



## 19.1 函数 培优讲义

### 一、学习任务

1. 探索简单实例中的数量关系和变化规律，了解常量、变量的意义.
2. 了解函数的概念和三种表示方法：列表法、解析式法、图像法.
3. 掌握用描点法画函数的图象，能根据题意列出函数解析式并求函数的对应值，会求自变量的取值范围.

### 二、知识梳理

函数的概念

**常量与变量** 在一个变化过程中，称数值发生变化的量为变量（variable），数值始终不变的量为常量（constant）.

**函数** 在一个变化过程中，如果有两个变量  $x$  和  $y$ ，并且对于  $x$  的每一个确定的值， $y$  都有唯一确定的值与其对应，那么就说  $x$  是自变量（independent variable）， $y$  是  $x$  的函数（function）. 如果当  $x=a$  时  $y=b$ ，那么  $b$  叫做当自变量的值为  $a$  时的函数值.

**解析式** 用关于自变量的数学式子表示函数与自变量之间的关系，这种式子叫做函数解析式（analytic expression）.

#### 自变量取值范围的确定

- ①函数的解析式是整式时，自变量取值是任意实数；
- ②函数的解析式是分式时，自变量取值是使分母不为零的任意实数；
- ③函数的解析式是开平方的无理式时，自变量取值是使被开方的式子为非负的实数；
- ④函数的解析式中自变量出现在零次幂或负整数次幂的底数中时，自变量取值是使底数不为零的实数；
- ⑤当函数关系式表示实际问题时，自变量的取值不但要使函数关系式有意义，而且还必须使实际问题有意义.

### 三、课前小测

1. 函数  $y = \sqrt{x-1}$  中自变量  $x$  的取值范围是（ ）  
A.  $x > 1$                       B.  $x > 0$                       C.  $x \neq 0$                       D.  $x \geq 1$
2. 下列变量之间的关系不是函数关系的是（ ）  
A. 长方形的宽一定，其长与面积                      B. 正方形的周长与面积  
C. 等腰三角形的底边与面积                      D. 球的体积与球的半径



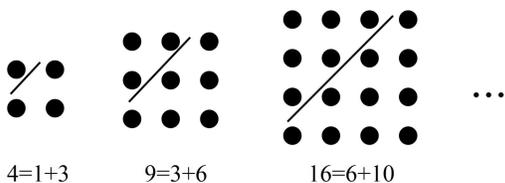
3. 汽车由北京驶往相距 120 千米的天津，它的平均速度是 30 千米/时，则汽车距天津的路程  $S$  (千米) 与行驶时间  $t$  (小时) 的函数关系式及自变量的取值范围是 ( )

- A.  $S = 120 - 30t (0 \leq t \leq 4)$                       B.  $S = 30t (0 \leq t \leq 4)$   
 C.  $S = 120 - 30t (t > 0)$                       D.  $S = 30t (t = 4)$

4. 我们常用的数是十进制数，而计算机程序处理数据使用的只有数码 0 和 1 的二进制数，这二者可以相互换算，如将二进制数 1011 换算成十进制数应为： $1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 11$  . 按此方式，则将十进制数 7 换算成二进制数应为 ( )

- A. 100                      B. 110                      C. 101                      D. 111

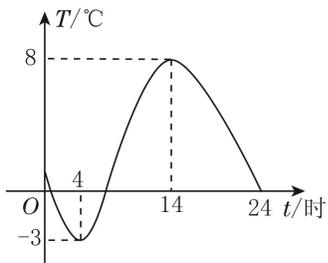
5. 古希腊著名的毕达哥拉斯学派把 1, 3, 6, 10 ... 这样的数称为“三角形数”，而把 1, 4, 9, 16 ... 这样的数称为“正方形数”. 从图中可以发现，任何一个大于 1 的“正方形数”都可以看作两个相邻“三角形数”之和. 下列等式中，符合这一规律的是 ( )



- A.  $13 = 3 + 10$               B.  $25 = 9 + 16$               C.  $36 = 15 + 21$               D.  $49 = 18 + 31$

6. 如图，是一台自动测温记录仪的图象，它反映了我市冬季某天气温  $T$  随时间  $t$  变化而变化的关系，观察图象得到下列信息，其中错误的是 ( )

