17.1-17.2 勾股定理及其逆定理

一、知识梳理

勾股定理

勾股定理是一个基本的几何定理，指直角三角形的两条直角边的平方和等于斜边的平方。中国古代称直角三角形为勾股形，并且直角边中较小者为勾，另一长直角边为股，斜边为弦，所以称这个定理为勾股定理。勾股定理是人类早期发现并证明的重要数学定理之一，用代数思想解决几何问题的最重要的工具之一，也是数形结合的纽带之一。

表述：在平面上的一个直角三角形中，两个直角边边长的平方加起来等于斜边长的平方。如果设直角三角形的两条直角边长度分别是 a 和 b，斜边长度是 c，那么可以用数学语言表达：$a^2+b^2=c^2$

勾股定理的逆定理

如果三角形的三边长 a，b，c 满足 $a^2+b^2=c^2$，那么这个三角形是直角三角形.

勾股数

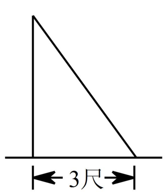
能够成为直角三角形三条边长的三个正整数，称为勾股数.

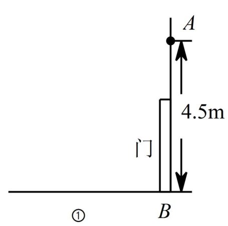
常见的勾股数有：① 3，4，5；② 5，12，13；③8，15，17；④ 7，24，25；

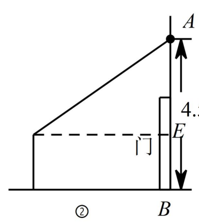
二、典例讲练

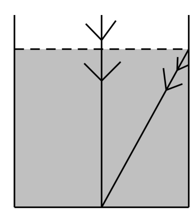
微专题一 勾股定理的实际应用

例题 1. 一根竹子高 1 丈，折断后竹子顶端落在离竹子底端 3 尺处，则折断处离地面的高度为 (　　)（这是我国古代数学著作《九章算术》中的一个问题，其中的丈、尺是长度单位，1 丈 ＝10 尺）









A. 3 尺　　B. 4 尺　　C. 4.55 尺　　D. 5 尺

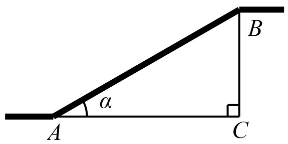
例题 2. 如图①所示，有一个由传感器 A 控制的灯，要装在门上方离地高 4.5 m 的墙上，任何东西只要移至该灯 5 m 及 5 m 以内时，灯就会自动发光．请问一个身高 1.5 m 的学生要走到离墙多远的地方灯刚好发光?(　　)

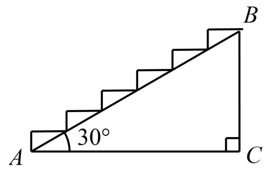
A. 4 米　　B. 3 米　　C. 5 米　　D. 7 米

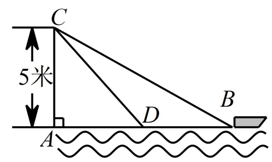
例题 3. 如图，在水池的正中央有一根芦苇，池底长 10 尺，它高出水面 1 尺，如果把这根芦苇拉向水池一边，它的顶端恰好到达池边的水面，则这根芦苇的长度是 (　　)

A. 10 尺　　B. 11 尺　　C. 12 尺　　D. 13 尺

习题 1. 如图，自动扶梯 AB 段的长度为 $20\ \mathrm{m}$，$BC = 10\ \mathrm{m}$，则 $AC =$ ________ m.



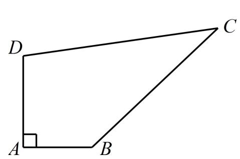




习题 2. 某楼梯的侧面图如图所示，其中 $AB = 4$ 米，$\angle BAC = 30°$，$\angle C = 90°$，因某种活动要求铺设红色地毯，则在 AB 段楼梯所铺地毯的长度应为 ___________ 米.

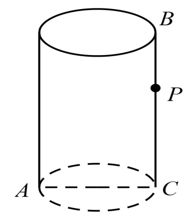
习题 3. 如图，在离水面高度为 5 米的岸上，有人用绳子拉船靠岸，开始时绳子 BC 的长为 13 米，此人以 0.5 米每秒的速度收绳，10 秒后船移动到点 D 的位置，问船向岸边移动了多少米?（假设绳子是直的，结果保留根号）

拓展 1. 已知某开发区有一块四边形的空地 $ABCD$，如图所示，现计划在空地上种植草皮，经测量 $\angle A = 90°$，$AB = 3\mathrm{m}$，$BC = 12\mathrm{m}$，$CD = 13\mathrm{m}$，$DA = 4\mathrm{m}$，若每平方米草皮需要 200 元，问要多少投入?



