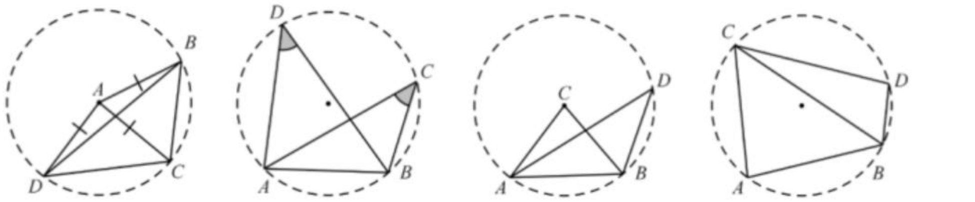
几何模型之隐圆问题

【模型讲解】

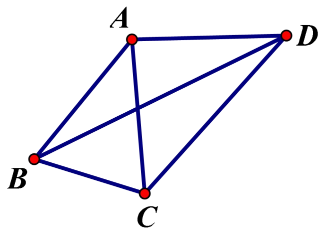
常见的隐圆模型有：（1）动点到定点的距离为定长；（2）四点共圆；（3）定边对定角等。



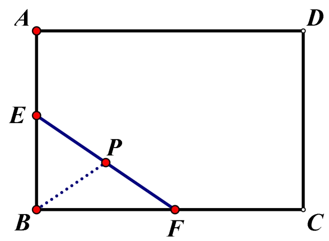
$AD=AC=AB$　　$\angle ADB=\angle ACB$　　$2\angle ADB=\angle ACB$　　$\angle BAC+\angle BDC=180°$

【例题分析】

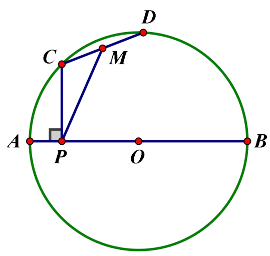
例 1、如图，已知 AB=AC=AD，∠CBD=2∠BDC，∠BAC=44°，则∠CAD 的度数为____________.



例题 1 图



例题 2 图



例题 3 图

例 2、在矩形 ABCD 中，已知 AB=2cm，BC=3cm，现有一根长为 2cm 的木棒 EF 紧贴着矩形的边（即两个端点始终落在矩形的边上），按逆时针方向滑动一周，则木棒 EF 的中点 P 在运动过程中所围成的图形的面积为____________cm^2.

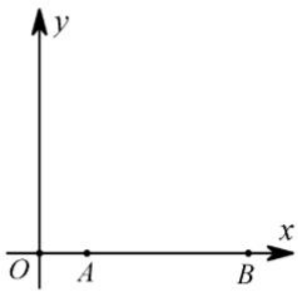
例 3、如图，定长弦 CD 在以 AB 为直径的⊙O 上滑动（点 C、D 与点 A、B 不重合），M 是 CD 的中点，过点 C 作 CP⊥AB 于点 P，若 AB=8，则 PM 的最大值是___________.

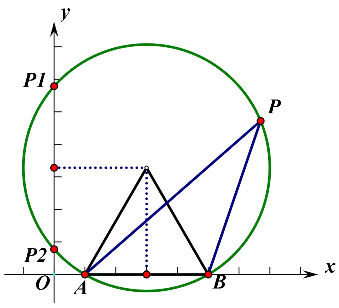
例 4、如图，点 A 与点 B 的坐标分别是（1，0），（5，0），点 P 是该直角坐标系内的一个动点.

（1）使∠APB=30° 的点 P 有________个；

（2）若点 P 在 y 轴上，且∠APB=30°，求满足条件的点 P 的坐标；

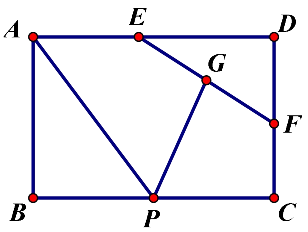
（3）当点 P 在 y 轴上移动时，∠APB 是否存在最大值？若存在，求点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.



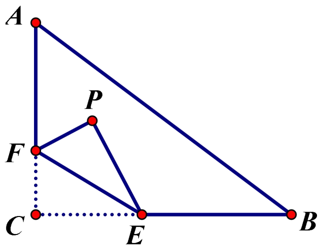


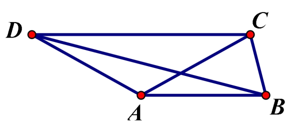
【巩固训练】

1、如图 1，矩形 ABCD 中，AB=2，AD=3，点 E、F 分别 AD、DC 边上的点，且 EF=2，点 G 为 EF 的中点，点 P 为 BC 上一动点，则 PA+PG 的最小值为__________.



