12.3 角的平分线的性质

【学习任务】

1、复习巩固全等三角形的性质和判定。

2、会用尺规作一个角的平分线，并知道三角形的三条角平分线交于一点．

3、掌握角平分线的性质和判定，并会解决相关的问题．

【知识梳理】

**角平分线的性质**

角的平分线上的点到角的两边的距离相等．

**三角形角平分线的性质**

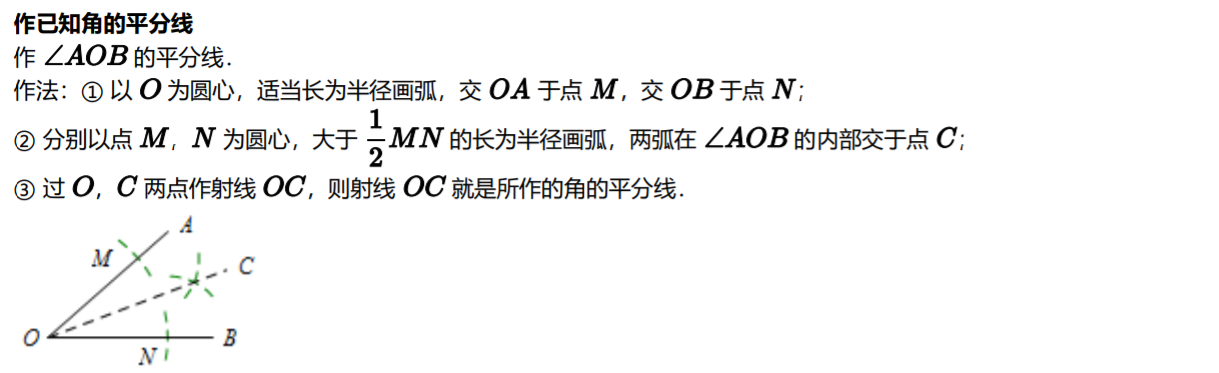
①三角形三条角平分线交于一点，这点到三边距离相等；

② 三角形的两个外角的平分线也交于一点，这点到三边所在的直线的距离相等 ．

**角平分线的判定**

角的内部到角的两边距离相等的点在角的平分线上．

三角形外角平分线交点共有三个，所以到三角形三边所在直线距离相等的点共有4个．



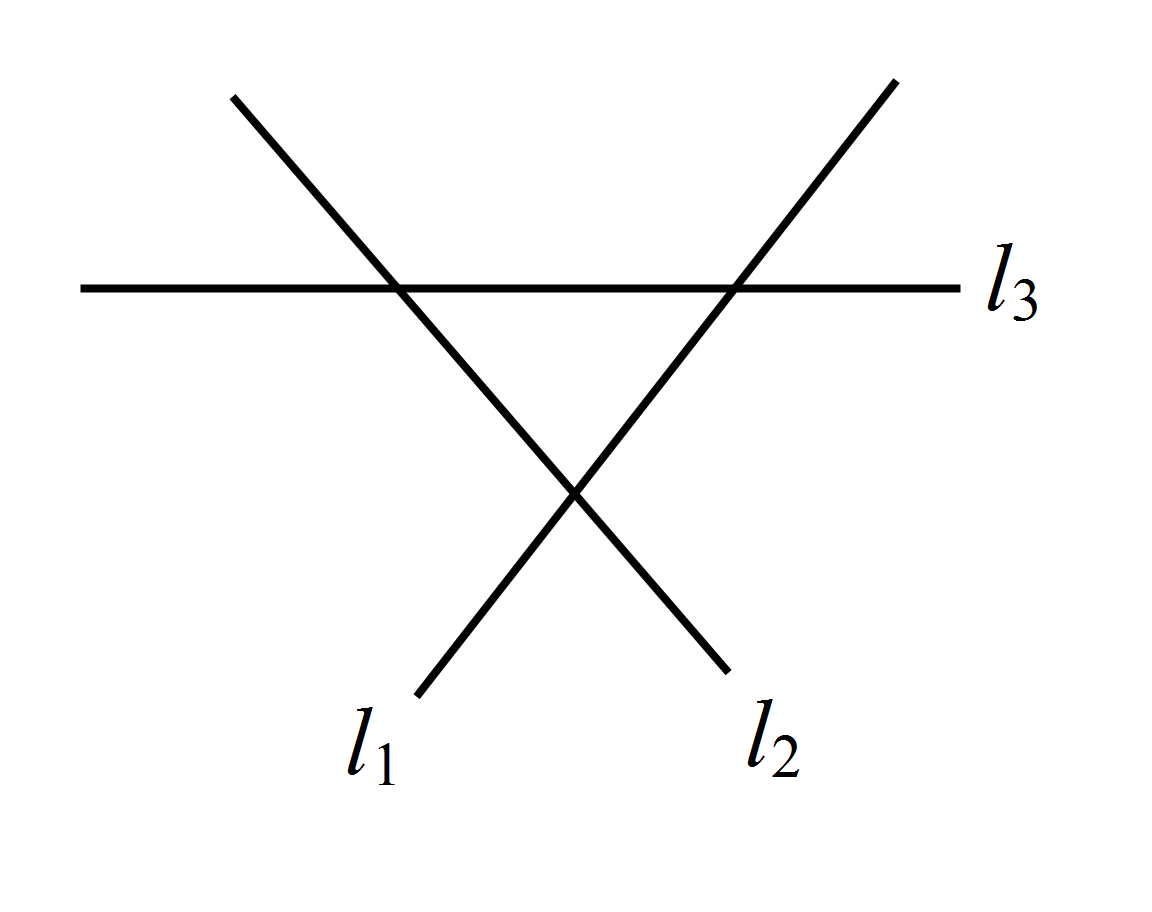
**【同步讲练】**

**一、选择题**

1. 若  内一点  到三角形三条边的距离相等，则  为   的交点．

A. 角平分线 B. 高线 C. 中线 D. 边的中垂线

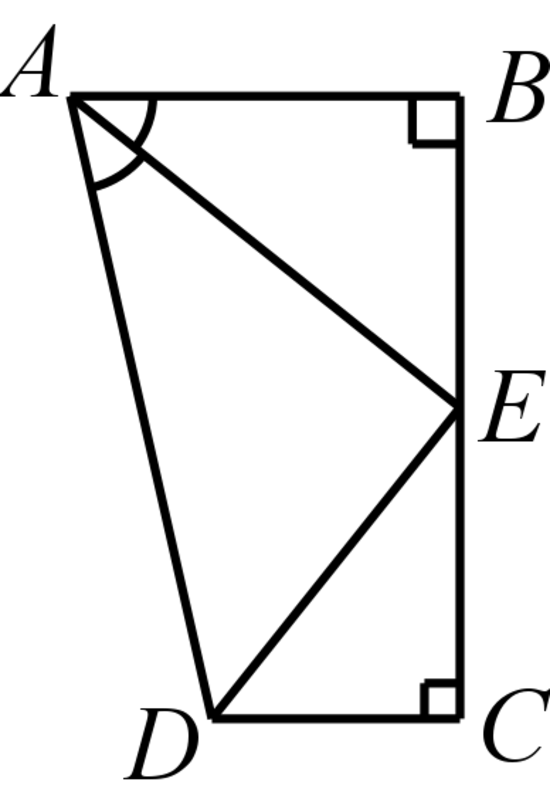
2. 如图，直线 ，， 表示三条互相交叉的公路，现在建一个货物中转站，要求到三条公路的距离相等，则可选择的地址有 