微专题二 平面展开-最短路径问题

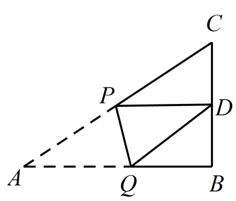
例题 1. 如图，圆柱的底面周长为 $6\ \text{cm}$，AC 是底面圆的直径，高 $BC=6\ \text{cm}$，点 P 是母线 BC 上一点，且 $PC=\dfrac{2}{3}BC$．一只蚂蚁从 A 点出发沿着圆柱体的表面爬行到点 P 的最短距离是(　　)



A. $\left(4+\dfrac{6}{\pi}\right)\text{cm}$　B. $5\ \text{cm}$　C. $3\sqrt{5}\ \text{cm}$　D. $7\ \text{cm}$

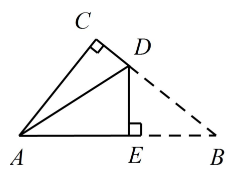
微专题三 勾股定理之折叠问题

例题 1. 如图，$\text{Rt}\triangle ABC$ 中，$AB=9$，$BC=6$，$\angle B=90^\circ$，将 $\triangle ABC$ 折叠，使 A 点与 BC 的中点 D 重合，折痕为 PQ，则线段 BQ 的长度为(　　)



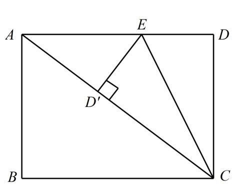
A. $\dfrac{5}{3}$　B. $\dfrac{5}{2}$　C. 4　D. 5

例题 2. 如图是一张直角三角形的纸片，两直角边 $AC=6\ \text{cm}$，$BC=8\ \text{cm}$，现将 $\triangle ABC$ 折叠，使点 B 与点 A 重合，折痕为 DE，则 DE 的长为(　　)



A. $\dfrac{15}{4}$　B. $\dfrac{10}{3}$　C. 5　D. 4

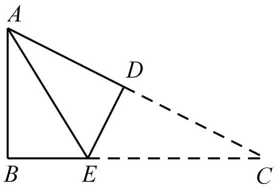
例题 3. 如图，将长方形纸片 $ABCD$ 折叠，使边 DC 落在对角线 AC 上，折痕为 CE，且 D 点落在 D' 处，若 $AB=3$，$AD=4$，则 ED 的长为(　　)



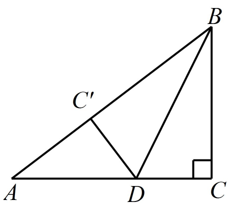
A. $\dfrac{3}{2}$　B. 3　C. 1　D. $\dfrac{4}{3}$

习题 1. 如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle B=90°$ ，$AB=3\text{ cm}$ ，$AC=5\text{ cm}$ ，将 $\triangle ABC$ 沿 DE 折叠，使点 C 与点 A 重合，则 AE 的长等于（　　）

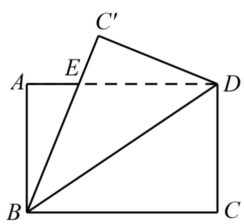
A. 4 cm　　B. $\frac{3}{2}\text{ cm}$　　C. $\frac{25}{8}\text{ cm}$　　D. $\frac{7}{2}\text{ cm}$



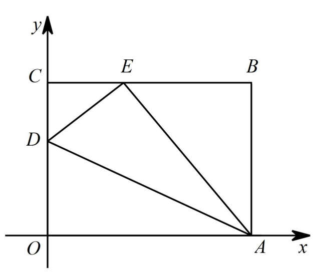
习题 2. 如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$ ，$BC=6\text{ cm}$ ，$AC=8\text{ cm}$ ，将 $\triangle BCD$ 沿 BD 折叠，使点 C 落在 AB 边的 C' 点，那么 $\triangle ADC'$ 的面积是________ cm^2 .



习题 3. 如图，将矩形 $ABCD$ 沿对角线 BD 所在直线折叠，点 C 落在同一平面内，落点记为 C'，BC' 与 AD 交于点 E，若 $AB=3$ ，$BC=4$ ，则 DE 的长为________.

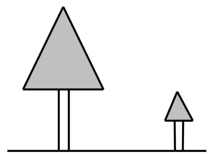


拓展 1. 如图，四边形 $OABC$ 是一张放在平面直角坐标系中的长方形纸片，O 为原点，点 A 在 x 轴的正半轴上，点 C 在 y 轴的正半轴上，$OA=10$ ，$OC=8$ ，在 OC 边上取一点 D，将纸片沿 AD 翻折，使点 O 落在 BC 边上的点 E 处．求 D，E 两点的坐标.

