sqrt{\frac{1}{2}}$

C. $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=2+3=5$　　D. $-\sqrt{1\frac{1}{2}}\times\sqrt{1\frac{1}{3}}=-\sqrt{2}$

9. 下列计算正确的是（　　）

A. $\sqrt{(-16)\times(-9)}=\sqrt{-16}\times\sqrt{-9}$

B. $\sqrt{25a^4b^2}=5a^2b\ (b\geqslant 0)$

C. $\sqrt{8^2+5^2}=8+5$

D. $\sqrt{25^2-24^2}=25-24$

（二）填空题

10. 已知 $x=\sqrt{3}+1$ ，$y=\sqrt{3}-1$ ，则 $x^2+xy+y^2=$ ________.

11. 计算：$\sqrt{27}\times\sqrt{\frac{8}{3}}\div\sqrt{\frac{1}{2}}=$ ________.

12. 已知 $a^2-b^2=\sqrt{6}$ ，$a-b=\sqrt{3}$ ，则 $a+b=$ ________.

13. $\sqrt{3}+2$ 的倒数是________.

14. 二次根式（1）$\sqrt{x^2+1}$ ，（2）$\sqrt{12x}$ ，（3）$\sqrt{15}$ ，（4）$\sqrt{1.5}$ ，（5）$\frac{1}{3}\sqrt{3}$ ，其中最简二次根式有______________（填序号）.

15. 已知 $\sqrt{3}$ 的小数部分为 a，则 $a(a+2)=$ ________.

16. 计算 $\left(\sqrt{6}-2\sqrt{3}\right)^2=$ ________.

（三）解答题

17. 计算：$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1\right)$.

18. 计算：

（1）$\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)-\sqrt{8}$ ；　　（2）$\sqrt{1\frac{3}{5}}\div\sqrt{2\frac{2}{3}}\times\sqrt{1\frac{1}{3}}$.

19. 计算：

（1）$\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)$.

（2）$\left(-2\sqrt{5}+3\sqrt{10}\right)^2$.

20. 计算：

（1）$\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2021}\times\left(7-4\sqrt{3}\right)^{2020}$；

（2）$\sqrt{8}-\left(3\sqrt{2}-1\right)^2$.

21. 计算：$\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$.

22. 计算或化简：

（1）$\sqrt{8\times 32}$；

（2）$2\sqrt{a}\times\left(-3\sqrt{3a}\right)(a\geqslant 0)$；

（3）$\sqrt{18}\times\sqrt{20}\times\sqrt{10}$；

（4）$\sqrt{(-9)\times\left(-\frac{1}{4}\right)\times 25}$.

23. 计算：$\dfrac{\sqrt{6}+4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$.

24. 计算：

（1）$\sqrt{\dfrac{81\times125}{144}}$ ；　　（2）$\sqrt{\dfrac{121b^5}{16a^2}}\,(a>0,b>0)$.

25. 比较 $\sqrt{15}-\sqrt{14}$ 与 $\sqrt{14}-\sqrt{13}$ 的大小.

26. 比较 $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{3}+2$ 的大小关系，并写出解答的过程.

16.2 二次根式的乘除 答案

第一部分

1. B 2. D 3. D 4. C 5. C 6. B 7. C 8. D 9. B

第二部分

10. 10 11. 12 12. $\sqrt{2}$【解析】$\because a^2-b^2=\sqrt{3}$，

$\therefore (a-b)(a+b)=\sqrt{3}(a+b)=\sqrt{6}$，解得：$a+b=\sqrt{2}$．

13. $2-\sqrt{3}$ 14. （1）（3）（5） 15. 2 16. $18-12\sqrt{2}$

第三部分

17.
$$\begin{aligned}\text{原式}&=\left[\sqrt{3}+\left(\sqrt{2}-1\right)\right]\left[\sqrt{3}-\left(\sqrt{2}-1\right)\right]\\&=\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}-1\right)^2\\&=2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