2、如图 3，在 Rt△ABC 中，∠C=90°，AC=6，BC=8，点 F 在边 AC 上，并且 CF=2，点 E 为边 BC 上的动点，将△CEF 沿直线 EF 翻折，点 C 落在点 P 处，则点 P 到边 AB 距离的最小值是________ .

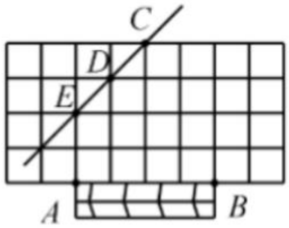




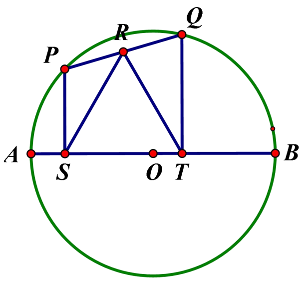
3、如图，四边形 ABCD 中，DC//AB，BC=1，AB=AC=AD=2.则 BD 的长为____________ .

4、足球射门，不考虑其他因素，仅考虑射点到球门 AB 的张角大小时，张角越大，射门越好。如图，正方形网格中，点 A，B，C，D，E 均在格点上，球员带球沿 CD 方向进攻，最好的射点在（　　）

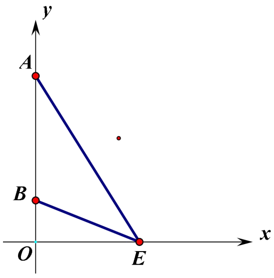
A. 点 C　　B. 点 D 或点 E　　C. 线段 DE（异于端点）上一点　　D. 线段 CD（异于端点）上一点



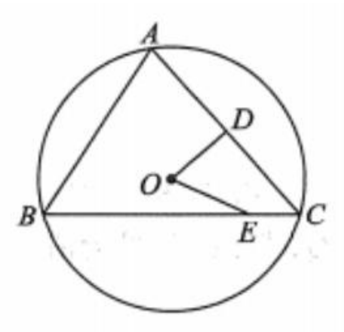
5、如图，已知 AB 是⊙O 的直径，PQ 是⊙O 的弦，PQ 与 AB 不平行，R 是 PQ 的中点，作 PS⊥AB，QT⊥AB，垂足分别为 S、T（S≠T），并且∠SRT=60°，则 $\frac{PQ}{AB}$ 的值等于__________ .



6、如图，A（0，8），B（0，2），点 E 是 x 轴的正半轴上的一动点，连接 AE，BE，当∠AEB 最大时，求点 E 的坐标.



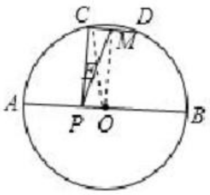
7、如图，点 C 是⊙O 上的一点，⊙O 的半径为 $2\sqrt{2}$，点 D，E 分别是弦 CA，CB 上的一动点，OD=OE=$\sqrt{2}$，求 AB 的最大值.



隐圆问题 参考答案

例 1.【解答】解：∵$AB=AC=AD$，
∴B，C，D 在以 A 为圆心，AB 为半径的圆上，
∴$\angle CAD=2\angle CBD$，$\angle BAC=2\angle BDC$，
∵$\angle CBD=2\angle BDC$，$\angle BAC=44°$，
∴$\angle CAD=2\angle BAC=88°$．
故答案为：88°．

例 2【解答】解：如图所示：由题意根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，得出 P 到 B 点距离始终为 1，
则木棒 EF 的中点 P 在运动过程中的轨迹为分别以 A，B，C，D 为圆心，1cm 为半径的弧，
故所围成的图形的面积为：矩形面积 −4 个扇形面积 $=6-4\times\frac{90\pi\times1^2}{360}=6-\pi(cm^2)$．
故答案为：$6-\pi$．



例 3.【解答】解：连接 CO，MO，
∵$\angle CPO=\angle CMO=90°$，
∴C，M，O，P，四点共圆，且 CO 为直径（E 为圆心），
连接 PM，则 PM 为⊙E 的一条弦，当 PM 为直径时 PM 最大，所以 $PM=CO=4$ 时 PM 最大．即 $PM_{max}=4$．

例 4【解答】解：（1）以 AB 为边，在第一象限内作等边三角形 ABC，
以点 C 为圆心，AC 为半径作⊙C，交 y 轴于点 P_1、P_2．
在优弧 AP_1B 上任取一点 P，如图 1，则 $\angle APB=\frac{1}{2}\angle ACB=\frac{1}{2}\times60°=30°$．
∴使 $\angle APB=30°$ 的点 P 有无数个．故答案为：无数．

