



15.3 分式方程

【学习任务】

- 1、理解分式方程的定义和分式方程产生增根的原因.
- 2、会解可化为一元一次方程的分式方程的解法和验根方法.
- 3、通过数学建模，提高解决实际问题的能力.
- 4、了解方程增根产生的原因，在解方程时会检验方程的增根.

【知识梳理】

分式方程的概念：等号两边至少有一个分母含有未知数的方程叫做**分式方程**（fractional equation）.

解分式方程的一般步骤：

第一步：找出各分母的最简公分母，方程两边同时乘以最简公分母，将原来的分式方程化成整式方程；

第二步：解这个整式方程；

第三步：把求出的整式方程的根代入最简公分母中.若使最简公分母等于 0，则是原方程的增根，需要舍去；若使最简公分母不等于 0，则是原方程的根.

例题：解分式方程 (1) $\frac{60}{x} = \frac{90}{x+6}$ (2) $\frac{x}{x-3} - 2 = \frac{3}{x-3}$

列方程解应用题的一般步骤：

第一步：审题，弄清题意.找出等量关系；

第二步：设未知数.用 x 表示所求的数量或有关的未知量；

第三步：根据题中等量关系，列出分式方程；

第四步：解方程，求出未知数的值；

第五步：检验并写出答语.

分式方程的增根及无解

在分式方程化为整式方程的过程中，若整式方程的根使得分式方程无意义或等号两边不成立，那么这个根叫做原分式方程的增根.这个根使整式方程成立，但会使分式方程没有意义，所以在解分式方程时出现增根时要舍去.



【同步讲练】

一、选择题

1. 下列属于分式方程的是 ()

A. $2x + \frac{x-1}{5} = 6$ B. $\frac{x}{\pi} + 1 = \frac{2-x}{3}$ C. $\frac{1}{2x+1} - 5 = 0$ D. $\frac{x+1}{2} + \frac{3x-5}{x}$

2. 把方程 $3x + \frac{2x-1}{3} = 3 - \frac{x+1}{2}$ 去分母正确的是 ()

A. $18x + 2(2x-1) = 18 - 3(x+1)$ B. $3x + (2x-1) = 3 - (x+1)$
 C. $18x + (2x-1) = 18 - (x+1)$ D. $3x + 2(2x-1) = 3 - 3(x+1)$

3. 方程 $\frac{2}{x+3} = \frac{1}{x-1}$ 的解是 ()

A. $x = \frac{5}{3}$ B. $x = 5$ C. $x = 4$ D. $x = -5$

4. 方程 $\frac{x-1}{1+2x} = \frac{1}{3}$ 的解为 ()

A. $x = 1$ B. $x = 2$ C. $x = 4$ D. $x = 0$

5. 分式方程 $\frac{x}{x-3} = \frac{x+1}{x-1}$ 的解为 ()

A. $x = 1$ B. $x = -1$ C. $x = 3$ D. $x = -3$

6. 分式方程 $\frac{x}{x-1} = \frac{2}{3x-3}$ 的解为 ()

A. $x = -\frac{1}{6}$ B. $x = \frac{2}{3}$ C. $x = \frac{1}{3}$ D. $x = \frac{5}{6}$

7. 工程队要铺设一段全长 2000 米的管道，因天气原因需停工两天，实际每天施工需比原计划多 50 米才能按时完成任务，求原计划每天施工多少米。设原计划每天施工 x 米，则根据题意所列方程正确的是 ()

A. $\frac{2000}{x} - \frac{2000}{x+50} = 2$ B. $\frac{2000}{x+50} - \frac{2000}{x} = 2$
 C. $\frac{2000}{x} - \frac{2000}{x-50} = 2$ D. $\frac{2000}{x-50} - \frac{2000}{x} = 2$

8. 甲、乙两个工程队共同承包某一城市美化工程，已知甲队单独完成这项工程需要 30 天，若由甲队先做 10 天，剩下的工程由甲、乙两队合作 8 天完成。问乙队单独完成这项工程需要多少天？若设乙队单独完成这项工程需要 x 天。则可列方程为 ()

A. $\frac{10}{30} + \frac{8}{x} = 1$ B. $10 + 8 + x = 30$
 C. $\frac{10}{30} + 8\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{x}\right) = 1$ D. $\left(1 - \frac{10}{30}\right) + x = 8$