18. （1）
$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{\sqrt{2}}{2}+3-3\sqrt{2}-2\sqrt{2}\\&=3-\frac{9}{2}\sqrt{2}.\end{aligned}$$
（2）
$$\begin{aligned}\text{原式}&=\sqrt{\frac{8}{5}\times\frac{3}{8}\times\frac{4}{3}}\\&=\frac{2\sqrt{5}}{5}.\end{aligned}$$

19. （1）
$$\begin{aligned}\text{原式}&=12-18\\&=-6;\end{aligned}$$
（2）
$$\begin{aligned}\text{原式}&=20-12\sqrt{50}+90\\&=110-60\sqrt{2}.\end{aligned}$$

20. （1）$\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2021}\times\left(7-4\sqrt{3}\right)^{2020}=7+4\sqrt{3}$

（2）
$$\begin{aligned}\text{原式}&=2\sqrt{2}-\left(18-6\sqrt{2}+1\right)\\&=2\sqrt{2}-19+6\sqrt{2}\\&=8\sqrt{2}-19.\end{aligned}$$

21.
$$\begin{aligned}\text{原式}&=2-2\sqrt{6}+3-2+3\\&=6-2\sqrt{6}.\end{aligned}$$

22. （1）
$$\begin{aligned}&\sqrt{8\times32}\\=&\sqrt{8\times8\times4}\\=&\sqrt{8^2}\times\sqrt{2^2}\\=&8\times2\\=&16.\end{aligned}$$
（2）
$$\begin{aligned}&2\sqrt{a}\times\left(-3\sqrt{3a}\right)\\=&(-2\times3)\times\sqrt{3a^2}\\=&-6\sqrt{3}a.\end{aligned}$$

（3）
$$\begin{aligned}&\sqrt{18}\times\sqrt{20}\times\sqrt{10}\\=&\sqrt{18\times20\times10}\\=&\sqrt{9\times2\times4\times5\times2\times5}\\=&3\times4\times5\\=&60.\end{aligned}$$

（4）
$$\begin{aligned}&\sqrt{(-9)\times\left(-\frac{1}{4}\right)\times25}\\=&\sqrt{3^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times5^2}\\=&3\times\frac{1}{2}\times5\\=&\frac{15}{2}.\end{aligned}$$

23.
$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)+3\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}\\&=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}+\frac{3\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}\\&=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}\\&=\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{3}\\&=\sqrt{6}-\sqrt{2}.\end{aligned}$$

24.（1）原式 $=\sqrt{\dfrac{81\times25\times5}{144}}=\dfrac{9\times5\times\sqrt{5}}{12}=\dfrac{15\sqrt{5}}{4}$.

（2）原式 $=\sqrt{\dfrac{121b^4\cdot b}{16a^2}}=\dfrac{11b^2\sqrt{b}}{4a}$.

25. $\sqrt{15}-\sqrt{14}=\dfrac{\left(\sqrt{15}-\sqrt{14}\right)\left(\sqrt{15}+\sqrt{14}\right)}{\sqrt{15}+\sqrt{14}}=\dfrac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{14}}$ ，

$\sqrt{14}-\sqrt{13}=\dfrac{\left(\sqrt{14}-\sqrt{13}\right)\left(\sqrt{14}+\sqrt{13}\right)}{\sqrt{14}+\sqrt{13}}=\dfrac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{13}}$.

$\because \sqrt{15}+\sqrt{14}>\sqrt{14}+\sqrt{13}$ ，$\sqrt{15}+\sqrt{14}>0$ ，$\sqrt{14}+\sqrt{13}>0$ ，

$\therefore \dfrac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{14}}<\dfrac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{13}}$ ，

即 $\sqrt{15}-\sqrt{14}<\sqrt{14}-\sqrt{13}$.

26. $\because \left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2=7+2\sqrt{10}=7+\sqrt{40}$ ，$\left(\sqrt{3}+2\right)^2=7+4\sqrt{3}=7+\sqrt{48}$ ，

$\therefore \left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2<\left(\sqrt{3}+2\right)^2$ ，

$\therefore \sqrt{5}+\sqrt{2}<\sqrt{3}+2$.