A. 一处 B. 两处 C. 三处 D. 四处

3. 如图，，， 平分 ， 平分 ，以下结论：① ；②点  是  的中点；③ ；④ ．其中正确的是 

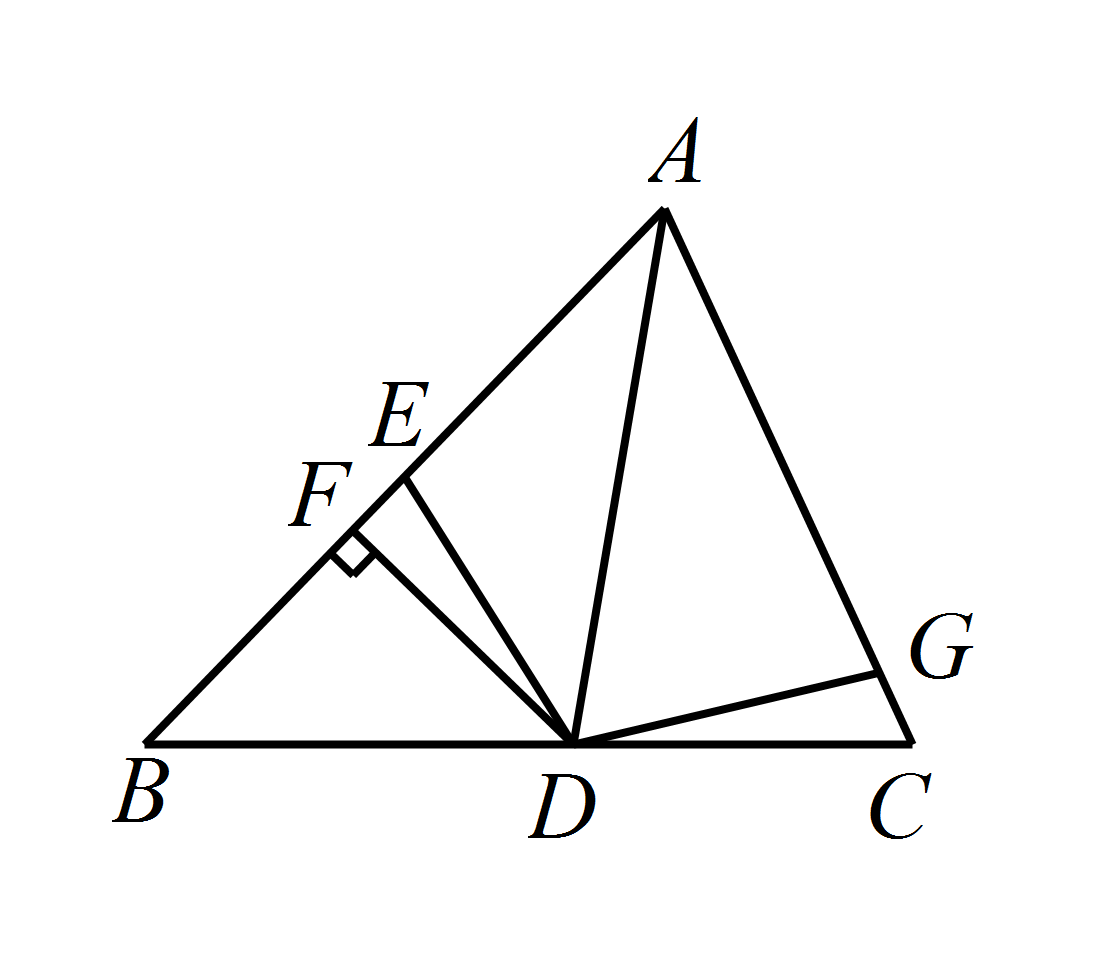
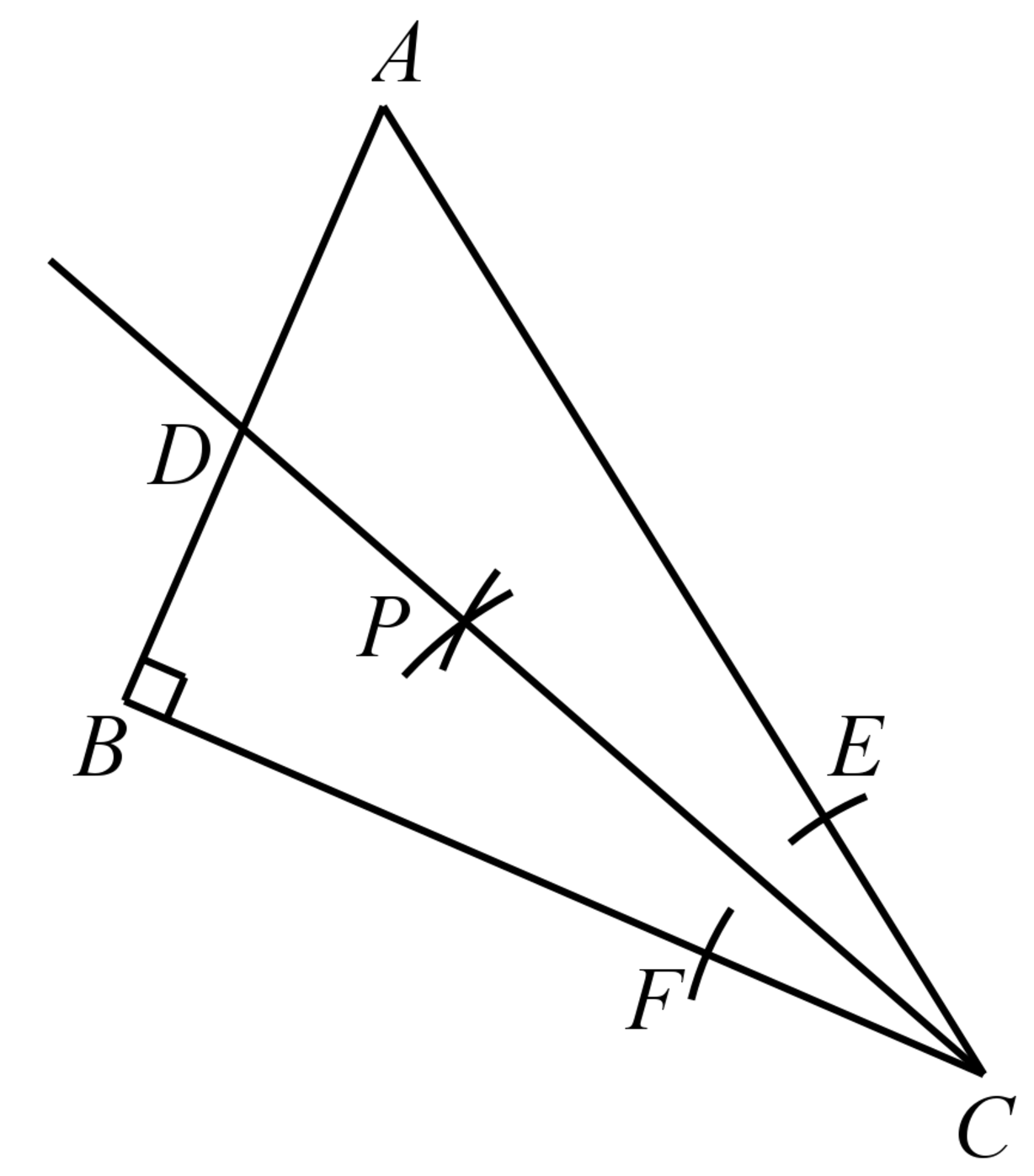
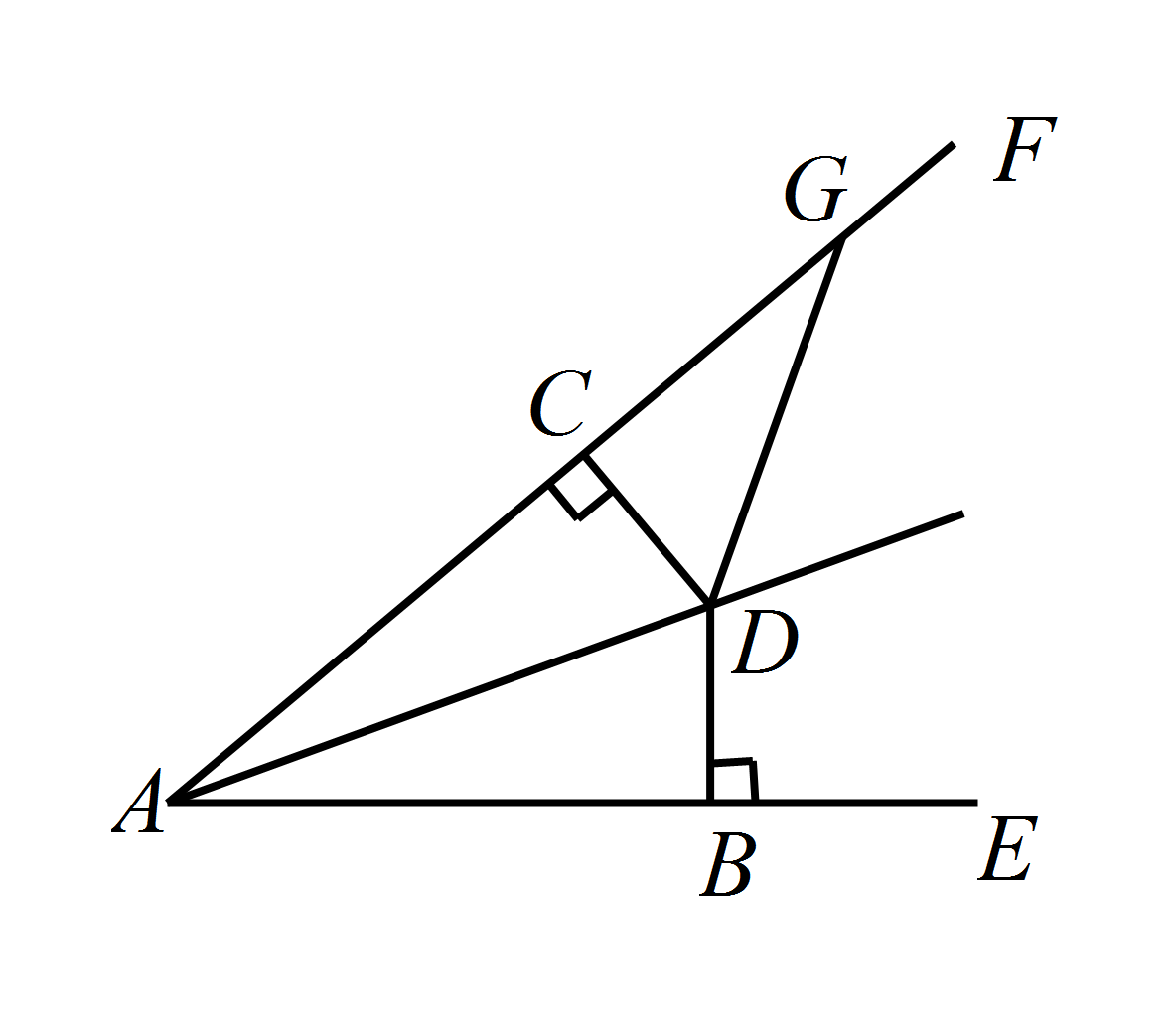
A. ①②③ B. ①②④ C. ①③④ D. ②③④



**二、填空题**

4. 已知一个三角形的周长为 ，且它的内角平分线的交点到一边的距离是 ，则这个三角形的面积是   ．

5. 如图， 是  的角平分线，，垂足为 ，， 和  的面积分别为  和 ，则  的面积为  ．

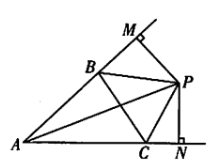
第5题图 第6题图 第7题图

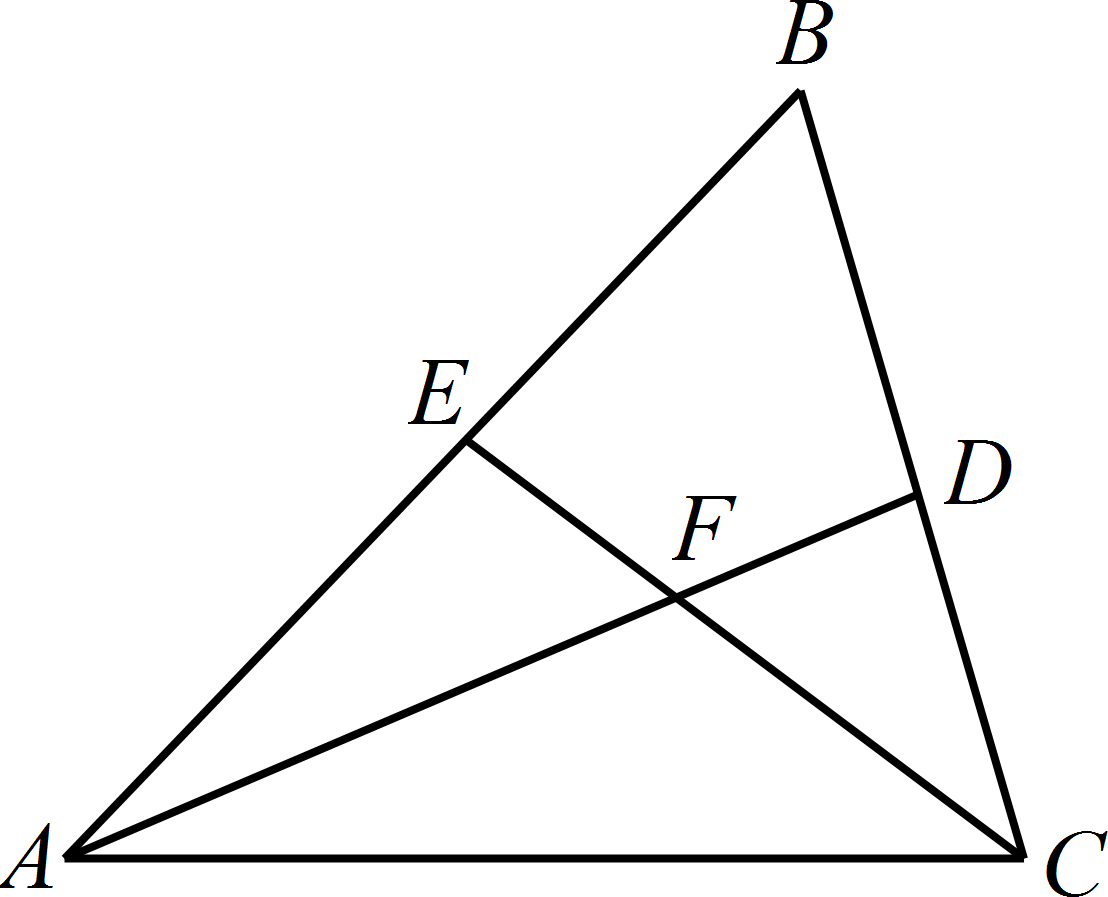
1. 如图，在  中，，以顶点  为圆心，适当长为半径画弧，分别交 ，

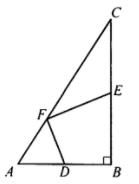
于点 ，，再分别以点 ， 为圆心，大于  的长为半径画弧，两弧交于点 ，作射线  交  于点 ，若 ，，则  的面积是  ．