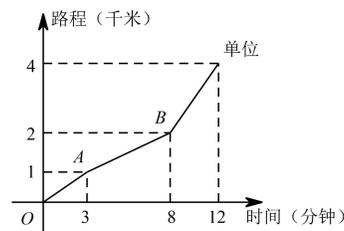
- A. 凌晨 4 时气温最低为  $-3^{\circ}\text{C}$                       B. 14 时气温最高为  $8^{\circ}\text{C}$   
 C. 从 0 时至 14 时，气温随时间增长而上升              D. 从 14 时至 24 时，气温随时间增长而下降



第 6 题图

输入	...	1	2	3	4	5	...
输出	...	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{17}$	$\frac{5}{26}$	...

第 7 题表格



第 8 题图

7. 小华利用计算机设计了一个计算程序，输入和输出的数据如上表：那么当输入数据为 8 时，输出的数据是 ( )

- A.  $\frac{8}{61}$                       B.  $\frac{8}{63}$                       C.  $\frac{8}{65}$                       D.  $\frac{8}{67}$

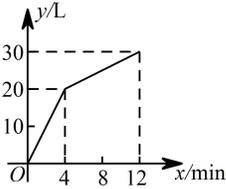
8. 小高从家门口骑车去单位上班，先走平路到达点 A，再走上坡路到达点 B，最后走下坡路到达工作单位，所用的时间与路程的关系如图所示. 下班后，如果他沿原路返回，且走平路、上坡路、下坡路的速度分别保持和去上班时一致，那么他从单位到家门口需要的时间是 ( )

- A. 12 分钟                      B. 15 分钟                      C. 25 分钟                      D. 27 分钟

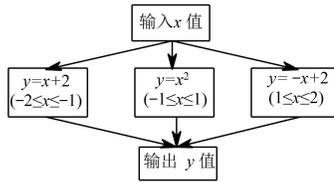


#### 四、典例讲练

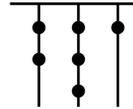
9. 一个有进水管与出水管的容器，从某时刻开始 4 min 内只进水不出水，在随后的 8 min 内既进水又出水，每分钟的进水量和出水量是两个常数，容器内的水量  $y$  (单位：L) 与时间  $x$  (单位：min) 之间的关系如图所示. 则 8 min 时容器内的水量为\_\_\_\_\_ L.



第 9 题图



第 10 题图



第 12 题图

10. 根据图示的程序计算函数值，若输入的  $x$  的值为  $\frac{3}{2}$ ，则输出的结果为\_\_\_\_\_.
11. 某商店销售一种进价为 50 元/件的商品，当售价为 60 元/件时，一天可卖出 200 件；经调查发现，如果商品的单价每上涨 1 元，一天就会少卖出 10 件. 设商品的售价上涨了  $x$  元/件 ( $x$  是正整数)，销售该商品一天的利润为  $y$  元，那么  $y$  与  $x$  的函数关系的表达式为\_\_\_\_\_。(不写出  $x$  的取值范围)
12. 古时候，猎人通过结绳的方法来统计猎物的个数，如图，一位猎人在排列的绳子上从右到左依次打结，满八进一，用来记录一段时间内猎物的数量，由图可知，猎物的数量是\_\_\_\_\_.
13. 某长途汽车站对旅客携带行李收费的收费方式作了如下说明：行李重量 40 千克以内 (含 40 千克)，不收费；超过 40 千克时，每超过 1 千克，收费 2 元. 行李费  $y$  (元) 与行李重量  $x$  (千克) 之间的函数关系式为\_\_\_\_\_.
14. 如图 1，四边形  $ABCD$  中， $AB \parallel CD$ ， $\angle ADC = 90^\circ$ ， $P$  从  $A$  点出发，以每秒 1 个单位长度的速度，按  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$  的顺序在边上匀速运动. 设  $P$  点的运动时间为  $t$  s， $\triangle PAD$  的面积为  $S$ ， $S$  关于  $t$  的函数图象如图 2 所示，当  $P$  运动到  $BC$  中点时， $\triangle PAD$  的面积为\_\_\_\_\_.

