18.1 平行四边形 培优讲义

知识梳理

平行四边形定义

两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形

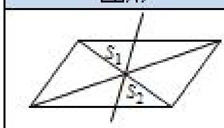
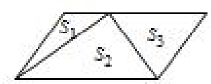
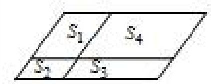
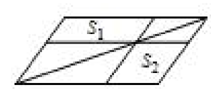
平行四边形的性质

① 平行四边形的对边相等；

② 平行四边形的对角相等；

③ 平行四边形的对角线互相平分．

平行四边形面积

图形	结论
	$S_1=S_2$
	$S_1+S_3=S_2=\frac{1}{2}S_{平行四边形}$
	$S_1+S_3=S_2+S_4=\frac{1}{2}S_{平行四边形}$
	$S_1\cdot S_3=S_2\cdot S_4$
	$S_1=S_2$

平行四边形的判定

① 两组对边分别平行的四边形是平行四边形；

② 两组对边分别相等的四边形是平行四边形；

③ 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形；

④ 两组对角分别相等的四边形是平行四边形；

⑤ 对角线互相平分的四边形是平行四边形．

平行线间的距离

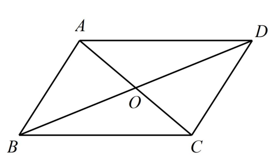
与两条平行直线都垂直的直线，叫做这两条平行直线的公垂线，这时连接两个垂足的线段叫做这两条平行直线的公垂线段．

两条平行线的所有公垂线段都相等．

两条平行线的公垂线段的长度叫做两条平行线间的距离．

一、典例讲练

1. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$BC=10$，$AC=8$，$BD=14$，则 $\triangle BOC$ 的周长是（　　）



A. 21　　B. 22　　C. 25　　D. 32

2. 在四边形 $ABCD$ 中，从 ① $AB\parallel CD$；② $AB=CD$；③ $BC\parallel AD$；④ $BC=AD$ 中任选两个能使四边形 $ABCD$ 为平行四边形的选法有（　　）

A. 3 种　　B. 4 种　　C. 5 种　　D. 6 种

3. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB > AD$ ，按以下步骤作图：以点 A 为圆心，小于 AD 的长为半径画弧，分别交 AB，AD 于点 E，F；再分别以点 E，F 为圆心，大于 $\frac{1}{2}EF$ 的长为半径画弧，两弧交于点 G；作射线 AG 交 CD 于点 H，则下列结论中不能由条件推理得出的是 (　　)

A. AG 平分 $\angle DAB$　　B. $AD = DH$

C. $DH = BC$　　D. $CH = DH$

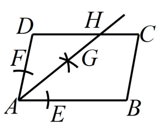
4. 不能判定四边形 $ABCD$ 为平行四边形的条件是 (　　)

A. $AB \parallel CD$ ，$AD = BC$　　B. $AB \parallel CD$ ，$\angle A = \angle C$

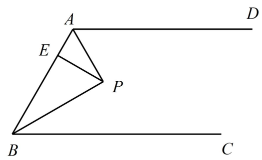
C. $AD \parallel BC$ ，$AD = BC$　　D. $\angle A = \angle C$ ，$\angle B = \angle D$

5. 如图，$AD \parallel BC$ ，$\angle ABC$ 的角平分线 BP 与 $\angle BAD$ 的角平分线 AP 相交于点 P，作 $PE \perp AB$ 于点 E． 若 $PE = 2$ ，则两平行线 AD 与 BC 间的距离为 (　　)

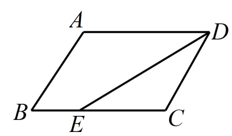
A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7



第 3 题图



第 5 题图



第 8 题图

6. 一个四边形的三个相邻内角度数依次如下，那么其中是平行四边形的是 (　　)

A. 88°，108°，88°　　B. 88°，104°，108°

C. 88°，92°，92°　　D. 88°，92°，88°

7. 平行四边形中一边的长为 10 cm ，那么它的两条对角线的长度可能是 (　　)