7. 如图所示， 于点 ， 于点 ，且 ，，，则   ．

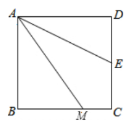
**三、解答题**

8. 已知：如图，， 分别是  的外角平分线， 于点 ， 于点 ．求证： 平分 ．

9. 如图，在  中，，， 分别是 ， 的平分线，， 相交于点 ．请写出  与  之间的数量关系，并证明．

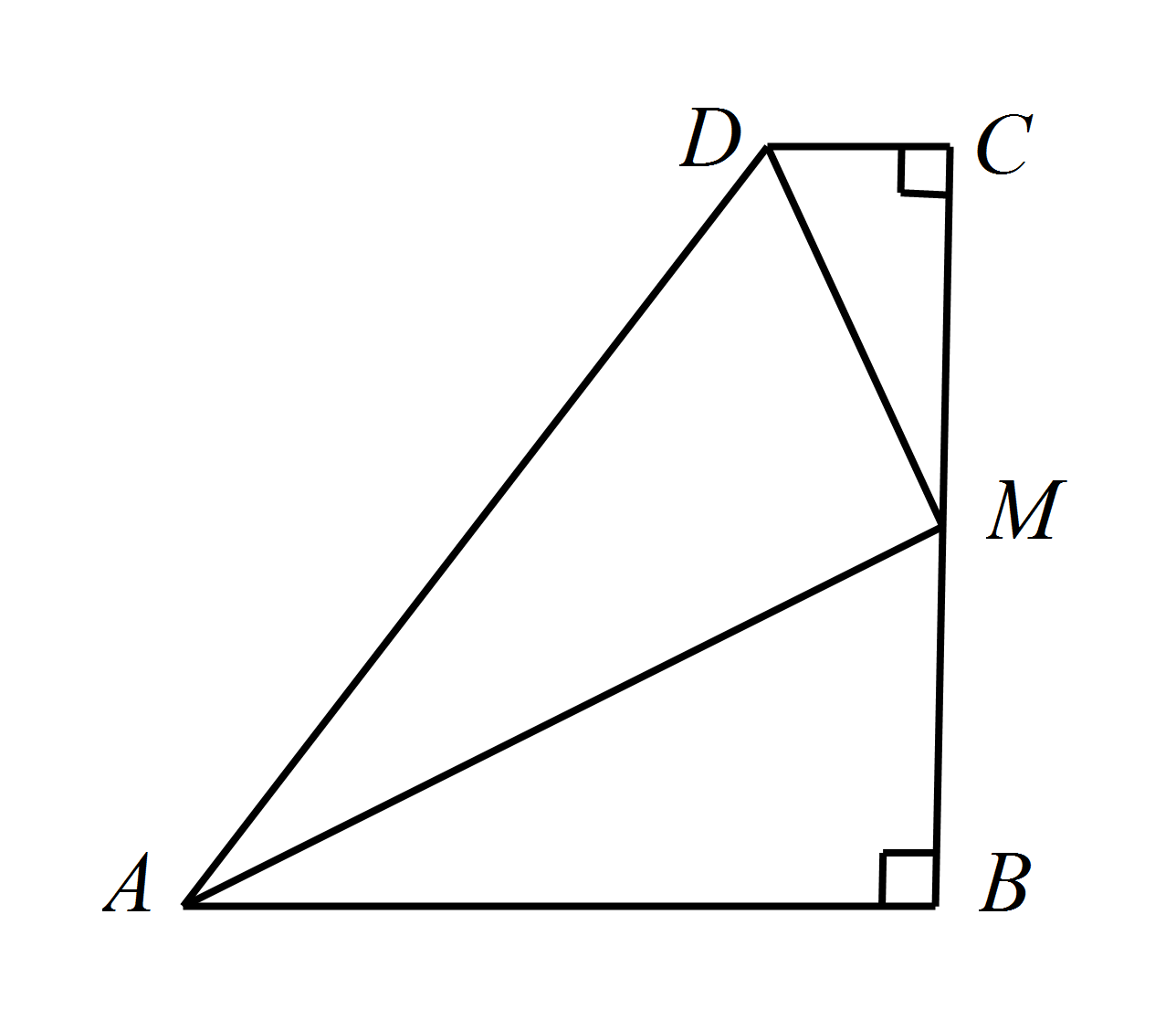
10. 已知：如图，在  中，， 是边  的中点，点 ， 分别在边 ， 上，且 ，．

求证：点  在  的平分线上．

11. 如图、四边形  是正方形， 是  边上的一点， 是  的中点， 平分 ．

（1）判断  与  的数量关系，并说明理由；

（2）求证：；

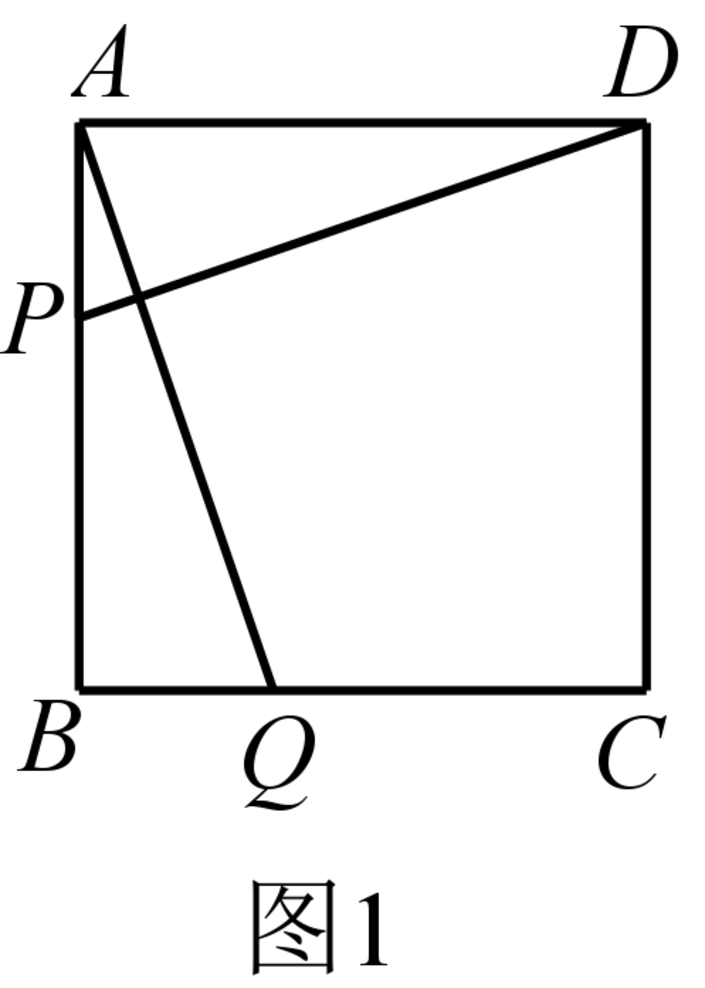
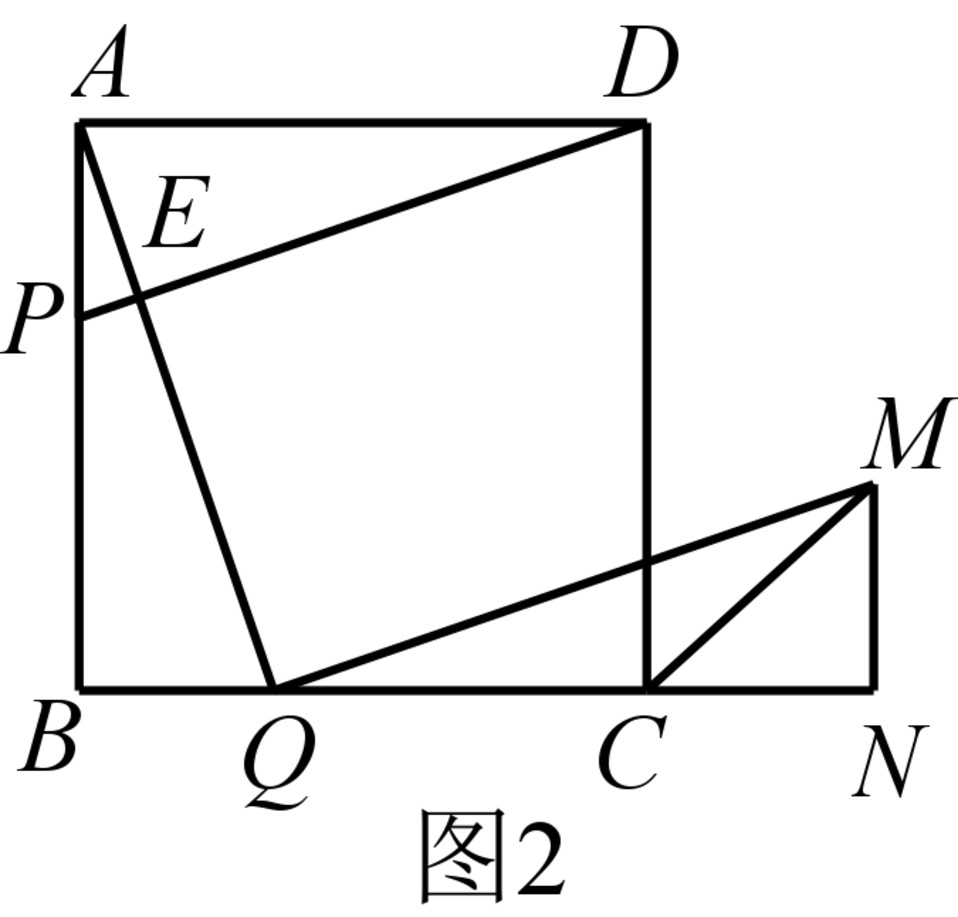
12. 如图，已知 ， 是  中点， 平分 ．求证： 平分 ．