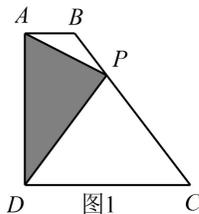


图1

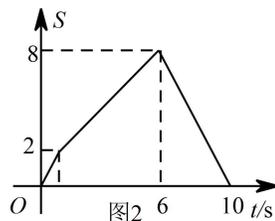


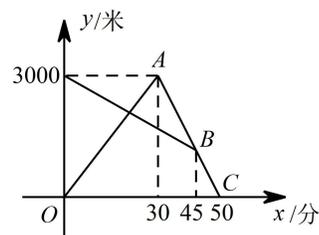
图2



15. (1) 设圆柱的底面半径  $R$  不变，圆柱的体积  $V$  与圆柱的高  $h$  的关系式是  $V = \pi R^2 h$ ，在这个变化过程中常量和变量分别是什么？
- (2) 设圆柱的高  $h$  不变，在圆柱的体积  $V$  与圆柱的底面半径  $R$  的关系式  $V = \pi R^2 h$  中，常量和变量分别又是什么？

16. 某天早晨，张强从家跑步去体育场锻炼，同时妈妈从体育场晨练结束回家，途中两人相遇，张强跑到体育场后发现要下雨，立即按原路返回，遇到妈妈后两人一起回到家（张强和妈妈始终在同一条笔直的公路上行走）。如图是两人离家的距离  $y$ （米）与张强出发的时间  $x$ （分）之间的函数图象，根据图象信息解答下列问题：

- (1) 求张强返回时的速度；
- (2) 妈妈比按原速返回提前多少分钟到家？
- (3) 请直接写出张强与妈妈何时相距 1200 米？



17. 在国内投寄本埠平信应付邮资如下表：

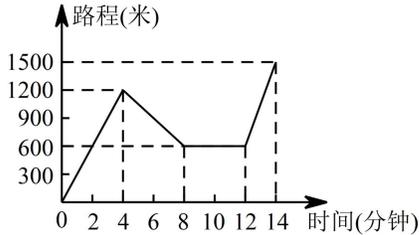
- (1)  $y$  是  $x$  的函数吗？为什么？
- (2) 分别求当  $x = 5, 10, 30, 50$  时的函数值。

信件质量 $x/g$	$0 < x \leq 20$	$20 < x \leq 40$	$40 < x \leq 60$
邮资 $y/元$	0.80	1.60	2.40



18. 小红星期天从家里出发骑车去舅舅家做客，当她骑了一段路时，想起要买个礼物送给表弟，于是又折回到刚经过的一家商店，买好礼物后又继续骑车去舅舅家，以下是她本次去舅舅家所用的时间与路程的关系示意图。根据图中提供的信息回答下列问题：

- (1) 小红家到舅舅家的路程是\_\_\_\_\_ 米，小红在商店停留了\_\_\_\_\_ 分钟；
- (2) 本次去舅舅家的行程中，小红一共行驶了\_\_\_\_\_ 米；一共用了\_\_\_\_\_ 分钟。



19. 在烧开水时，水温达到  $100^{\circ}\text{C}$  就会沸腾，下表是某同学做“观察水的沸腾”实验时记录的数据：

时间/min	0	2	4	6	8	10	12	14	...
水的温度/ $^{\circ}\text{C}$	30	44	58	72	86	100	100	100	...

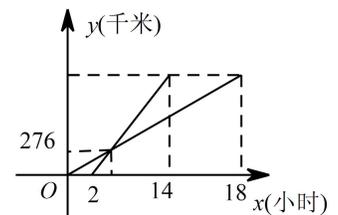
- (1) 上表反映了\_\_\_\_\_ 和 \_\_\_\_\_ 之间的关系，自变量是 \_\_\_\_\_，因变量是 \_\_\_\_\_。
- (2) 水的温度随着时间的增加而 \_\_\_\_\_（填“升高”或“降低”），到 \_\_\_\_\_ 时恒定。
- (3) 时间为 8 min 时，水的温度为 \_\_\_\_\_；时间为 9 min 时，水的温度为 \_\_\_\_\_。
- (4) 根据表格，时间为 16 min 和 18 min 时水的温度分别为 \_\_\_\_\_。
- (5) 为了节约能源，你认为应在多长时间后停止烧水？