（2）①当点 P 在 y 轴的正半轴上时，
过点 C 作 $CG\perp AB$，垂足为 G，如图 1．
∵点 A（1，0），点 B（5，0），∴$OA=1$，$OB=5$．
∴$AB=4$．
∵点 C 为圆心，$CG\perp AB$，∴$AG=BG=\frac{1}{2}AB=2$．
∴$OG=OA+AG=3$．
∵△ABC 是等边三角形，∴$AC=BC=AB=4$．
∴$CG=\sqrt{AC^2-AG^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$．

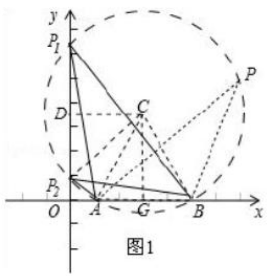


图1

∴点 C 的坐标为（3，$2\sqrt{3}$）．
过点 C 作 $CD\perp y$ 轴，垂足为 D，连接 CP_2，如图 1，
∵点 C 的坐标为（3，$2\sqrt{3}$），∴$CD=3$，$OD=2\sqrt{3}$．
∵P_1、P_2 是⊙C 与 y 轴的交点，∴$\angle AP_1B=\angle AP_2B=30°$．
∵$CP_2=CA=4$，$CD=3$，∴$DP_2=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$．

∵点 C 为圆心，$CD\perp P_1P_2$，∴$P_1D=P_2D=\sqrt{7}$．
∴P_2（0，$2\sqrt{3}-\sqrt{7}$）．P_1（0，$2\sqrt{3}+\sqrt{7}$）．
②当点 P 在 y 轴的负半轴上时，
同理可得：P_3（0，$-2\sqrt{3}-\sqrt{7}$）．P_4（0，$-2\sqrt{3}+\sqrt{7}$）．
综上所述：满足条件的点 P 的坐标有：
（0，$2\sqrt{3}-\sqrt{7}$）、（0，$2\sqrt{3}+\sqrt{7}$）、（0，$-2\sqrt{3}-\sqrt{7}$）、（0，$-2\sqrt{3}+\sqrt{7}$）．

（3）当过点 A、B 的⊙E 与 y 轴相切于点 P 时，$\angle APB$ 最大．

理由：可证：$\angle APB=\angle AEH$，当$\angle APB$ 最大时，$\angle AEH$ 最大． 由 $\sin\angle AEH=\dfrac{2}{AE}$ 得：当 AE 最小即 PE 最小时，$\angle AEH$ 最大．所以当圆与 y 轴相切时，$\angle APB$ 最大．

①当点 P 在 y 轴的正半轴上时，

连接 EA，作 $EH\perp x$ 轴，垂足为 H，如图 2．

∵⊙E 与 y 轴相切于点 P，∴$PE\perp OP$．

∵$EH\perp AB$，$OP\perp OH$，∴$\angle EPO=\angle POH=\angle EHO=90^\circ$．

∴四边形 $OPEH$ 是矩形．∴$OP=EH$，$PE=OH=3$．∴$EA=3$．

∵$\angle EHA=90^\circ$，$AH=2$，$EA=3$，

∴$EH=\sqrt{EA^2-AH^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

∴$OP=\sqrt{5}$ ∴P（0，$\sqrt{5}$）．

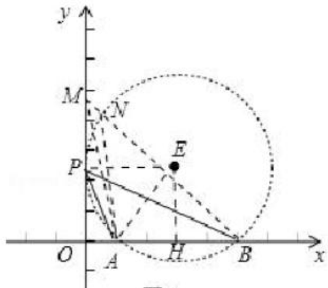


图2

②当点 P 在 y 轴的负半轴上时，

同理可得：P（0，$-\sqrt{5}$）．

理由：①若点 P 在 y 轴的正半轴上，

在 y 轴的正半轴上任取一点 M（不与点 P 重合），

连接 MA，MB，交⊙E 于点 N，连接 NA，如图 2 所示．

∵$\angle ANB$ 是△AMN 的外角，∴$\angle ANB>\angle AMB$．

∵$\angle APB=\angle ANB$，∴$\angle APB>\angle AMB$．

②若点 P 在 y 轴的负半轴上，

同理可证得：$\angle APB>\angle AMB$．

综上所述：当点 P 在 y 轴上移动时，$\angle APB$ 有最大值，

此时点 P 的坐标为（0，$\sqrt{5}$）和（0，$-\sqrt{5}$）．

习题答案

解：$\because EF=2$，点 G 为 EF 的中点，$\therefore DG=1$，

$\therefore G$ 是以 D 为圆心，以 1 为半径的圆弧上的点，

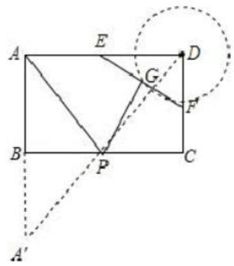
作 A 关于 BC 的对称点 A'，连接 $A'D$，交 BC 于 P，交以 D 为圆心，以 1 为半径的圆于 G，此时 $PA+PG$ 的值最小，最小值为 $A'G$ 的长；