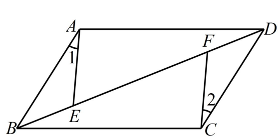
A. 4 cm 和 6 cm　　B. 20 cm 和 30 cm　　C. 6 cm 和 8 cm　　D. 8 cm 和 12 cm

8. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，DE 平分 $\angle ADC$ ，$BE = 2$ ，$DC = 4$ ，则平行四边形 $ABCD$ 的周长为 (　　)

A. 16　　B. 24　　C. 20　　D. 12

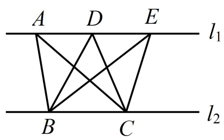
9. 如图，平行四边形 $ABCD$ 中，E，F 是对角线 BD 上的两点，如果添加一个条件使 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ ，则添加的条件不能是 (　　)

A. $AE = CF$　　B. $BE = FD$　　C. $BF = DE$　　D. $\angle 1 = \angle 2$

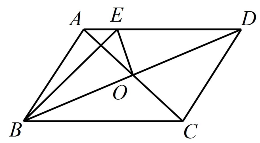


10. 如图所示，$l_1 \parallel l_2$，B，C 是 l_2 上的两点，A，D，E 是 l_1 上的三点，$S_{\triangle ABC}$ 记作 S_1，$S_{\triangle DBC}$ 记作 S_2，$S_{\triangle EBC}$ 记作 S_3，则 (　　)

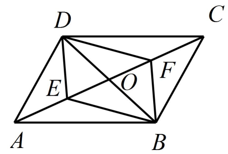
A. $S_1 > S_2 > S_3$　　B. $S_3 > S_2 > S_1$　　C. $S_1 = S_2 = S_3$　　D. 无法比较



第 10 题图



第 12 题图



第 13 题图

11. 点 A，B，C 是平面内不在同一条直线上的三点，点 D 是该平面内任意一点，若点 A，B，C，D 四个点恰能构成一个平行四边形，则在该平面内符合这样条件的点 D 有 (　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

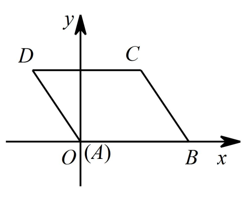
12. 如图，平行四边形 $ABCD$ 的周长为 16 cm，AC，BD 相交于点 O，$EO \perp BD$ 交 AD 于点 E，则 $\triangle ABE$ 周长为 (　　)

A. 4 cm　　B. 6 cm　　C. 8 cm　　D. 10 cm

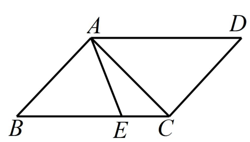
13. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于 O，E，F 是对角线上的两点，给出下列四个条件：① $OE = OF$；② $DE = BF$；③ $\angle ADE = \angle CBF$；④ $\angle ABE = \angle CDF$．其中不能判定四边形 $DEBF$ 是平行四边形的有 (　　)

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

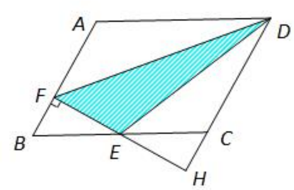
14. 如图，在平面直角坐标系中，平行四边形 $ABCD$ 的顶点 $A(0,0)$，$B(3,0)$，$C(2,2)$，则顶点 D 的坐标是________.