20. 某校学生利用双休时间去距学校 10 km 的炎帝故里参观，一部分学生骑自行车先走，过了 20 min 后，其余学生乘汽车沿相同路线出发，结果他们同时到达. 已知汽车的速度是骑车学生速度的 2 倍，求骑车学生的速度和汽车的速度.
21. 某工厂现在平均每天比原计划多生产 50 台机器，现在生产 600 台机器所需时间与原计划生产 450 台机器所需时间相同.
- (1) 现在平均每天生产多少台机器；
 - (2) 生产 3000 台机器，现在比原计划提前几天完成.
22. 甲、乙、丙三个登山爱好者经常相约去登山，今年 1 月甲参加了两次登山活动.
- (1) 1 月 1 日甲与乙同时开始攀登一座 1800 米高的山，甲比乙早 30 分钟到达峰顶. 已知甲的平均攀登速度是乙的 1.2 倍，求甲的平均攀登速度是每分钟多少米？
 - (2) 1 月 10 日甲与丙去攀登另一座 a 米高的山，甲保持第 (1) 问中的速度不变，比丙晚出发 1 小时，结果两人同时到达峰顶，问甲的平均攀登速度是丙的多少倍？(用含 a 的代数式表示)



23. 小明用 a 小时清点完一批图书的一半，小强加入清点另一半图书的工作，两人合作 $\frac{6}{5}$ 小时清点完另一半图书。设小强单独清点完这批图书需要 x 小时。

(1) 若 $a = 3$ ，求小强单独清点完这批图书需要的时间。

(2) 请用含 a 的代数式表示 x ，并说明 a 满足什么条件时 x 的值符合实际意义。

24. 某文化用品商店用 1000 元购进一批“晨光”套尺，很快销售一空；商店又用 1500 元购进第二批该款套尺，购进时单价是第一批的 $\frac{5}{4}$ 倍，所购数量比第一批多 100 套。

(1) 求第一批套尺购进时单价是多少？

(2) 若商店以每套 4 元的价格将这两批套尺全部售出，可以盈利多少元？

25. 正在建设的“汉十高铁”竣工通车后，若襄阳至武汉段路程与当前动车行驶的路程相等，约为 325 千米，且高铁行驶的速度是当前动车行驶速度的 2.5 倍，则从襄阳到武汉乘坐高铁比动车所用时间少 1.5 小时。求高铁的速度。



26. 某超市用 3000 元购进某种干果销售，由于销售状况良好，超市又调拨 9000 元资金购进该种干果，但这次的进价比第一次的进价提高了 20%，购进干果数量是第一次的 2 倍还多 300 千克，如果超市按每千克 9 元的价格出售，当大部分干果售出后，余下的 600 千克按售价的 8 折售完.

- (1) 该种干果的第一次进价是每千克多少元？
- (2) 超市销售这种干果共盈利多少元？

27. A ， B 两种机器人都被用来搬运化工原料， A 型机器人比 B 型机器人每小时多搬运 20 千克， A 型机器人搬运 1000 千克所用时间与 B 型机器人搬运 800 千克所用时间相等，两种机器人每小时分别搬运多少化工原料？

28. 在襄阳市创建全国文明城市的工作中，市政部门绿化队改进了对某块绿地的灌溉方式. 改进后，现在每天用水量是原来每天用水量的 $\frac{4}{5}$ ，这样 120 吨水可多用 3 天，求现在每天用水量是多少吨？

29. 某校进行期末体育达标测试，甲、乙两班的学生数相同，甲班有 48 人达标，乙班有 45 人达标，甲班的达标率比乙班的高 6%，求乙班的达标率.