$\because AB=2$，$AD=3$，$\therefore AA'=4$，$\therefore A'D=5$，

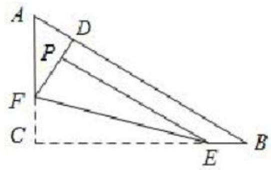
$\therefore A'G=A'D-DG=5-1=4$；

$\therefore PA+PG$ 的最小值为 4;

故答案为 4.



解：如图所示：当 $PE//AB$．



在 RtΔABC 中，$\because \angle C=90^\circ$，$AC=6$，$BC=8$，

$\therefore AB=\sqrt{6^2+8^2}=10$，

由翻折的性质可知：$PF=FC=2$，$\angle FPE=\angle C=90^\circ$．

$\because PE//AB$，

$\therefore \angle PDB=90^\circ$．

由垂线段最短可知此时 FD 有最小值．

又$\because FP$ 为定值，

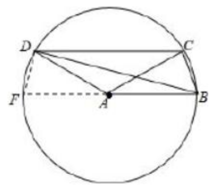
$\therefore PD$ 有最小值．

又$\because \angle A=\angle A$，$\angle ACB=\angle ADF$，

$\therefore \Delta AFD\backsim\Delta ABC$．

$\therefore \dfrac{AF}{AB}=\dfrac{DF}{BC}$，即 $\dfrac{4}{10}=\dfrac{DF}{8}$，解得：$DF=3.2$．

$\therefore PD=DF-FP=3.2-2=1.2$．

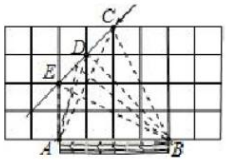


解：以 A 为圆心，AB 长为半径作圆，延长 BA 交⊙A 于 F，连接 DF．

$\because DC//AB$，$\therefore \overset{\frown}{DF}=\overset{\frown}{BC}$，$\therefore DF=CB=1$，$BF=2+2=4$，

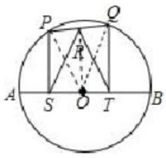
$\because FB$ 是⊙A 的直径，$\therefore \angle FDB=90^\circ$，$\therefore BD=\sqrt{BF^2-DF^2}=\sqrt{15}$．

【解答】解：连接 BC，AC，BD，AD，AE，BE，



已知 A，B，D，E 四点共圆，同弧所对的圆周角相等，因而$\angle ADB=\angle AEB$，然后圆同弧对应的“圆内角“大于圆周角，“圆外角“小于圆周角，因而射门点在 DE 上时角最大，射门点在 D 点右上方或点 E 左下方时角度则会更小.

故选：C.



8.【解答】解：连结 OP，OQ，OR，如图，

∵R 是 PQ 的中点，∴$OR\perp PQ$，

∵$OP=OQ$，∴$\angle POR=\angle QOR$，

∵$PS\perp AB$，∴$\angle PSO=\angle PRO=90^\circ$，

∴点 P、S、O、R 四点在以 OP 为直径的圆上，∴$\angle PSR=\angle POR$，

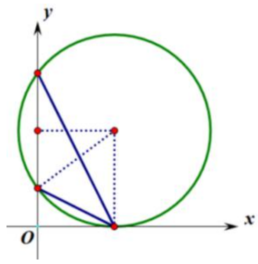
同理可得$\angle QTR=\angle QOR$，∴$\angle PSR=\angle QTR$，∴$\angle RST=\angle RTS$，而$\angle SRT=60^\circ$，

∴$\triangle RST$ 为等边三角形，∴$\angle RST=60^\circ$，$\angle RTS=60^\circ$，

∴$\angle RPO=\angle RSO=60^\circ$，$\angle RQO=\angle RTO=60^\circ$，∴$\triangle OPQ$ 为等边三角形，

∴$PQ=OP$，∴$AB=2PQ$，∴$\frac{PQ}{AB}=\frac{1}{2}$. 故答案为$\frac{1}{2}$.

6、如图，E(4,0)



8、如图，当 CA、CB 与半径$\sqrt{2}$为的小圆⊙O 相切时，AB 有最大值：$2\sqrt{6}$