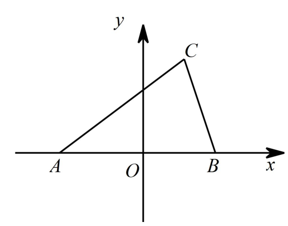
第 14 题图



第 15 题图



第 17 题图



第 18 题图

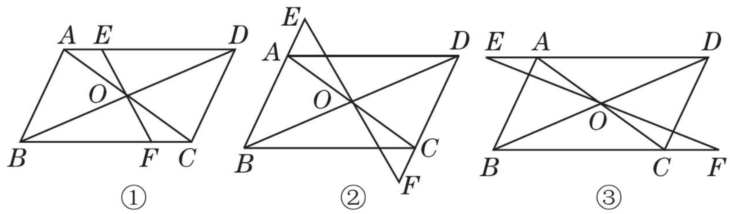
15. 如图，点 E 在平行四边形 $ABCD$ 的边 BC 上，$BE = CD$．若 $\angle EAC = 20^\circ$，$\angle B + \angle D = 80^\circ$，则 $\angle ACD$ 的度数为________.

16. 一个四边形的边长依次是 a，b，c，d 且满足 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2ac + 2bd$，则这个四边形是________.

17. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB = 3$，$AD = 4$，$\angle ABC = 60^\circ$，过 BC 的中点 E 作 $EF \perp AB$，垂足为点 F，与 DC 的延长线相交于点 H，则 $\triangle DEF$ 的面积是________.

18. 如图，在平面直角坐标系中，已知 $A(-3,0)$ ，$B(3,0)$ ，$C(2,4)$ ，求以 A，B，C 三个点为顶点的平行四边形的第四个点 D 的坐标.

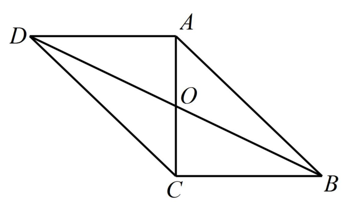
19. 如图①，平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，EF 过点 O 且与 AD，BC 分别相交于点 E，F，则 $OE=OF$. 若 EF 过点 O 且与平行四边形的两对边的延长线分别相交于点 E，F（图②和图③），OE 与 OF 还相等吗?若相等，请说明理由.



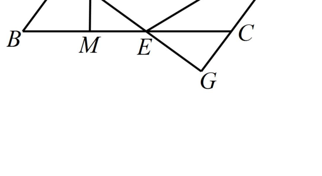
20. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 交于点 O，$AC \perp BC$ ，且平行四边形 $ABCD$ 的周长为 36，$\triangle OCD$ 的周长比 $\triangle OBC$ 的周长大 2.

（1）求 BC，CD 的长;

（2）求平行四边形 $ABCD$ 的面积.



21. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=5$ ，$BC=10$ ，BC 边上的高 $AM=4$ ，E 为 BC 边上的一个动点（不与 B，C 重合）. 过点 E 作直线 AB 的垂线，垂足为点 F. FE 与 DC 的延长线相交于点 G，连接 DE，DF. 当点 E 在线段 BC 上运动时，$\triangle BEF$ 与 $\triangle CEG$ 的周长之和是否为定值?如果是定值，求出这个值；如果不是，请说明你的理由.

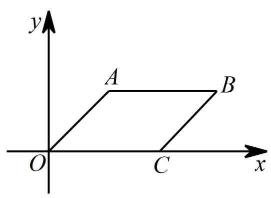


22. 如图，平行四边形 $ABCO$ 的四个顶点坐标分别是 $A\left(\sqrt{3},2\right)$，$B\left(3\sqrt{3},2\right)$，$C\left(2\sqrt{3},0\right)$，$O(0,0)$，将平行四边形向左平移 $\sqrt{3}$ 个单位长度得到平行四边形 $A'B'C'O'$．

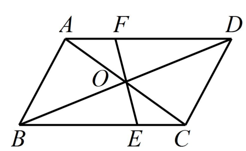
（1）直接写出平行四边形 $A'B'C'O'$ 四个顶点的坐标；

（2）求平移后平行四边形 $A'B'C'O'$ 与平行四边形 $ABCO$ 重叠部分的面积；

（3）在 OC 上有一点 $E\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，点 F 为线段 AB 上一点，连接 EF，若 EF 将平行四边形 $ABCO$ 分成面积相等的两部分，则点 F 的坐标为 (____,____)（直接写出结果）．