20. 一慢车和一快车沿相同路线从 A 地行驶到 B 地，所行的路程  $y$ （千米）与时间  $x$ （时）的函数图象如图所示，试根据图象，回答下列问题：

(1) 慢车比快车早出发\_\_\_\_\_ 小时，快车追上慢车时行驶了\_\_\_\_\_ 千米，快车比慢车早\_\_\_\_\_ 小时到达 B 地。

(2) 设 A, B 两地之间的路程为  $S$  千米；

- ① 请用含  $S$  的代数式分别表示出慢车的速度和快车的速度；
- ② 请直接写出  $S$  的值。





21. 如果用  $c$  表示摄氏温度， $f$  表示华氏温度，则  $c$  与  $f$  之间的关系为： $c = \frac{5}{9}(f - 32)$ ，试分别求：

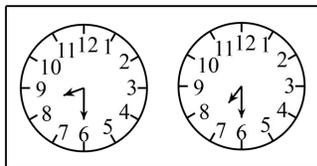
- (1) 当  $f = 68$  和  $f = -4$  时， $c$  的值；
- (2) 当  $c = 10$  时， $f$  的值.

22. 鞋子的“鞋码”和鞋长 (cm) 存在一种换算关系，当鞋长变化时，“鞋码”就会随之而变，下表是几组“鞋码”与鞋长换算的对应数值：（注：“鞋码”是表示鞋子大小的一种号码）

- (1) 表中反映了 \_\_\_\_\_ 和 \_\_\_\_\_ 之间的关系，自变量是 \_\_\_\_\_，因变量是 \_\_\_\_\_；
- (2) 当鞋长为 21 cm 时，对应的鞋码是 \_\_\_\_\_；
- (3) 如果小马穿了 42 号“鞋码”的鞋，那么他的鞋长是多少？

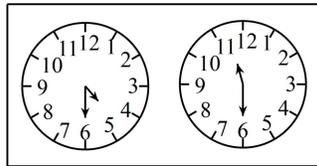
鞋长/cm	16	19	21	24
鞋码/号	22	28	32	38

23. 如图①表示同一时刻的韩国首尔时间和北京时间，两地时差为整数.



首尔 北京

①



伦敦 (夏时制) 北京

②

- (1) 设北京时间为  $x$  (时)，首尔时间为  $y$  (时)，就  $0 \leq x \leq 12$ ，求  $y$  关于  $x$  的函数表达式，并填写下表（同一时刻的两地时间）.

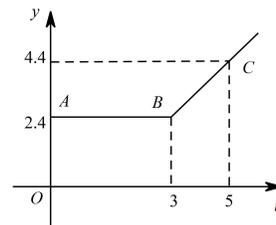
北京时间	7:30		2:50
首尔时间		12:15	

- (2) 如图②表示同一时刻的英国伦敦时间（夏时制）和北京时间，两地时差为整数. 如果现在伦敦（夏时刻）时间为 7:30，那么此时韩国首尔时间是多少？



24. 如图所示的折线  $ABC$  表示从甲地向乙地打长途电话所需的电话费  $y$  (元) 与通话时间  $t$  (分钟) 之间的函数关系的图象.

- (1) 写出  $y$  与  $t$  之间的函数关系式.
- (2) 通话 2 分钟应付通话费多少元?
- (3) 通话 7 分钟呢?



25. 下表是某水果店记录的橘子销售额与橘子的销售量的一组对应值:

售出质量 (千克)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
销售额 (元)	2	4	6	8	10	12	14	16	18

- (1) 这个表中反映了哪两个变量之间的关系?哪个是自变量?哪个是因变量?
- (2) 根据表格回答: 当售出橘子 5 千克时, 销售额是多少?
- (3) 如果用  $x$  表示售出的橘子质量, 用  $y$  表示销售额, 根据表中数据分析,  $x$ ,  $y$  之间是什么关系?
- (4) 请你求售出橘子 50 千克时的销售额.

26. 【背景知识】数轴上  $A$  点、 $B$  点表示的数为  $a$ ,  $b$ , 则  $A$ ,  $B$  两点之间的距离  $AB = |a - b|$ ; 线段  $AB$  的中点  $M$  表示的数为  $\frac{a + b}{2}$ .