13. 如图 ，在四边形  中，，，点  以  的速度自点  向终点  运动，点  同时以  的速度自点  向终点  运动，连接 ，，设运动时间为 ．

（1）当     时，点  到达点 ；

（2）求证：在运动过程中， 始终成立；

（3）如图 ，作 ，且 ，作  于点 ，连接 ，请问在  的运动过程中， 的度数是否改变?如果不变，请求出 ；如果改变，请说明理由．



13.1 轴对称 13.2 画轴对称图形

【学习任务】

1. 了解轴对称图形和图形成轴对称的意义，并会识别．
2. 掌握线段垂直平分线的判定和性质．
3. 能够作一个图形关于一条直线的轴对称图形．体会轴对称和线段垂直平分线的性质．
4. 在平面直角坐标系中，会求图形轴对称后的点坐标，能够用轴对称设计简单美观的图案．

5、感受轴对称的美，感受数学的美．

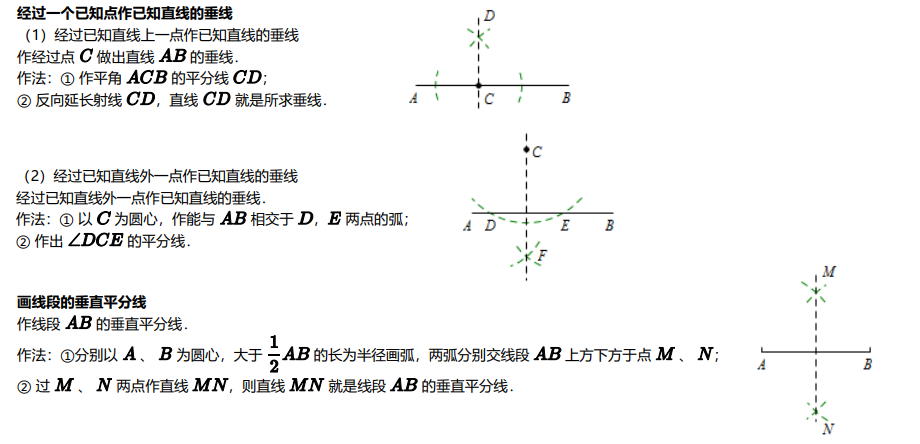
【知识梳理】

**轴对称图形：**如果一个图形沿一条直线[折叠](https://baike.baidu.com/item/%E6%8A%98%E5%8F%A0/485943" \t "https://baike.baidu.com/item/%E8%BD%B4%E5%AF%B9%E7%A7%B0%E5%9B%BE%E5%BD%A2/_blank)，直线两旁的部分能够完全重合，这个图形就叫做轴对称图形。这条直线叫做对称轴。这时就说这个图形关于这条直线对称。

**轴对称：**把一个图形沿着某一条直线折叠，如果它能够与另一个图形重合，那么就说这两个图形关于这条直线对称，称这两个图形成轴对称。

垂直平分线：经过线段中点，并且垂直于这条线段的直线，叫做这条线段的垂直平分线（中垂线）

**垂直平分线的尺规作图：**



**线段的垂直平分线的性质定理：**线段的垂直平分线上的点，到这条线段两个端点的距离相等。

**线段的垂直平分线的性质定理的逆定理：**到这条线段两个端点的距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上。

轴对称的基本性质：

1. 轴对称图形的对称轴是任何一对对应点所连线段的垂直平分线。
2. 如果两个图形关于某条直线对称，那么对称轴是任何一对对应点连线段的垂直平分线。

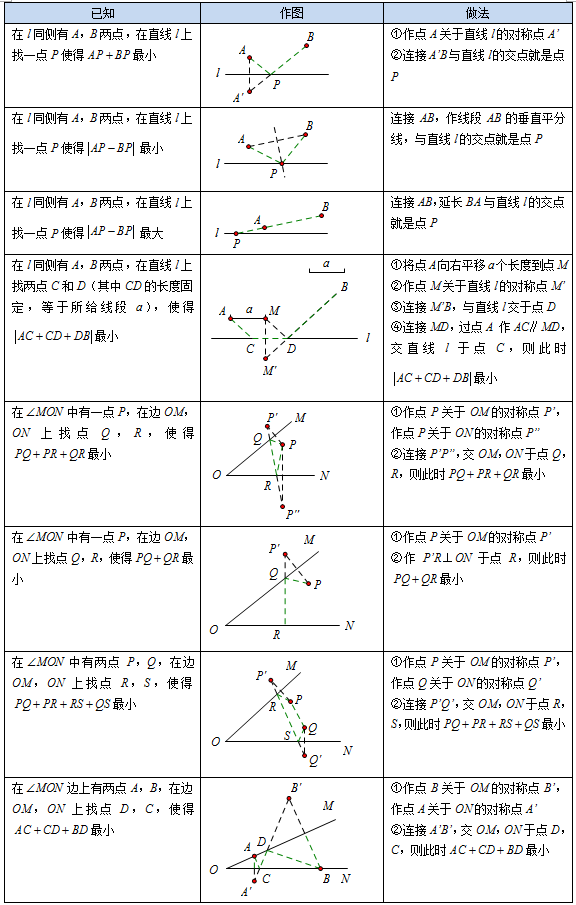
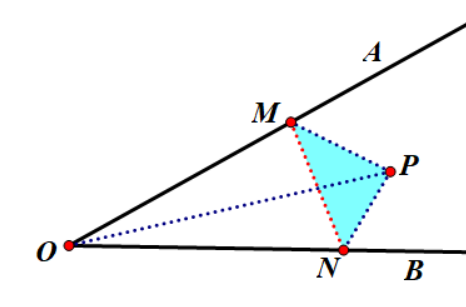
**画轴对称图形或成轴对称的两个图形的对称轴**① 找出轴对称图形的任意一对对称点； ② 连接这对对称点；

③ 画出对称点所连线段的垂直平分线．​这条垂直平分线就是该轴对称图形的对称轴．

**作轴对称图形的一般步骤​**  
（1）作某点关于某直线的对称点的一般步骤：  
①过已知点作已知直线（对称轴）的垂线，标出垂足；②在这条直线的另一侧从垂足出发截取与已知点到垂足的距离相等的线段，那么截点就是这点关于该直线的对称点．  
（2）作已知图形关于某直线的对称图形的一般步骤：  
①作出图形的关键点关于这条直线的对称点：