15.3 分式方程 答案

第一部分

1. C 2. A 3. B 4. C 5. D 6. B 7. A 8. C 9. D 10. D 11. C 12. A

【解析】由关于 x 的不等式组 $\begin{cases} \frac{x}{3} - 2 \leq \frac{1}{4}(x-7), \\ 6x - 2a > 5(1-x) \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x \leq 3, \\ x > \frac{2a+5}{11}, \end{cases}$

\therefore 有且仅有三个整数解，

$\therefore \frac{2a+5}{11} < x \leq 3$, $x = 1, 2, \text{或} 3$. $\therefore 0 \leq \frac{2a+5}{11} < 1$, $\therefore -\frac{5}{2} \leq a < 3$;

由关于 y 的分式方程 $\frac{1-2y}{y-1} - \frac{a}{1-y} = -3$ 得 $1-2y+a = -3(y-1)$, $\therefore y = 2-a$,

\therefore 解为正数，且 $y = 1$ 为增根， $\therefore a < 2$, 且 $a \neq 1$, $\therefore -\frac{5}{2} \leq a < 2$, 且 $a \neq 1$,

\therefore 所有满足条件的整数 a 的值为：-2, -1, 0, 其和为 -3.

第二部分

13. 15 14. -3

【解析】把 $x = 3$ 代入方程 $\frac{10}{x+2} + \frac{k}{x} = 1$, 得 $\frac{10}{5} + \frac{k}{3} = 1$, 解得 $k = -3$.

15. $m \neq 0$ 且 $m \neq 1$ 16. -1

【解析】方程两边同乘以 $x-1$ 得： $x+m = 2(x-1)$ \therefore 分式方程无解， $x-1=0$,

$\therefore x = 1$, $\therefore 1+m = 0$, 解得： $m = -1$.

17. 3 或 7 【解析】方程去分母得 $7+3(x-1) = mx$, 整理得 $(m-3)x = 4$,

当整式方程无解时， $m-3 = 0$, $m=3$; 当整式方程的解为分式方程的增根时， $x = 1$,

$\therefore m-3 = 4$, $m = 7$, $\therefore m$ 的值为 3 或 7. 故答案为 3 或 7.

18. $k < 6$ 且 $k \neq 3$

【解析】 $\frac{x}{x-3} - 2 = \frac{k}{x-3}$, 方程两边都乘以 $(x-3)$, 得 $x = 2(x-3) + k$, 解得 $x = 6-k \neq 3$, 关于 x 的方程 $\frac{x}{x-3} - 2 = \frac{k}{x-3}$ 有一个正数解， $\therefore x = 6-k > 0$, $k < 6$, 且 $k \neq 3$, $\therefore k$ 的取值范围是 $k < 6$ 且 $k \neq 3$. 故答案为： $k < 6$ 且 $k \neq 3$.

第三部分

19. 设甲队单独完成工程需 x 天，由题意，得： $\frac{1}{12} \times 9 + \frac{1}{x} \times 5 = 1$,

解得： $x = 20$, 经检验得： $x = 20$ 是方程的解， $\therefore \frac{1}{12} - \frac{1}{20} = \frac{1}{30}$,

\therefore 乙单独完成工程需 30 天， $\therefore 20 < 30$, \therefore 从缩短工期角度考虑，应该选择甲队.



20. 设骑车学生的速度为 x 千米/小时，汽车的速度为 $2x$ 千米/小时，可得：
$$\frac{10}{x} = \frac{10}{2x} + \frac{20}{60},$$

解得： $x = 15$. 经检验 $x = 15$ 是原方程的解， $2x = 2 \times 15 = 30$ ，

答：骑车学生的速度和汽车的速度分别是每小时 15 km，30 km.

21. (1) 设：现在平均每天生产 x 台机器，则原计划每天生产 $(x - 50)$ 台. 依题意得：
$$\frac{600}{x} = \frac{450}{x - 50}.$$
 解

得： $x = 200$. 经检验： $x = 200$ 是原方程的解且符合题意，

答：现在平均每天生产 200 台机器.

(2) 由 (1) 得现在平均每天生产 200 台，原计划每天生产 150 台机器，

\therefore 生产 3000 台机器，现在比原计划提前：
$$\frac{3000}{150} - \frac{3000}{200} = 5 \quad (\text{天}).$$

答：现在比原计划提前 5 天完成.

22. (1) 设乙的平均攀登速度为 x 米/分，则甲的平均攀登速度为 $1.2x$ 米/分，

依题意得 $\frac{1800}{1.2x} + 30 = \frac{1800}{x}$ ，解得 $x = 10$ ，经检验， $x = 10$ 是原分式方程的解，且符合实际意义，

所以 $1.2x = 12$ ，答：甲的平均攀登速度是 12 米/分.

