19.2 一次函数

【学习任务】

1、理解正比例函数一次函数的概念，掌握一次函数的图象和性质，会用待定系数法确定一次函数的解析式.

2、理解一次函数与一元一次方程、一元一次不等式、二元一次方程（组）的联系，并能解决相应的问题.

【知识梳理】

一次函数的概念

描述　**一次函数**

一般的，形如 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq 0$）的函数，叫做**一次函数**（linear function）．正比例函数是一种特殊的一次函数.

例题　下列函数哪些是一次函数？哪些是正比例函数？

① $y=-\dfrac{x}{3}$；② $y=-\dfrac{8}{x}$；③ $y=8x^2+x(1-8x)$；④ $y=1+8x$.

解： ①③④是一次函数；①③是正比例函数.

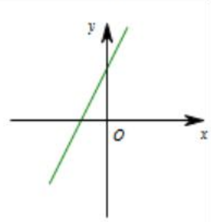
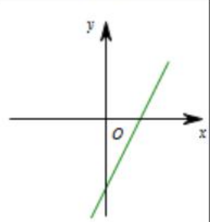
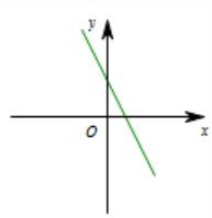
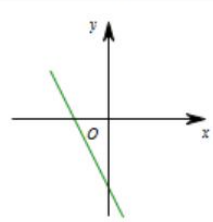
根据正比例函数和一次函数的定义可以知道①既是正比例函数，也是一次函数，②既不是正比例函数，也不是一次函数，③经过化简后变为 $y=x$，它既是正比例函数，也是一次函数，④是一次函数.

试求 k 为何值时，函数 $y=(k+1)x^{k^2}+k-1$ 是一次函数？

解： 由 $k^2=1$，得 $k=\pm 1$，又因为 $k+1\neq 0$，所以 $k\neq -1$，所以 $k=1$.

k,b对一次函数图象及性质的影响

描述　**一次函数 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq 0$）的图象与性质**

	k>0		k<0	
	b>0	b<0	b>0	b<0
图象				
性质	图象经过第一、二、三象限	图象经过第一、三、四象限	图象经过第一、二、四象限	图象经过第二、三、四象限
	y 随 x 的增大而增大		y 随 x 的增大而减小	

一次函数的解析式

描述　先设出式子中的未知系数，再根据条件列出方程或方程组求出未知系数，从而写出这个函数的方法叫**待定系数法**．一般待定系数的个数就是代入点坐标的个数.

对于一次函数 $y=kx+b$（$k\neq 0$）与 x 轴的交点坐标为$\left(-\dfrac{b}{k},0\right)$.

一次函数的图象变换

平移

"**上加下减，左加右减**"，上下平移时在整体后面进行加减，左右平移时针对的是 x 进行加减.

例如 $y=2x+1$ 向上平移 2 个单位，向左平移 3 个单位，可得 $y=2(x+3)+1+2$，最后函数为 $y=2x+9$.

对称变换

	y=kx+b（k≠0）
x 轴	y=-kx-b
y 轴	y=-kx+b
原点	y=kx-b

旋转

函数图象旋转可以看成先把原图象上的点绕着旋转中心旋转，得到旋转后的点的坐标，即可求得新的函数.

一次函数与一元一次方程的关系

描述　解一个以 x 为未知数的一元一次方程 $ax+b=c\ (a\neq 0)$，可以看成一次函数 $y=ax+b\ (a\neq 0)$ 的函数值为 c 时，求自变量 x 的值.

一次函数与一次不等式的关系

描述　**一次函数与一次不等式**

① $ax+b>0$（$a\neq 0$）的解集可以看成 $y=ax+b$ 中，$y>0$ 时的取值范围，在图象上对应着 x 轴上方的部分对应的横坐标的值；

② $ax+b<0$（$a\neq 0$）的解集可以看成 $y=ax+b$ 中，$y<0$ 时的取值范围，在图象上对应着 x 轴下方的部分对应的横坐标的值；

③ $ax+b>mx+n$（$ma\neq 0$）的解集可以通过函数 $y=ax+b$ 与函数 $y=mx+n$ 的图象得到解集.

一次函数与二元一次方程（组）的关系

描述　**一次函数与二元一次方程（组）的关系**

在用图象求以 x 、 y 为未知数的二元一次方程组 $\begin{cases}k_1x-y_1=-b_1,\\ k_2x-y_2=-b_2\end{cases}$ 的解时，可以看成两个函数 $y_1=k_1x+b_1$（$k_1\neq 0$）与 $y_2=k_2x+b_2$（$k_2\neq 0$）的交点坐标，这两个函数交点的横、纵坐标就是二元一次方程组的解.