②把这些对称点顺次连接起来，就形成了符合条件的对称图形．

**最短路径——将军饮马及其变形（两点之间，线段最短）**



例题：∠AOB=α，P为∠AOB内一点，M、N分别为射线OA、OB上的动点，OP=6，△PMN周长最小值为6，求α

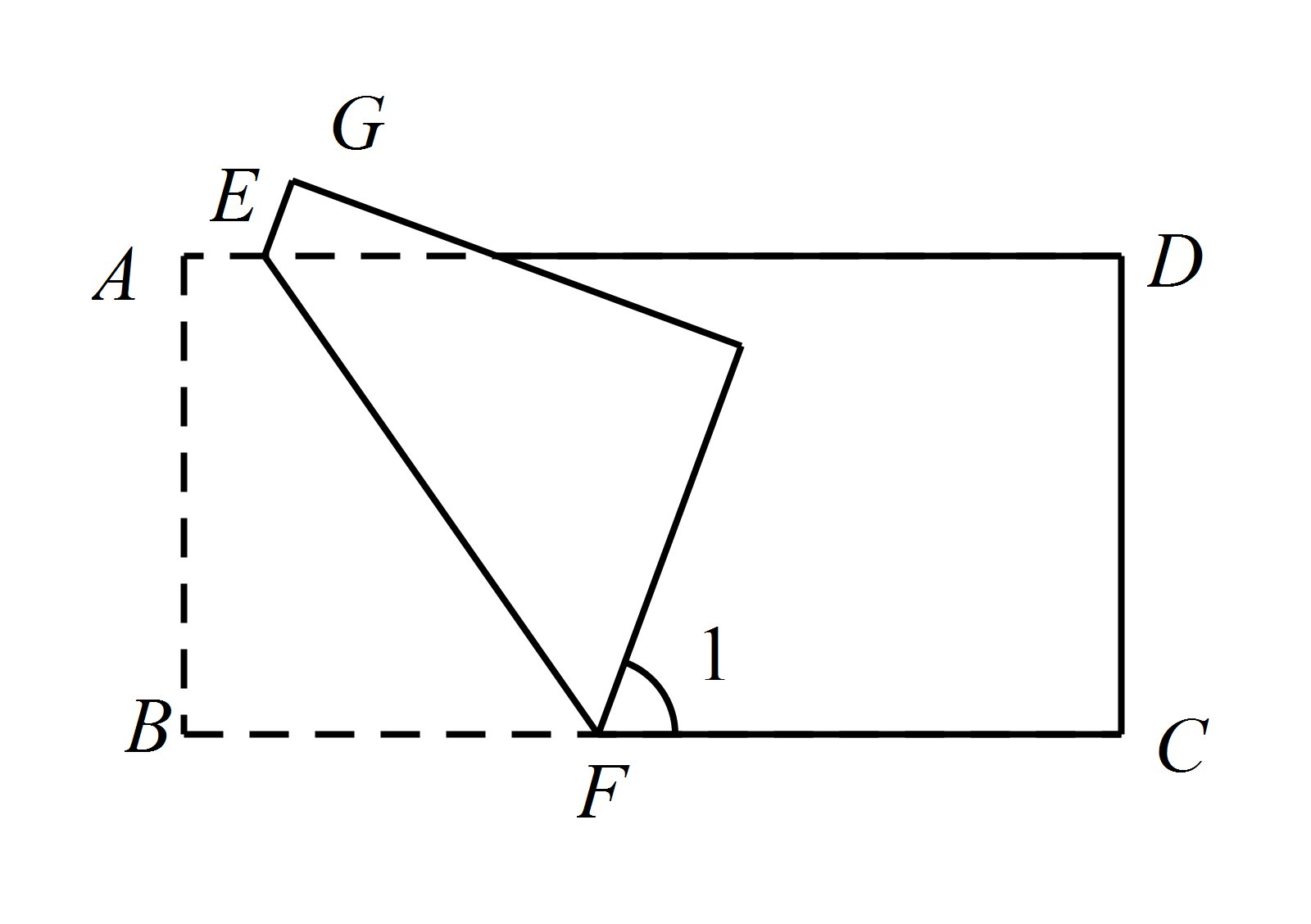
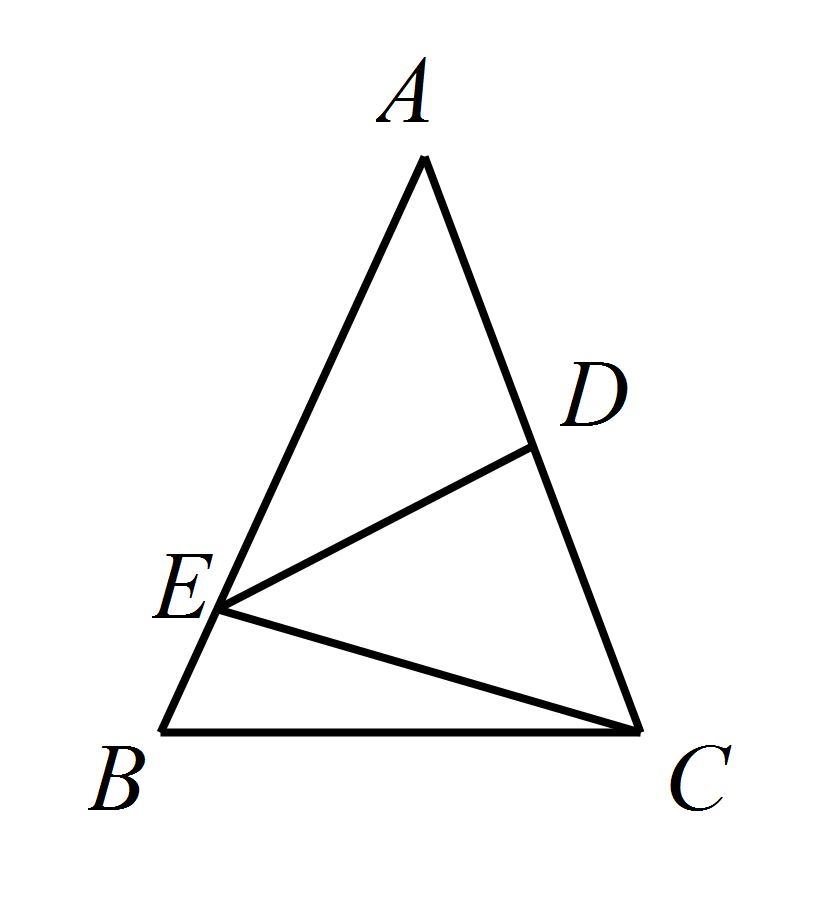
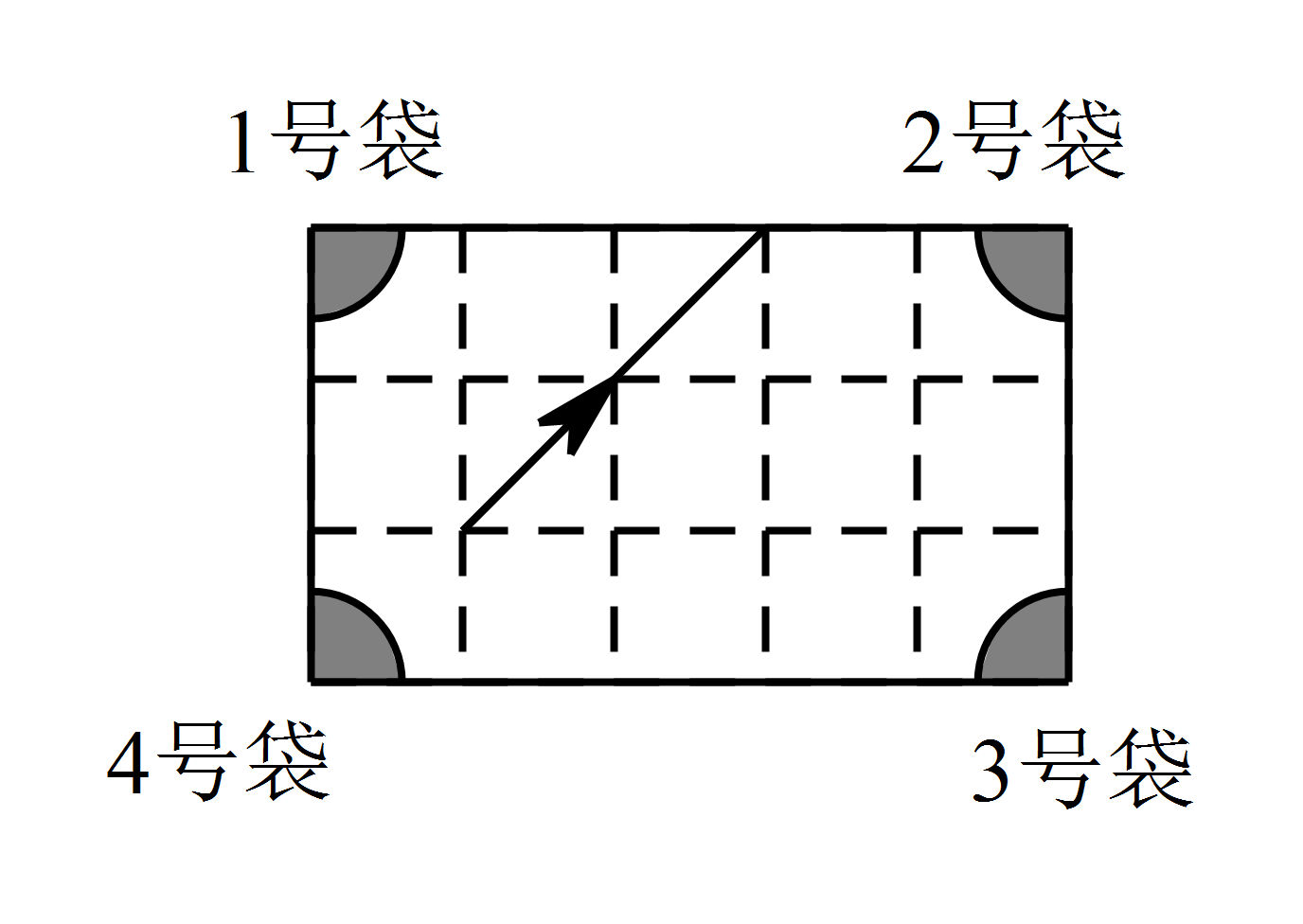
【同步讲练】

**一、选择题**

1. 如图，把长方形  沿  折叠后使两部分重合，若 ，则  等于 

A.  B.  C.  D. 

第1题图 第2题图 第4题图 第5题图



2. 如图： 是  中  边的垂直平分线，若  厘米， 厘米，则  的周长为  厘米．

A.  B.  C.  D. 

3. 下列各点中，到三角形各顶点的距离相等的是 

A. 三个内角平分线的交点 B. 三条边的垂直平分线的交点

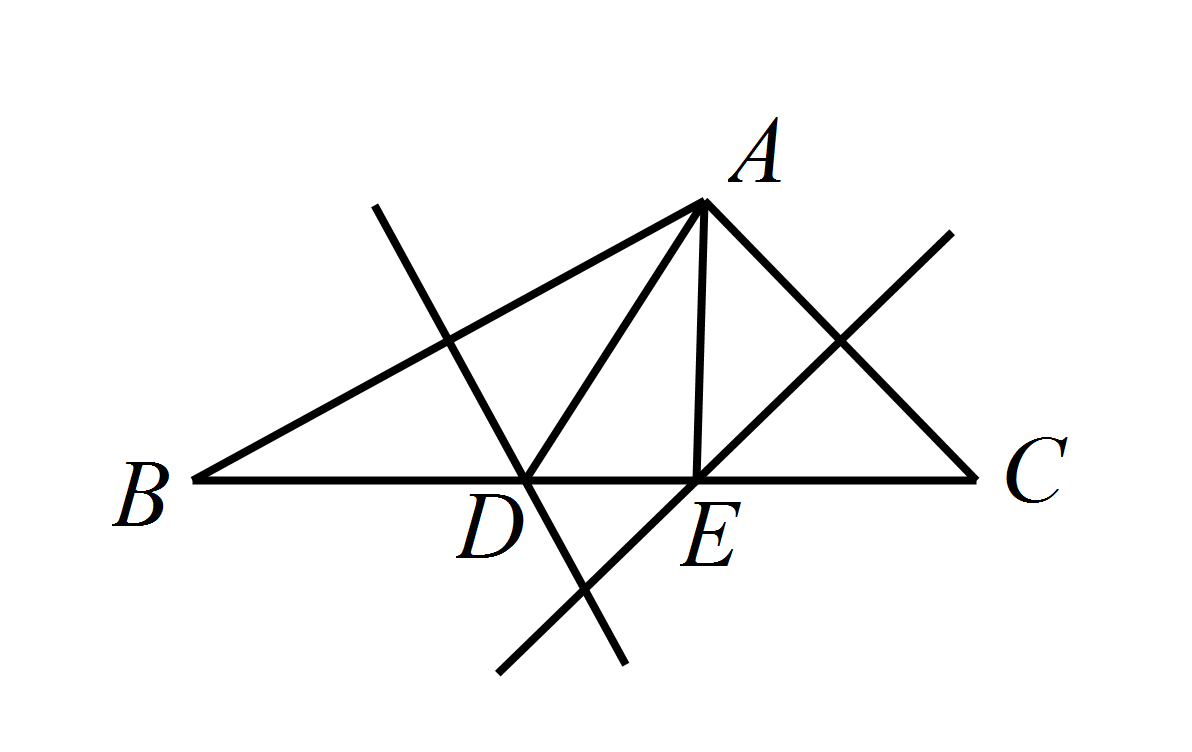
C. 三条中线的交点 D. 三条高线的交点

4. 小明从镜子中看到身后电子钟的示数如图所示，则此时的时间应是 

A.  B.  C.  D. 

5. 如图是一个经过改造的台球桌面示意图，图中四个角上的阴影部分分别表示四个入球孔．如果一个球按图中所示的方向被击出（球可以经过多次反射），那么该球最后将落入的球袋是 