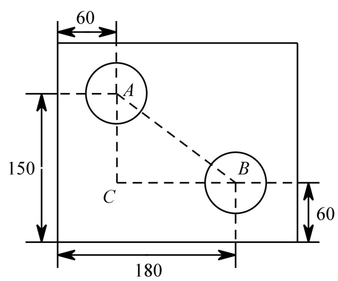


三、家庭作业

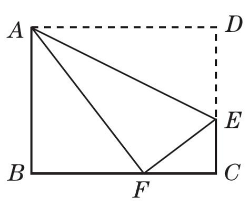
1. 有两棵树，一棵高 15 米，另一棵高 7 米，两树相距 6 米，一只鸟从一棵树的树梢飞到另一棵树的树梢．问小鸟至少飞行________ 米．



2. 如图是一个外轮廓为矩形的机器零件平面示意图，根据图中的尺寸（单位：mm），计算两圆孔中心 A 和 B 的距离为________ mm．



3. 如图，将长方形纸片 $ABCD$ 的一边 AD 向下折叠，点 D 落在 BC 边上的点 F 处．已知 $AB=CD=8\text{ cm}$，$BC=AD=10\text{ cm}$，求 EC 的长．



勾股定理及其逆定理 答案

微专题一

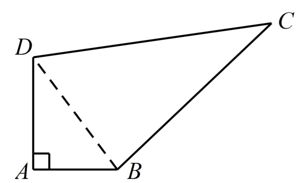
例题 1. C　　例题 2. A　　例题 3. D　　习题 1. $10\sqrt{3}$　　习题 2. $2+2\sqrt{3}$

习题 3. 在 $Rt\triangle ABC$ 中，因为 $\angle CAB=90^\circ$，$BC=13$，$AC=5$，所以 $AB=\sqrt{13^2-5^2}=12$，因为此人以 0.5 米每秒的速度收绳，10 秒后船移动到点 D 的位置，所以 $CD=13-0.5\times10=8$，所以 $AD=\sqrt{CD^2-AC^2}=\sqrt{64-25}=\sqrt{39}$，所以 $BD=AB-AD=12-\sqrt{39}$（米），答：船向岸边移动了 $\left(12-\sqrt{39}\right)$ 米.

拓展 1. 如图，连接 BD. 在 $Rt\triangle ABD$ 中，$BD^2=AB^2+AD^2=3^2+4^2=5^2$，在 $\triangle CBD$ 中，$CD^2=13^2$，$BC^2=12^2$，而 $12^2+5^2=13^2$，即 $BC^2+BD^2=CD^2$，

$\therefore \angle DBC=90^\circ$，

$$\begin{aligned}S_{\text{四边形}ABCD}&=S_{\triangle BAD}+S_{\triangle DBC}\\&=\frac{1}{2}AD\cdot AB+\frac{1}{2}DB\cdot BC\\&=\frac{1}{2}\times4\times3+\frac{1}{2}\times5\times12\\&=36.\end{aligned}$$



$36\times200=7200$（元）所以需费用 7200 元.

微专题二

例题 1. B

微专题三

例题 1. C　　例题 2. A　　例题 3. A　　【解析】由题意，得 $AB=CD=CD'=3$，$DE=D'E$ 由勾股定理，得 $AC=5$ $\therefore AD'=2$.由勾股定理，得 $AD'^2+D'E^2=(4-DE)^2$.

解得 $DE=D'E=\dfrac{3}{2}$.

习题 1. C　　【解析】设 $AE=x\ \text{cm}$，由翻折变换的性质可知，$EC=x\ \text{cm}$，

$\because \angle B=90^\circ$，$AB=3\ \text{cm}$，$AC=5\ \text{cm}$，$\therefore BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=4\ \text{cm}$，

$\therefore BE=BC-CE=(4-x)\ \text{cm}$，在 $Rt\triangle ABE$ 中，$AE^2=AB^2+BE^2$，即

$x^2=3^2+(4-x)^2$，解得，$x=\dfrac{25}{8}$.

习题 2. 6　　习题 3. $\dfrac{25}{8}$

拓展 1. 依题意可知，直线 AD 是四边形 $OAED$ 的对称轴，所以在 $Rt\triangle ABE$ 中，$AE=AO=10$，$AB=8$，所以 $BE=\sqrt{AE^2-AB^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$，所以 $CE=4$，所以 $E(4,8)$.

在 $Rt\triangle DCE$ 中，$DC^2+CE^2=DE^2$，又因为 $DE=OD$，所以 $(8-OD)^2+4^2=OD^2$，所以 $OD=5$，所以 $D(0,5)$.

家庭作业

1. 10　2. 150

3. 根据题意，得 $\triangle AFE \cong \triangle ADE$，$\therefore AF = AD = 10\text{ cm}$，$EF = ED$，
$\therefore EF + EC = DC = 8\text{ cm}$．在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中，根据勾股定理，
得 $BF = \sqrt{AF^2 - AB^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6\,(\text{cm})$，$\therefore FC = BC - BF = 10 - 6 = 4\,(\text{cm})$．
设 $EC = x\text{ cm}$，则 $EF = DC - EC = (8 - x)\text{ cm}$．在 $\text{Rt}\triangle EFC$ 中，根据勾股定理，
得 $EC^2 + FC^2 = EF^2$，即 $x^2 + 4^2 = (8 - x)^2$．解这个方程，得 $x = 3$，
即 EC 的长为 3 cm．