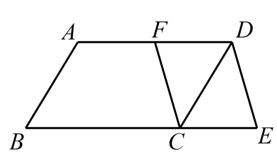
23. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，过其对角线的交点 O 引一直线交 BC 于点 E，交 AD 于点 F，若 $AB=3\text{ cm}$，$BC=4\text{ cm}$，$OE=1\text{ cm}$，试求四边形 $CDFE$ 的周长．



24. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，F 是 AD 的中点，延长 BC 到点 E，使 $CE=\dfrac{1}{2}BC$，连接 DE，CF．

（1）求证：$DE=CF$；

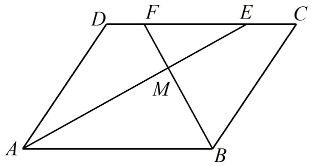
（2）若 $AB=4$，$AD=6$，$\angle B=60^\circ$，求 DE 的长．



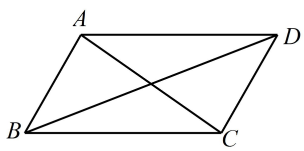
25. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，AE 、 BF 分别平分 $\angle DAB$ 和 $\angle ABC$ ，交 CD 于点 E 、 F，AE 、 BF 相交于点 M.

（1）试说明：$AE \perp BF$ ；

（2）判断线段 DF 与 CE 的大小关系，并予以说明.



26. 如图，已知四边形 $ABCD$ 为平行四边形．求证：$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$.

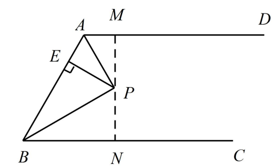


18.1 平行四边形 答案

第一部分

1. A　2. B　3. D　【解析】根据作图的方法可得 AG 平分 $\angle DAB$，$\because AG$ 平分 $\angle DAB$，$\therefore \angle DAH = \angle BAH$，$\because CD \parallel AB$，$\therefore \angle DHA = \angle BAH$，$\therefore \angle DAH = \angle DHA$，$\therefore AD = DH$，$\therefore BC = DH$.

4. A　5. A　【解析】6. D　7. B　8. C



9. A　【解析】两边及其中一边的对角对应相等的两个三角形不一定全等.

10. C　【解析】同底等高的三角形的面积相等.

11. C　【解析】过点 A 作 BC 的平行线，过点 B 作 AC 的平行线，过点 C 作 AB 的平行线.

12. C　【解析】根据平行四边形的性质得：$OB = OD$，因为 $EO \perp BD$，所以 EO 为 BD 的垂直平分线，根据线段的垂直平分线上的点到两个端点的距离相等得：$BE = DE$，所以 $\triangle ABE$ 的周长 $= AB + AE + BE = AB + AE + DE = AB + AD = \dfrac{1}{2} \times 16 = 8\ (\text{cm})$.

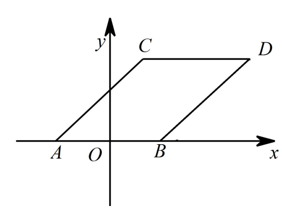
13. B　【解析】给出条件① $OE = OF$，$\because OD = OB$，$\therefore$ 四边形 $DEBF$ 为平行四边形．故①正确；给出条件③ $\angle ADE = \angle CBF$，$\because \angle DAE = \angle BCF$，$AD = BC$，$\therefore \triangle ADE \cong \triangle BCF$，$\therefore DE = BF$，又可以由全等三角形的对应角相等可判断 $\angle DEO = \angle BFO$，$\therefore DE \parallel BF$，$\therefore$ 四边形 $DEBF$ 为平行四边形；给出条件④，理由同③，亦可判定四边形 $DEBF$ 为平行四边形；只有给出条件②无法判定四边形 $DEBF$ 为平行四边形．故选 B．本题易错选 A．将 $DE = BF$ 作为判定三角形全等，从而推出四边形 $DEBF$ 为平行四边形的条件.