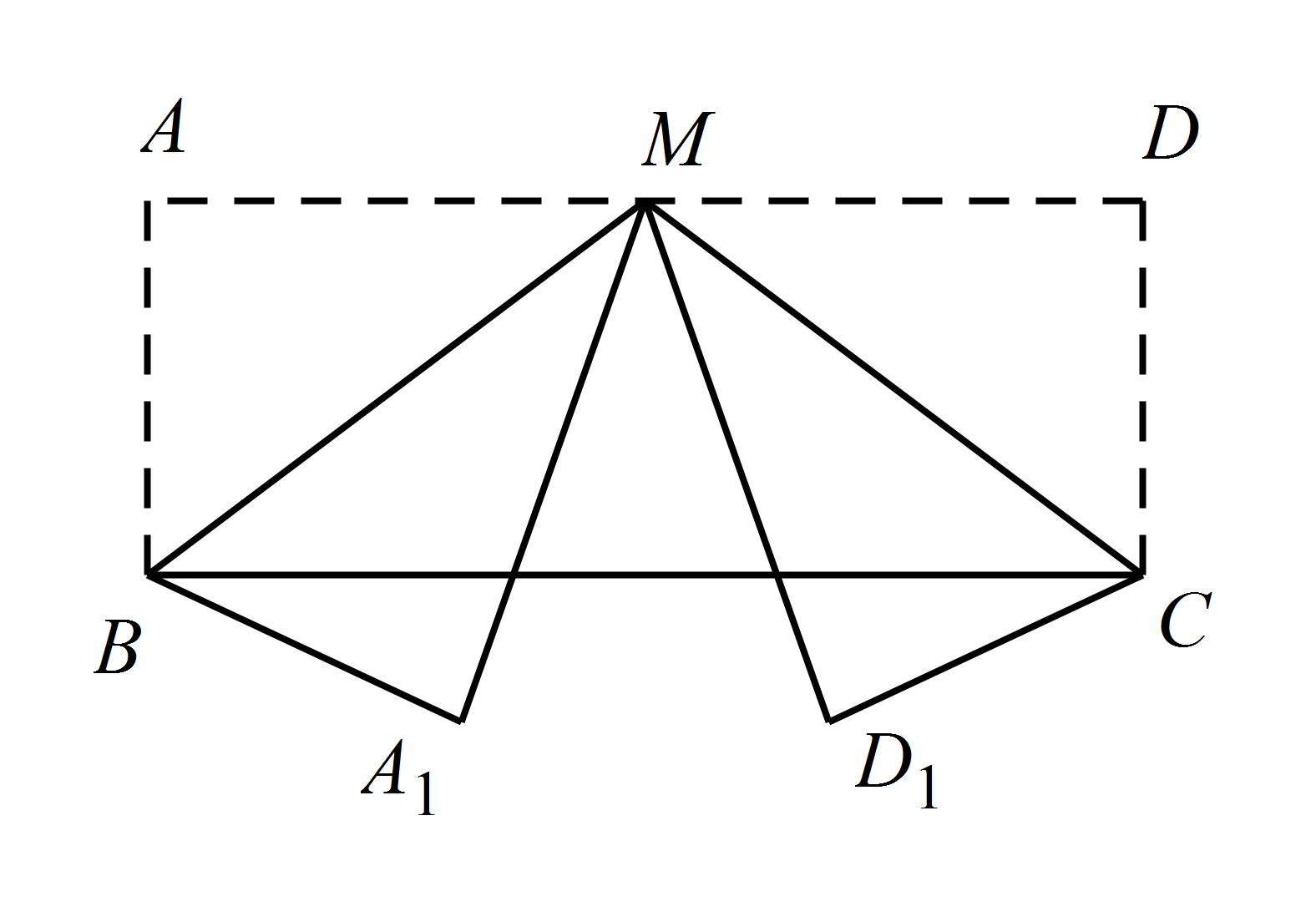
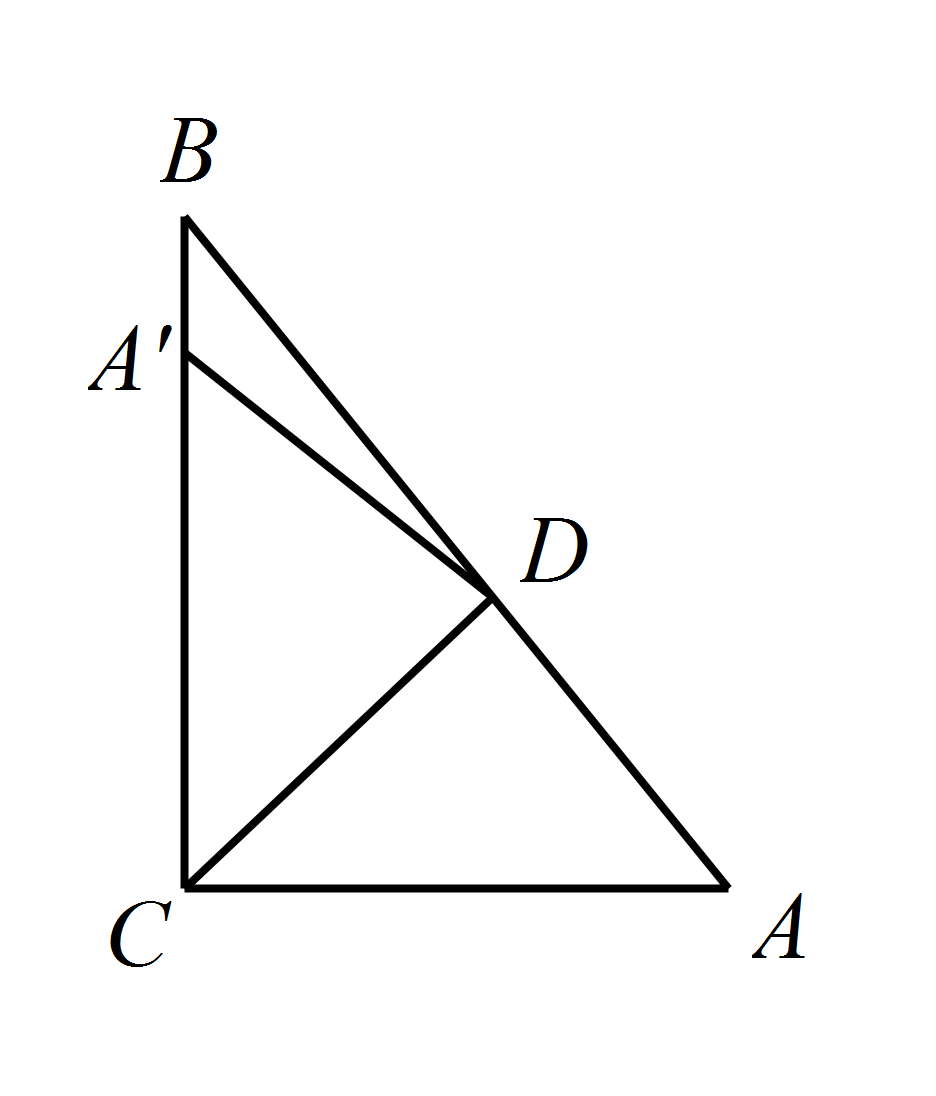
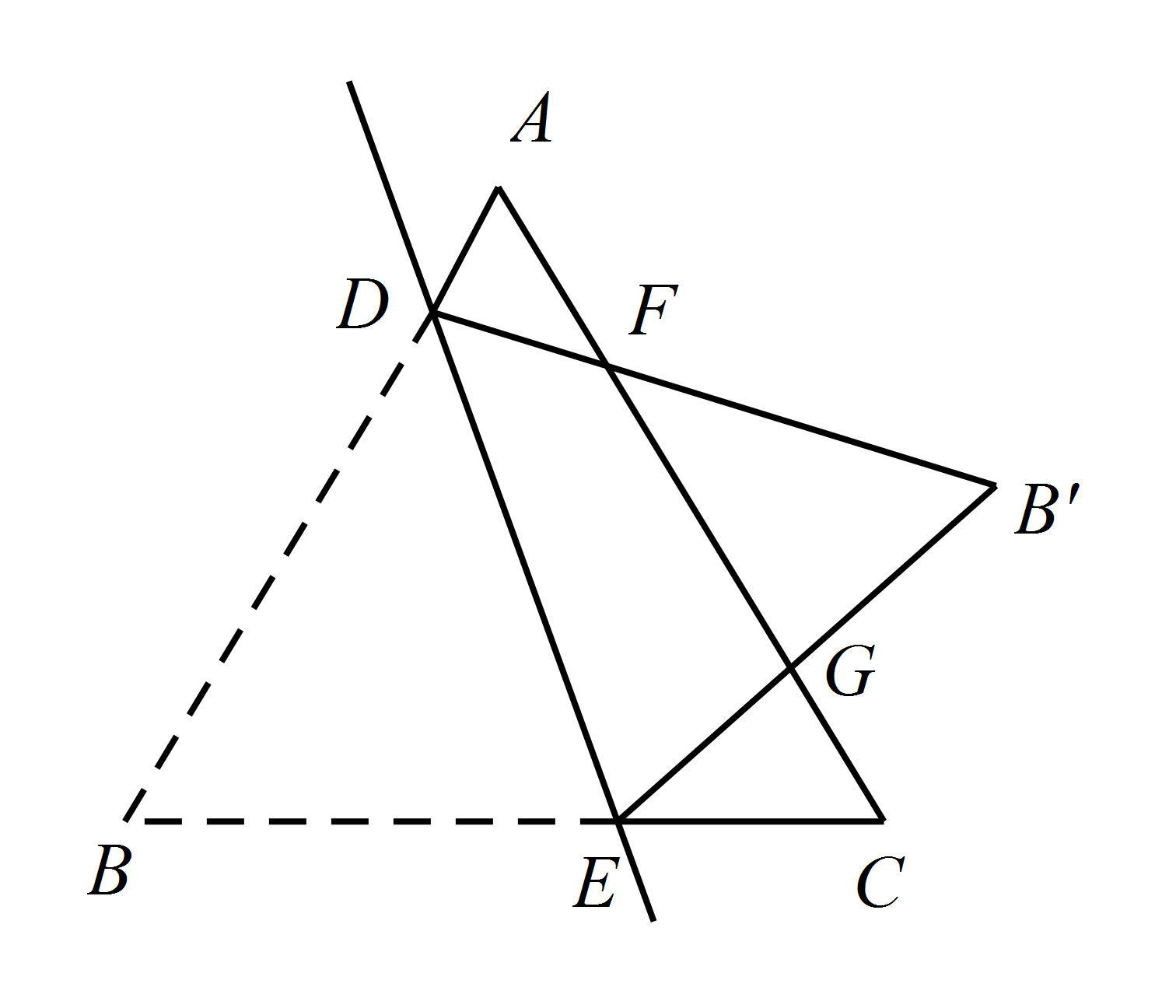
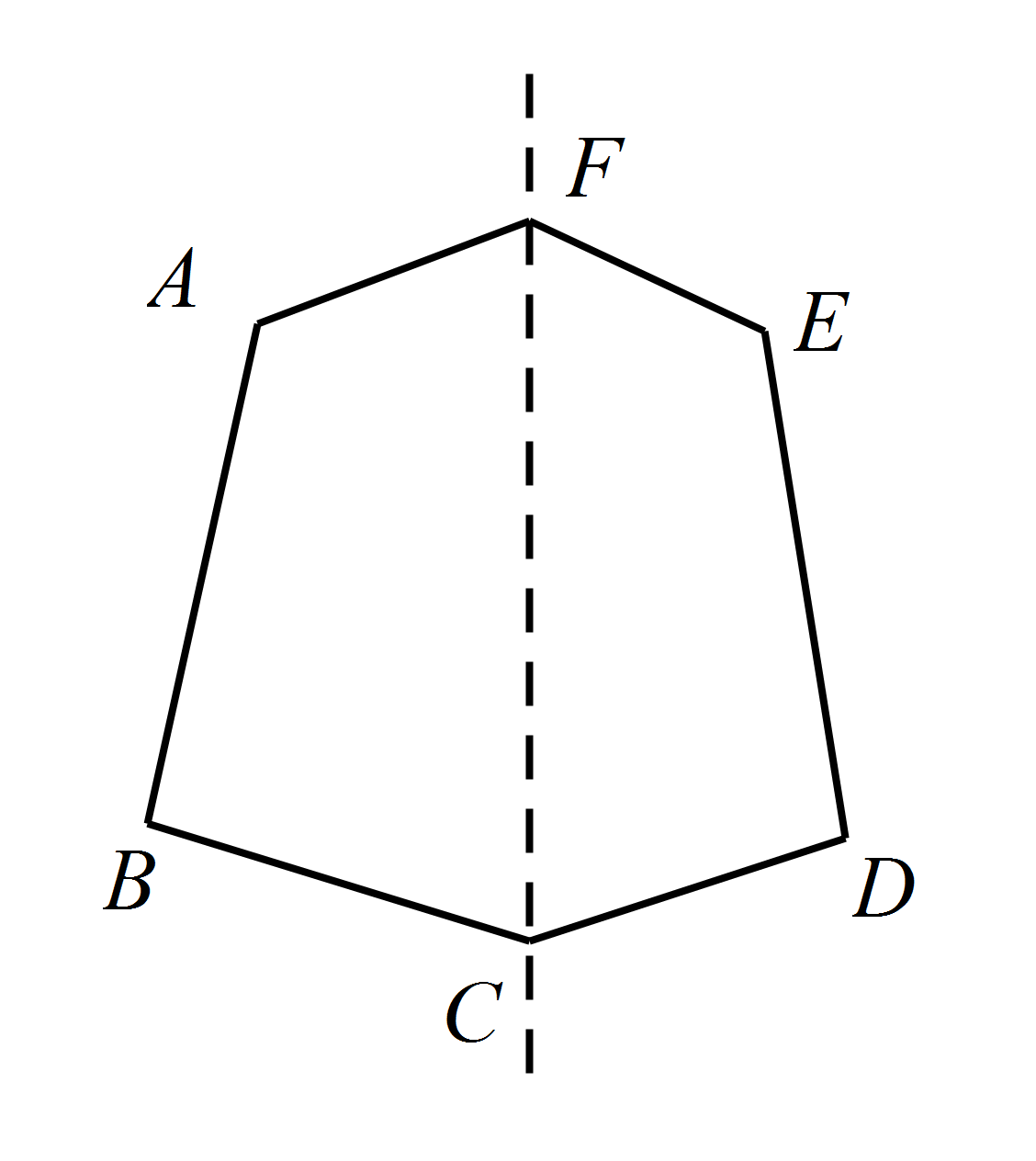
A. 一号袋 B. 二号袋 C. 三号袋 D. 四号袋