一次函数的应用

描述　一般步骤：

① 找出问题中的变量和常量及它们之间的函数关系；

② 列一次函数表达式表示它们之间的关系；

③ 应用一次函数的图象及性质解题；

④ 检验结果的合理性，检验是否符合实际意义．

例题　某工厂投入生产一种机器的总成本为 2000 万元．当该机器生产数量至少为 10 台，但不超过 70 台时，每台成本 y 与生产数量 x 之间是一次函数关系，函数 y 与自变量 x 的部分对应值如下表：

x（单位：台）	10	20	30
y（单位：万元/台）	60	55	50

求 y 与 x 之间的函数解析式，并写出自变量 x 的取值范围．

【同步讲练】

一、选择题

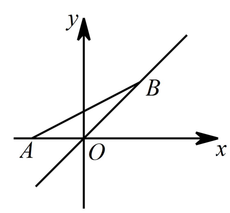
1. 已知 $P_1(-1, y_1)$ ，$P_2(2, y_2)$ 是正比例函数 $y = -x$ 图象上的两个点，则 y_1，y_2 的大小关系是(　　)

A. $y_1 = y_2$　　B. $y_1 < y_2$　　C. $y_1 > y_2$　　D. 不能确定

2. 如图，点 A 的坐标为 $(-2, 0)$ ，点 B 在直线 $y = x$ 上运动，当线段 AB 最短时点 B 的坐标为(　　)

A. $(0, 0)$　　B. $(-1, -1)$

C. $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$　　D. $\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$



3. 已知 $A\left(-\frac{1}{3}, y_1\right)$ ，$B\left(-\frac{1}{2}, y_2\right)$ ，$C(1, y_3)$ 是一次函数 $y = b - 3x$ 的图象上三点，则 y_1，y_2，y_3 的大小关系为(　　)

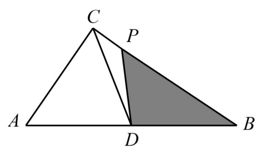
A. $y_3 < y_1 < y_2$　　B. $y_3 < y_2 < y_1$　　C. $y_1 < y_2 < y_3$　　D. $y_2 < y_1 < y_3$

4. 从点 O 引两条射线 OA，OB，在 OA，OB 上分别截取 $OM = 1$ cm ，$ON = 2$ cm ，则 M，N 两点间的距离一定(　　)

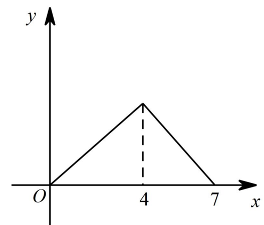
A. 小于 3 cm　　B. 等于 2 cm　　C. 大于 2 cm　　D. 有最大值 3 cm

5. 如图（1），在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，D 是斜边 AB 的中点，动点 P 从 B 点出发，沿 $B\to C\to A$ 运动，设 $S_{\triangle DPB}=y$，点 P 运动的路程为 x，若 y 与 x 之间的函数图象如图（2）所示，则 $\triangle ABC$ 的面积为(　　)

A. 4　　　　B. 6　　　　C. 12　　　　D. 14



图（1）

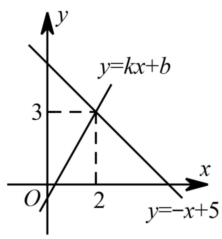


图（2）

二、填空题

6. 将直线 $y=2x+1$ 向下平移 2 个单位，所得直线的表达式是________.

7. 如图，一次函数 $y=kx+b$ 与 $y=-x+5$ 的图象的交点坐标为 $(2,3)$，则关于 x 的不等式 $5>-x+5>kx+b$ 的解集为________.



8. 已知二元一次方程组 $\begin{cases}x-y=-5,\\x+2y=-2\end{cases}$ 的解为 $\begin{cases}x=-4,\\y=1.\end{cases}$ 则在同一平面直角坐标系中，直线 $l_1:y=x+5$ 与直线 $l_2:y=-\frac{1}{2}x-1$ 的交点坐标为________.

9. 若点 $M(k-1,k+1)$ 关于 y 轴的对称点在第四象限内，则一次函数 $y=(k-1)x+k$ 的图象不经过第________ 象限.

三、解答题

10. 已知直线 $y=kx-4$ 经过点 $(4,4)$，求不等式 $kx-4\geqslant 0$ 的解集.

11. 直线 $y=kx+b$ 交坐标轴于 $A(-2,0)$，$B(0,3)$ 两点，求不等式 $kx+b>0$ 的解集.