14. $(-1, 2)$

15. $90°$

16. 平行四边形【解析】因为 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2ac + 2bd$，所以 $a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bd + d^2 = 0$，所以 $(a-c)^2 + (b-d)^2 = 0$，所以 $a = c$ 且 $b = d$，所以该四边形是平行四边形.

17. $2\sqrt{3}$



18. 当点 D 位于第一象限时，如图．$\because$ 四边形 $ABDC$ 为平行四边形，$\therefore CD = AB = 6$，$CD \parallel AB$．$\therefore D(8, 4)$．
同理可得，当点 D 位于第二象限时，$D(-4, 4)$，当点 D 位于第三象限时，$D(-2, -4)$．$\therefore$ 第四个点 D 的坐标为 $(8, 4)$ 或 $(-4, 4)$ 或 $(-2, -4)$.

19. 图②中仍然相等．理由如下：$\because$ 在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，$OA = OC$，$\therefore \angle E = \angle F$．又 $\because \angle AOE = \angle COF$，$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF\ (\text{AAS})$．$\therefore OE = OF$．
图③中仍然相等．理由如下：$\because$ 在平行四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$OA = OC$，$\therefore \angle E = \angle F$．又 $\because \angle AOE = \angle COF$，$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF\ (\text{AAS})$．$\therefore OE = OF$.

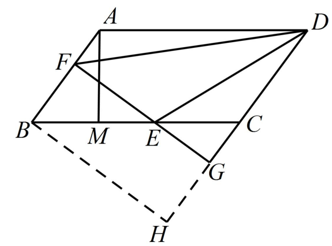
20.（1）$\because C_{\text{平行四边形}ABCD}=36$，$\therefore CD+BC=18$，又 $C_{\triangle OCD}-C_{\triangle OBC}=CD-BC=2$，

$\therefore \begin{cases}CD+BC=18,\\CD-BC=2,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}CD=10,\\BC=8.\end{cases}$

（2）$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ACB$ 中，$AB=10$，$BC=8$，$\therefore AC=6$，

$\therefore S_{\text{平行四边形}ABCD}=6\times 8=48$．

21. 是定值，定值是 24．过点 B 作 $BH\perp CD$，交 DC 的延长线于点 H，则 $BH\parallel FG$，因为 $AB\parallel CD$，所以四边形 $BHGF$ 是平行四边形，所以 $BF=HG$，$BH=FG$，因为 $S_{\text{平行四边形}ABCD}=AB\cdot FG=BC\cdot AM$，即 $5FG=10\times 4$，所以 $FG=8$．所以 $BH=8$．在 $\mathrm{Rt}\triangle BHC$ 中，$CH=\sqrt{10^2-8^2}=6$，所以 $\triangle BEF$ 与 $\triangle CEG$ 的周长之和为 $BC+FG+CH=6+8+10=24$．



22.（1）$A'(0,2)$，$B'\left(2\sqrt{3},2\right)$，$C'\left(\sqrt{3},0\right)$，$O'\left(-\sqrt{3},0\right)$．

（2）由题意得，$AB'=\sqrt{3}$，$\therefore$ 平移后平行四边形 $A'B'C'O'$ 与平行四边形 $ABCO$ 重叠部分的面积为：$\sqrt{3}\times 2=2\sqrt{3}$．

（3）$\frac{5\sqrt{3}}{2}$；2

23. 在平行四边形 $ABCD$ 中，$CD=AB=3\text{ cm}$，$AO=CO$，$AD\parallel BC$，$AD=BC$，

$\therefore \angle DAC=\angle ACB$，在 $\triangle AOF$ 和 $\triangle COE$ 中，

$\begin{cases}\angle DAC=\angle ACB,\\AO=CO,\\\angle AOF=\angle COE,\end{cases}$ $\therefore \triangle AOF\cong\triangle COE$，$\therefore AF=EC$，$OF=OE$，