6. 如图，在  中，， 的中垂线交  于点 ， 的中垂线交  于点 ，则  的周长等于 

A.  B.  C.  D. 

**二、填空题**

7. 如图所示，六边形  是轴对称图形， 所在的直线是它的对称轴．若 ，则   ．



第7题图 第8题图 第9题图 第10题图

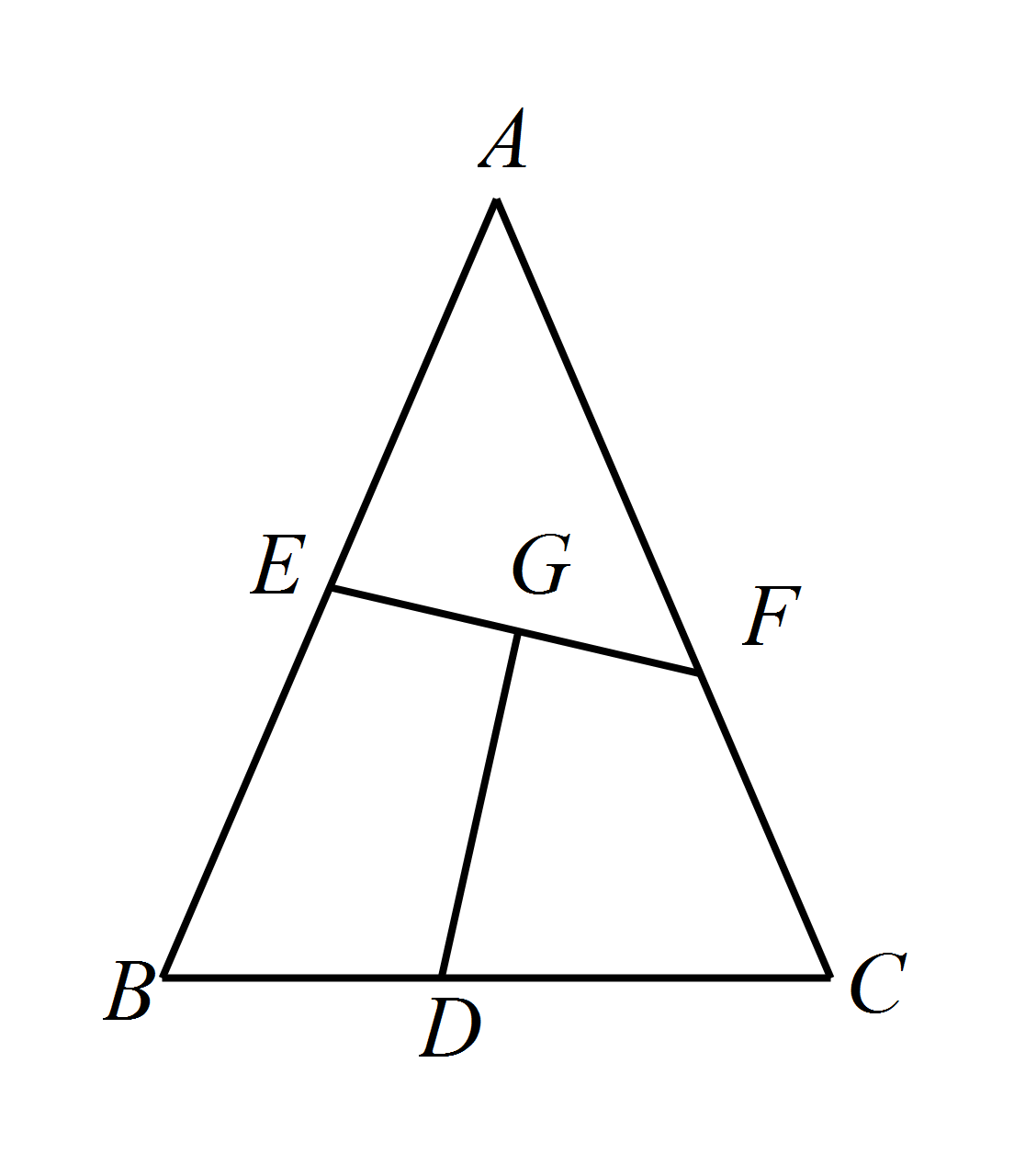
8. 在等边  中，点 ， 分别在边 ， 上，把  沿直线  翻折，使点  落在点  处，， 分别交边  于点 ，．若 ，则   ．

9. 如图所示，在   中，，，将其折叠，使点  落在边  上  处，折痕为 ，则  为  ．

10. 如图所示， 为矩形纸片  的边  的中点，将纸片沿 ， 折叠，使点  落在点  处，点  落在点  处．若 ，则   ．

**三、解答题**

11. 如图，在  中， ，点 ，， 分别在三边上，且 ，， 为  的中点.求证： 垂直平分  .