【问题情境】已知数轴上有  $A$ ,  $B$  两点, 分别表示的数为  $-40$  和  $20$ , 点  $A$  以每秒 3 个单位的速度沿数轴向右匀速运动, 点  $B$  以每秒 2 个单位向左匀速运动. 设运动时间为  $t$  秒 ( $t > 0$ ).

- (1) 运动开始前,  $A$ ,  $B$  两点的距离为\_\_\_\_\_ ; 线段  $AB$  的中点  $M$  所表示的数为\_\_\_\_\_.
- (2) 它们按上述方式运动,  $A$ ,  $B$  两点经过多少秒会相遇, 相遇点所表示的数是什么?
- (3) 当  $t$  为多少时, 线段  $AB$  的中点  $M$  表示的数为  $-5$ ? 并直接写出在这一运动过程中点  $M$  的运动方向和运动速度.



27. 为了提高身体素质，有些人选择到专业的健身中心锻炼身体，某健身中心的消费方式如下：

消费卡	消费方式
普通卡	35 元/次
白金卡	280 元/张, 凭卡免费消费 10 次再送 2 次
钻石卡	560 元/张, 凭卡每次消费不再收费

以上消费卡使用年限均为一年，每位顾客只能购买一张卡，且只限本人使用.

- (1) 若每年去该健身中心 6 次，应选择哪种消费方式更合算？
- (2) 设一年内去该健身中心健身  $x$  次 ( $x$  为正整数)，所需总费用为  $y$  元，请分别写出选择普通消费和白金卡消费的  $y$  与  $x$  的函数关系式；
- (3) 若某位顾客每年去该健身中心健身至少 18 次，请通过计算帮助这位顾客选择最合算的消费方式.



## 19.1 函数 答案

### 第一部分

1. D 2. C 3. A 4. D 5. C 6. C 7. C 8. B

### 第二部分

9. 25 10.  $\frac{1}{2}$  11.  $y = -10x^2 + 100x + 2000$  12. 153 13.  $y = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 40, \\ 2x - 80, & x > 40. \end{cases}$  14. 5

### 第三部分

15. (1) 常量是  $\pi$  和  $R$ ，变量是  $V$  和  $h$  .

(2) 常量是  $\pi$  和  $h$ ，变量是  $V$  和  $R$  .

16. (1)  $3000 \div (50 - 30) = 150$  (米/分)

答：张强返回时的速度为 150 米/分.

(2) 开始时妈妈回家的速度是： $150 \times (45 - 30) \div 45 = 50$  (米/分)，

妈妈提前回家的时间是： $3000 \div 50 - 50 = 10$  (分钟) .

答：妈妈比按原速返回提前 10 分钟到家.

(3) 当张强出发时间为 12 分钟或 28 分钟或 33 分钟时，张强与妈妈相距 1200 米.

17. (1)  $y$  是  $x$  的函数. 理由：当  $x$  取定一个值时， $y$  都有唯一确定的值与其对应.

(2) 当  $x = 5$  时， $y = 0.80$ ；当  $x = 10$  时， $y = 0.80$ ；当  $x = 30$  时， $y = 1.60$ ；当  $x = 50$  时， $y = 2.40$  .

18. (1) 1500；4 (2) 2700；14

19. (1) 水的温度；时间；时间；水的温度 (2) 升高； $100^\circ\text{C}$  (3)  $86^\circ\text{C}$ ； $93^\circ\text{C}$

(4)  $100^\circ\text{C}$ ， $100^\circ\text{C}$  (5) 应在 10 min 后停止烧水.

20. (1) 2；276；4

(2) ①慢车的速度 =  $\frac{S}{18}$  千米/时；快车的速度 =  $\frac{S}{14-2} = \frac{S}{12}$  千米/时；②  $S = 828$  .

21. (1) 当  $f = 68$  时， $c = \frac{5}{9}(f - 32) = 20$  ,

当  $f = -4$  时， $c = \frac{5}{9}(f - 32) = -20$  ;

(2) 当  $c = 10$  时， $\frac{5}{9}(f - 32) = 10$  , 解得  $f = 50$  .

22. (1) 鞋长；鞋码；鞋长；鞋码

(2) 32 号

(3) 从表格数据的变化规律可知，鞋码等于鞋长的 2 倍减 10，由此可知，42 号“鞋码”的鞋长为 26 cm .