(2) 设丙的攀登速度为 y 米/分，依题意得：
$$\frac{a}{12} + 60 = \frac{a}{y},$$
 解得 $y = \frac{12a}{a + 720}$ ，

经检验， $y = \frac{12a}{a + 720}$ 是原分式方程的解，且符合实际意义，所以 $\frac{12}{y} = \frac{a + 720}{a}$.

所以甲的平均攀登速度是丙的 $\frac{a + 720}{a}$ 倍.

23. (1) 设小强单独清点完这批图书需要 x 小时，由题意得 $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{x}\right) \times \frac{6}{5} = 1$ ，

解得： $x = 4$ ，经检验 $x = 4$ 是原分式方程的解. 答：小强单独清点完这批图书需要 4 小时.

(2) 由题意得 $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{x}\right) \times \frac{6}{5} = 1$ ，解得： $x = \frac{12a}{5a - 6}$ ， $a > \frac{6}{5}$.

所以当 $a > \frac{6}{5}$ 时 x 的值符合实际意义.

24. (1) 设第一批套尺购进时单价是 x 元/套.

由题意得 $\frac{1500}{\frac{5}{4}x} - \frac{1000}{x} = 100$ 即 $\frac{1200}{x} - \frac{1000}{x} = 100$ ，解得 $x = 2$.

经检验， $x = 2$ 是所列方程的解. 答：第一批套尺购进时单价是 2 元/套.

(2) $\left(\frac{1500}{\frac{5}{4} \times 2} + \frac{1000}{2}\right) \times 4 - (1000 + 1500) = 1900$ (元). 答：商店可以盈利 1900 元.



25. 设高铁的速度为 x 千米/小时，则动车的速度为 $\frac{x}{2.5} = 0.4x$ (千米/小时)。

依题意得 $\frac{325}{0.4x} - \frac{325}{x} = 1.5$ 。解得 $x = 325$ 。经检验 $x = 325$ 是原方程的根，并且满足题意。

答：高铁的速度为 325 千米/小时。

26. (1) 设该种干果的第一次进价是每千克 x 元，则第二次进价是每千克 $(1 + 20\%)x$ 元，

由题意，得 $\frac{9000}{(1 + 20\%)x} = 2 \times \frac{3000}{x} + 300$ ，解得 $x = 5$ ，

经检验 $x = 5$ 是原方程的解。且符合题意。答：该种干果的第一次进价是每千克 5 元。

(2)

$$\begin{aligned} & \left[\frac{3000}{5} + \frac{9000}{5 \times (1 + 20\%)} - 600 \right] \times 9 + 600 \times 9 \times 80\% - (3000 + 9000) \\ &= (600 + 1500 - 600) \times 9 + 4320 - 12000 \\ &= 1500 \times 9 + 4320 - 12000 \\ &= 13500 + 4320 - 12000 \\ &= 5820 \text{ (元)}. \end{aligned}$$

答：超市销售这种干果共盈利 5820 元。

27. 设 A 型机器人每小时搬运化工原料 x 千克，则 B 型机器人每小时搬运 $(x - 20)$ 千克，依题意得：

$\frac{1000}{x} = \frac{800}{x - 20}$ 解这个方程得： $x = 100$ 。经检验 $x = 100$ 是方程的解，所以 $x - 20 = 80$ (千克)。

答： A ， B 两种机器人每小时分别搬运化工原料 100 千克和 80 千克。

28. 设原来每天用水量为 x 吨，则现在每天用水量为 $\frac{4}{5}x$ 吨。根据题意得， $\frac{120}{\frac{4}{5}x} - \frac{120}{x} = 3$ 。

解得， $x = 10$ 。经检验， $x = 10$ 是原方程的根。 $\therefore \frac{4}{5}x = \frac{4}{5} \times 10 = 8$ 吨。

答：现在每天用水量是 8 吨。

29. 设乙班的达标率为 x ，则甲班的达标率为 $x + 6\%$ ，根据题意，得 $\frac{48}{x + 6\%} = \frac{45}{x}$ 。

解这个方程，得 $x = 0.9$ 。经检验， $x = 0.9$ 是所列方程的根，且符合题意。答：乙班的达标率为 90%。