12.（1）将直线 $y=-3x-1$ 向右平移 2 个单位长度后的解析式为________；

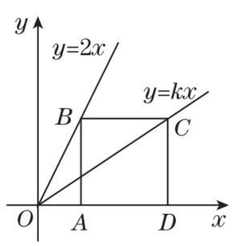
（2）在平面直角坐标中，$A(-1,3)$，$B(3,1)$，在 x 轴上求一点 C，使 $CA+CB$ 最小，则 C 点坐标为________.

13. 在直角坐标系中，一条直线经过 $A(-1,5)$，$P(-2,a)$，$B(3,-3)$ 三点.

（1）求 a 的值；

（2）设这条直线与 y 轴相交于点 D，求 $\triangle OPD$ 的面积.

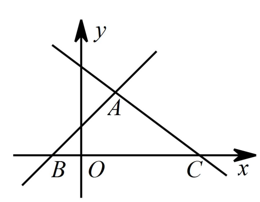
14. 如图，点 B，C 分别在直线 $y=2x$ 和直线 $y=kx$ 上，点 A，D 分别是 x 轴上的两点．已知四边形 $ABCD$ 是正方形，求 k 的值.



15. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y=x+1$ 与 $y=-\frac{3}{4}x+3$ 交于点 $A\left(\frac{8}{7},\frac{15}{7}\right)$，两直线分别交 x 轴于点 B 和点 C．求：

（1）点 B，C 的坐标；

（2）$\triangle ABC$ 的面积.



19.1 一次函数 答案

第一部分

1. C 【解析】$\because -1<0$，$\therefore$ 正比例函数 y 随 x 的增大而减小．$\because -1<2$，$\therefore y_1>y_2$．

2. B 3. A 4. D 5. B 【解析】$\because D$ 是斜边 AB 的中点，$\therefore$ 根据函数的图象知 $BC=4$，$AC=3$，$\because \angle ACB=90^\circ$，$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}\times 3\times 4=6$．

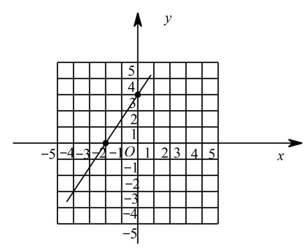
第二部分

6. $y=2x-1$ 7. $0<x<2$ 8. $(-4,1)$ 9. 一【解析】$\because$ 点 $M(k-1,k+1)$ 关于 y 轴的对称点在第四象限内，$\therefore$ 点 $M(k-1,k+1)$ 位于第三象限，$\therefore k-1<0$ 且 $k+1<0$，解得：$k<-1$，$\therefore y=(k-1)x+k$ 经过第二、三、四象限，不经过第一象限．

第三部分

10. $\because$ 直线 $y=kx-4$ 经过点 $(4,4)$ $\therefore$ $4k-4=4$，$\therefore$ $k=2$，$\therefore$ 直线解析式为 $y=2x-4$，，令 $y=0$，则 $2x-4=0$，解得 $x=2$，$\because$ $k=2>0$，$\therefore$ y 随 x 的增大而增大，$\therefore$ 不等式 $kx-4\geqslant 0$ 的解集是 $x\geqslant 2$．

11. 如图所示：不等式 $kx+b>0$ 的解集为 $x>-2$．



12. （1）$y=-3x+5$

（2）$(2,0)$

13. （1）设直线的解析式为 $y=kx+b$，把 $A(-1,5)$，$B(3,-3)$ 代入，

可得：$\begin{cases}-k+b=5\\3k+b=-3\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k=-2\\b=3\end{cases}$，所以直线解析式为：$y=-2x+3$，

把 $P(-2,a)$ 代入 $y=-2x+3$ 中，得：$a=7$．

（2）由（1）得点 P 的坐标为 $(-2,7)$，令 $x=0$，则 $y=3$，所以直线与 y 轴的交点坐标为 $(0,3)$，所以 $\triangle OPD$ 的面积 $=\frac{1}{2}\times 3\times 2=3$．

14. 设 A 点坐标为 $(a,0)$，则 B 点坐标为 $(a,2a)$，即 $AB=2a$，所以 D 点坐标为 $(3a,0)$，所以 C 点坐标为 $(3a,3ak)$．又因为 $DC=AB=2a$，所以 $3ak=2a$，解得 $k=\frac{2}{3}$．

15. （1）由 $x+1=0$，解得 $x=-1$，所以点 B 的坐标是 $(-1,0)$．由 $-\frac{3}{4}x+3=0$，解得 $x=4$，所以点 C 的坐标是 $(4,0)$．

（2）因为 $BC=4-(-1)=5$，点 A 到 x 轴的距离为 $\frac{15}{7}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 5\times\frac{15}{7}=\frac{75}{14}$．