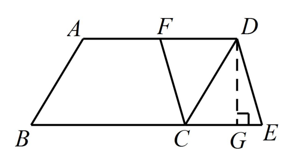
$\therefore EC+FD=AF+FD=AD=BC=4\text{ cm}$，

$$\begin{aligned}\therefore C_{\text{四边形}CDFE}&=EC+FD+CD+EF\\&=4+3+2\\&=9\,(\text{cm}).\end{aligned}$$

24.（1）$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore AD=BC$，$AD\parallel BC$．又 $\because F$ 是 AD 的中点，

$\therefore FD=\frac{1}{2}AD$．$\because CE=\frac{1}{2}BC$，$\therefore FD=CE$．又 $\because FD\parallel CE$，$\therefore$ 四边形 $CEDF$ 是平行四边形．$\therefore DE=CF$．

（2）过 D 作 $DG\perp CE$ 于点 G．如图所示：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore AB\parallel CD$，$CD=AB=4$，$BC=AD=6$．



$\therefore \angle DCE=\angle B=60^\circ$．在 $\mathrm{Rt}\triangle CDG$ 中，$\angle DGC=90^\circ$，

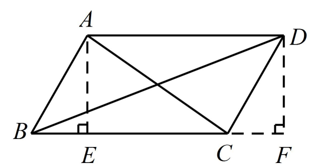
$\therefore \angle CDG=30^\circ$，$\therefore CG=\frac{1}{2}CD=2$．

由勾股定理，得 $DG=\sqrt{CD^2-CG^2}=2\sqrt{3}$ ． $\because CE=\frac{1}{2}BC=3$ ， $\therefore GE=1$ ．

在 $Rt\triangle DEG$ 中，$\angle DGE=90°$ ， $\therefore DE=\sqrt{DG^2+GE^2}=\sqrt{13}$ ．

25.（1）$\because$ 在平行四边形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$ ， $\therefore \angle DAB+\angle ABC=180°$ ．
$\because AE$ 、 BF 分别平分 $\angle DAB$ 和 $\angle ABC$， $\therefore \angle DAB=2\angle BAE$ ，$\angle ABC=2\angle ABF$ ．
$\therefore 2\angle BAE+2\angle ABF=180°$ ． 即 $\angle BAE+\angle ABF=90°$ ． $\therefore \angle AMB=90°$ ． $\therefore$
$AE\perp BF$ ．

（2） $DF=CE$ ， $\because$ 在平行四边形 $ABCD$ 中，$CD\parallel AB$ ， $\therefore \angle DEA=\angle EAB$ ．
又 AE 平分 $\angle DAB$， $\therefore \angle DAE=\angle EAB$ ， $\therefore \angle DEA=\angle DAE$ ． $\therefore DE=AD$ ．
同理可得，$CF=BC$ ． 又 $\because AD=BC$ ， $\therefore DE=CF$ ， $\therefore DE-EF=CF-EF$ ．
即 $DF=CE$ ．



26. 如图，过点 A 作 $AE\perp BC$ 于点 E，
过点 D 作 $DF\perp BC$ ，交 BC 的延长线于点 F，
$\therefore AC^2=AE^2+CE^2=AB^2-BE^2+(BC-BE)^2=AB^2+BC^2-2BE\cdot BC$ ，
$BD^2=DF^2+BF^2=\left(CD^2-CF^2\right)+(BC+CF)^2=CD^2+BC^2+2BC\cdot CF$ ．
$\therefore AC^2+BD^2=AB^2+CD^2+BC^2+BC^2+2BC\cdot CF-2BE\cdot BC$ ．
$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形， $\therefore AB\parallel CD$ 且 $AB=DC$ ，$DA=BC$ ． $\therefore$
$\angle ABE=\angle DCF$ ． $\because \angle AEB=\angle DFC=90°$ ， $\therefore \triangle ABE\cong\triangle DCF$ ． $\therefore BE=CF$ ．
$\therefore AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$ ．