23. (1) 从图①中看出，同一时刻，首尔时间比北京时间多 1 小时，故  $y$  关于  $x$  的函数表达式是  $y = x + 1$  .

北京时间	7:30	11:15	2:50
首尔时间	8:30	12:15	3:50

(2) 从图②中看出，设伦敦（夏时制）时间为  $t$  时，则北京时间为  $(t + 7)$  时，由第 (1) 题，韩国首尔时间为  $(t + 8)$  时，所以，当伦敦（夏时制）时间为 7:30，韩国首尔时间为 15:30.

24. (1) 当  $0 < t \leq 3$  时， $y = 2.4$  .  $t > 3$  时，设  $y = kt + b (k \neq 0)$  , 由图象可知  $y = kt + b (k \neq 0)$  过  $(3, 2.4)$  ,  $(5, 4.4)$  两点，

$$\therefore \begin{cases} 3k + b = 2.4, \\ 5k + b = 4.4, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} k = 1, \\ b = -0.6. \end{cases} \therefore y = t - 0.6 (t > 3) \text{ . 综上所述, } y = \begin{cases} 2.4, & 0 < t \leq 3 \\ t - 0.6, & t > 3 \end{cases} .$$

(2) 当  $t = 2$  时， $y = 2.4$  ,  $\therefore$  通话 2 分钟应付通话费 2.4 元.

(3) 当  $t = 7$  时， $y = 6.4$  ,  $\therefore$  通话 7 分钟应付通话费 6.4 元.

25. (1) 这个表中反映了售出的橘子质量与销售额两个变量之间的关系，售出的橘子质量是自变量，销售额是因变量.

(2) 当售出橘子 5 千克时，销售额是 10 元.

(3) 因为销售额的值是售出的橘子质量的值的 2 倍，所以  $y = 2x$  .

(4) 当售出橘子 50 千克时，销售额为 100 元.

26. (1) 60; -10

(2) 设它们按上述方式运动， $A$  ,  $B$  两点经过  $x$  秒会相遇，

则点  $A$  运动  $x$  秒后所在位置的点表示的数为  $-40 + 3x$  ; 点  $B$  运动  $x$  秒后所在位置的点表示的数为  $20 - 2x$  ; 根据题意，得： $-40 + 3x = 20 - 2x$  , 解得  $x = 12$  ,  $\therefore$  它们按上述方式运动， $A$  ,  $B$  两点经过 12 秒会相遇，相遇点所表示的数是： $-40 + 3x = -40 + 3 \times 12 = -4$  ;

答： $A$  ,  $B$  两点经过 12 秒会相遇，相遇点所表示的数是 -4 .

(3) 根据题意，得： $\frac{(-40 + 3t) + (20 - 2t)}{2} = -5$  , 解得  $t = 10$  ,

答：经过 10 秒，线段  $AB$  的中点  $M$  表示的数是 -5 .  $M$  点的运动方向向右，运动速度为每秒  $\frac{1}{2}$  个单位.

27. (1)  $35 \times 6 = 210$  (元) ,  $\therefore 210 < 280 < 560$  ,  $\therefore$  选择普通消费方式更合算.

(2) 根据题意得： $y_{\text{普通}} = 35x$  . 当  $x \leq 12$  时， $y_{\text{白金卡}} = 280$  ; 当  $x > 12$  时， $y_{\text{白金卡}} = 280 + 35(x - 12) = 35x - 140$  .

$$\therefore y_{\text{白金卡}} = \begin{cases} 280, & x \leq 12 \\ 35x - 140, & x > 12 \end{cases} .$$

(3) 当  $x = 18$  时， $y_{\text{普通}} = 35 \times 18 = 630$  ;  $y_{\text{白金卡}} = 35 \times 18 - 140 = 490$  ;

令  $y_{\text{白金卡}} = 560$  , 即  $35x - 140 = 560$  , 解得： $x = 20$  .

当  $18 \leq x \leq 19$  时，选择白金卡消费最合算；

当  $x = 20$  时，选择白金卡消费和钻石卡消费费用相同；

当  $x \geq 21$  时，选择钻石卡消费最合算.