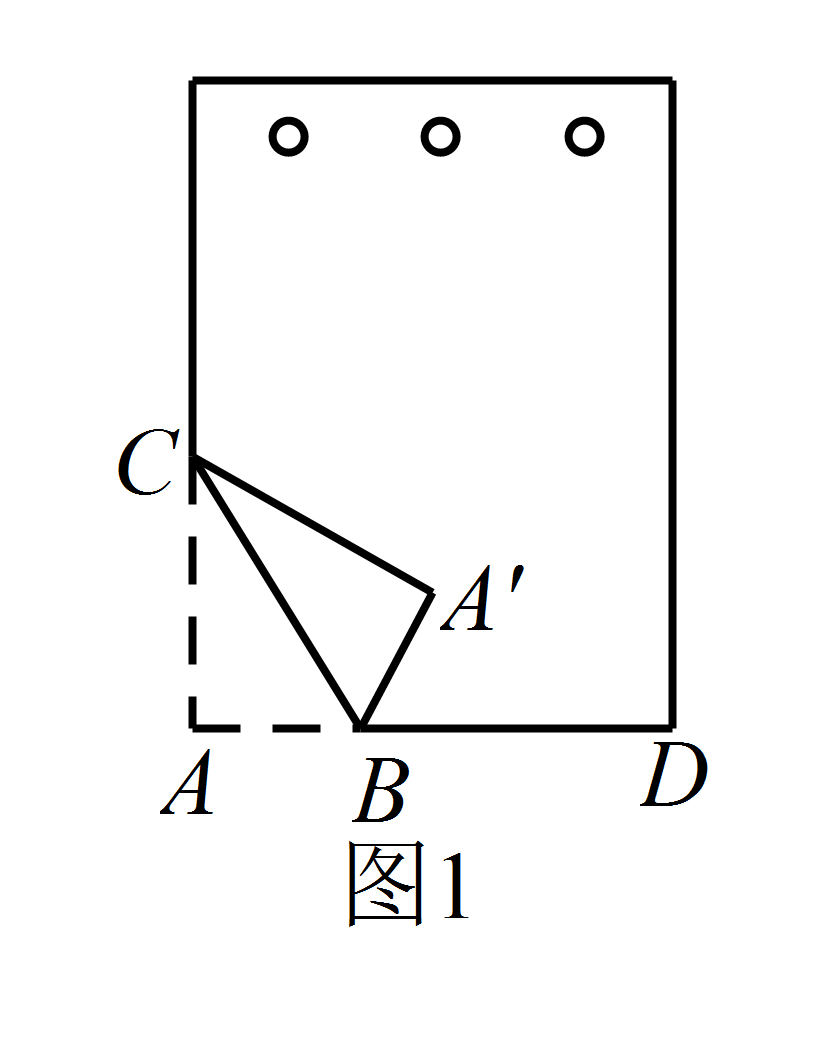
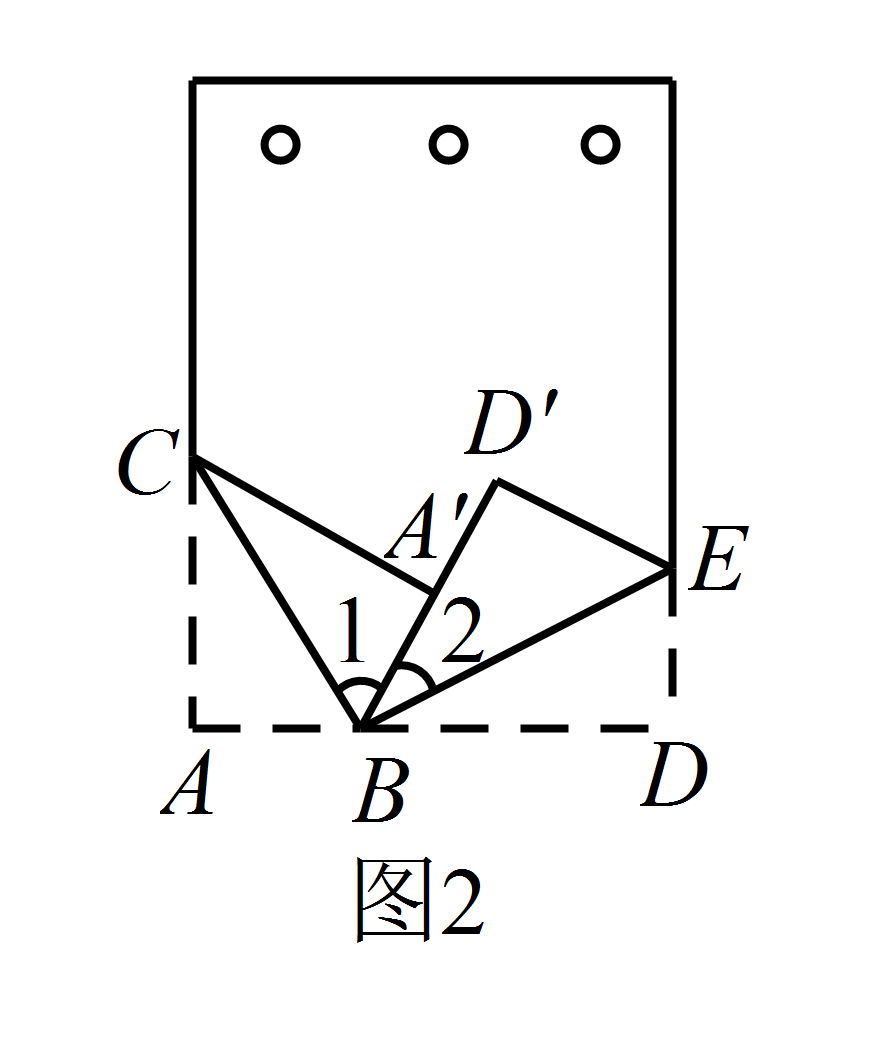


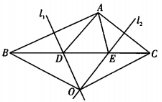
12. 我们已学习了角平分线的概念，那么你会用他们解决有关问题吗?

（1）如图  所示，将长方形笔记本活页纸片的一角折过去，使角的顶点  落在  处， 为折痕．若 ，求  的度数．

（2）在（）条件下，如果又将它的另一个角也斜折过去，并使  边与  重合，折痕为 ，如图  所示，求  和  的度数．

（3）如果在图  中改变  的大小，则  的位置也随之改变，那么（）中  的大小会不会改变?请说明．

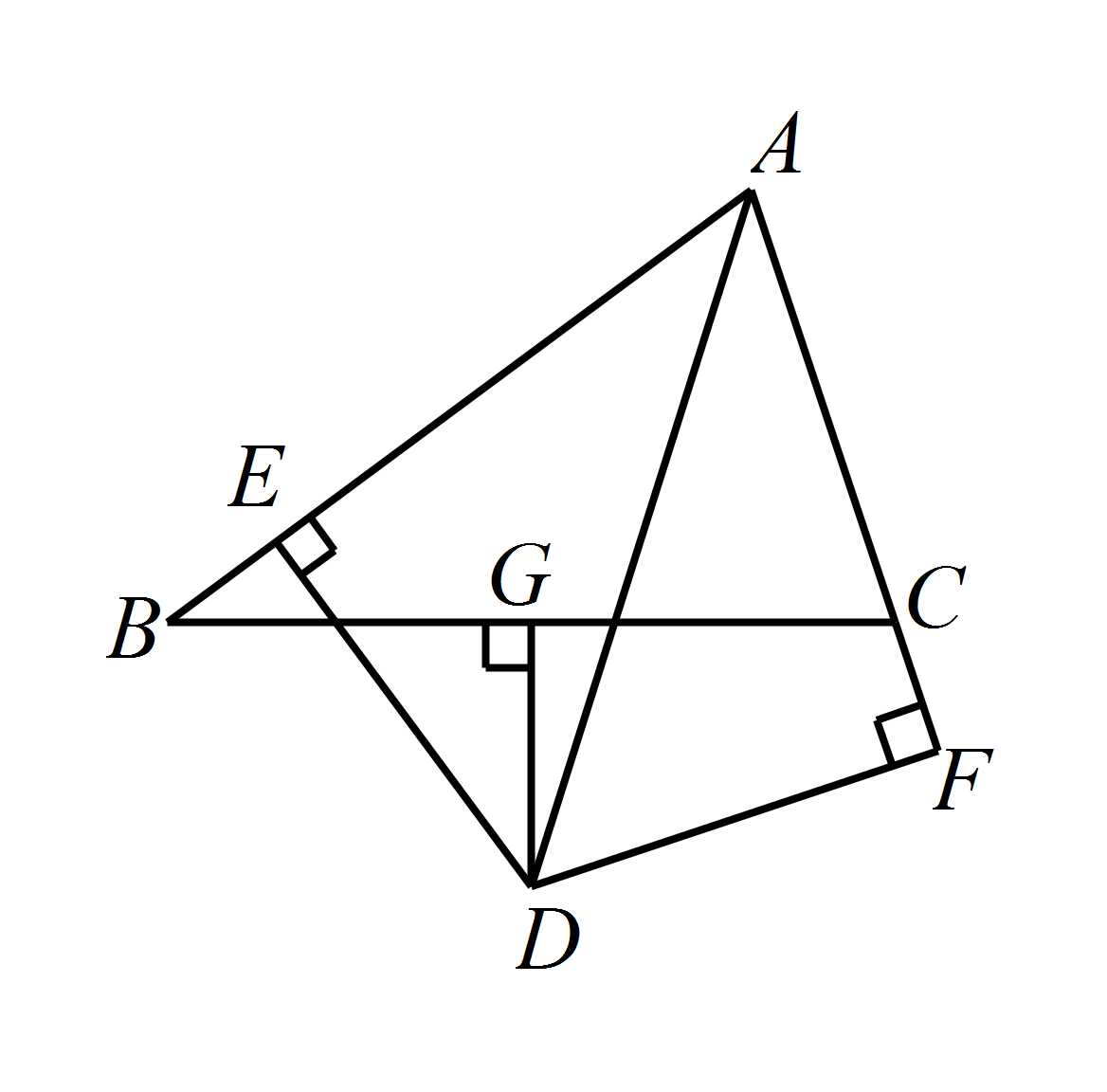


13. 如图，在  中， 边的垂直平分线  交  于点 ， 边的垂直平分线  交  于点 ， 与  相交于点 ，连接 ，，若  的周长为 ， 的周长为 ．

（1）求线段  的长；

（2）连接 ，求线段  的长；

（3）若 ，直接写出  的度数．

14. 如图， 中， 平分 ， 且平分 ， 于 ， 于 ．

（1）说明  的理由；

（2）如果 ，，求 ， 的长．

13.3 等腰三角形

【学习任务】

1. 了解等腰三角形和等边三角形的概念．
2. 掌握等腰三角形和等边三角形的性质定理和判定定理，掌握含30°角的直角三角形的性质．
3. 能够进行轴对称作图，找到满足路径最短的点．

4、能够运用轴对称作图来解决选址问题，及路径最短问题．

【知识梳理】

等腰三角形 有两条边相等的三角形叫做等腰三角形（isosceles triangle）．相等的两边都叫做腰，另一边叫做底边，两腰的夹角叫做顶角，腰和底边的夹角叫做底角．

等腰三角形的判定 如果一个三角形有两个角相等，那么这两个角所对的边也相等（简写成“等角对等边”）．

等腰三角形的性质 ① 等腰三角形的两个底角相等； ② 等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高相互重合（简写成“三线合一”）．

等边三角形：三条边都相等的三角形角等边三角形。

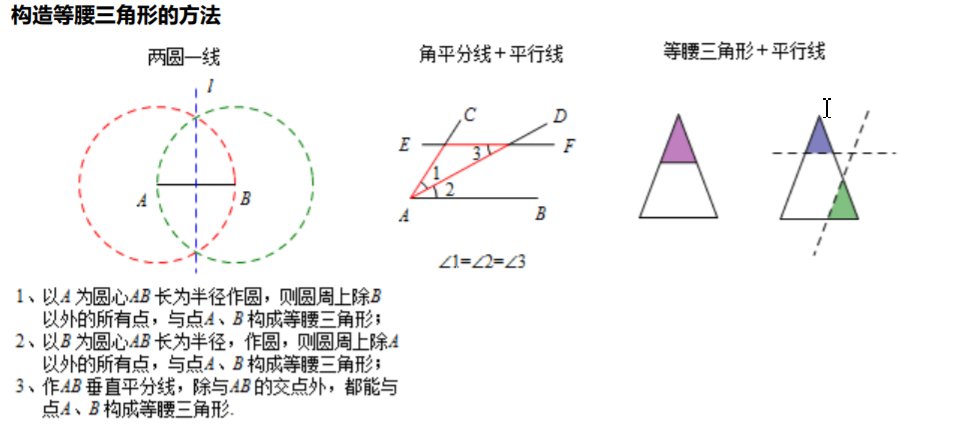
等边三角形的性质：等边三角形具有等腰三角形的所有性质，其中不同的是等边三角形的三个内角都相等，都等于60°.

等边三角形的判定：

1. 定义法：证明三条边相等。
2. 等角法：有2个角等于60°的三角形是等边三角形。
3. 等腰法：有一个角等于60°的等腰三角形是等边三角形。

含30°角的直角三角形

在直角三角形中，如果有一个锐角等于30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半。

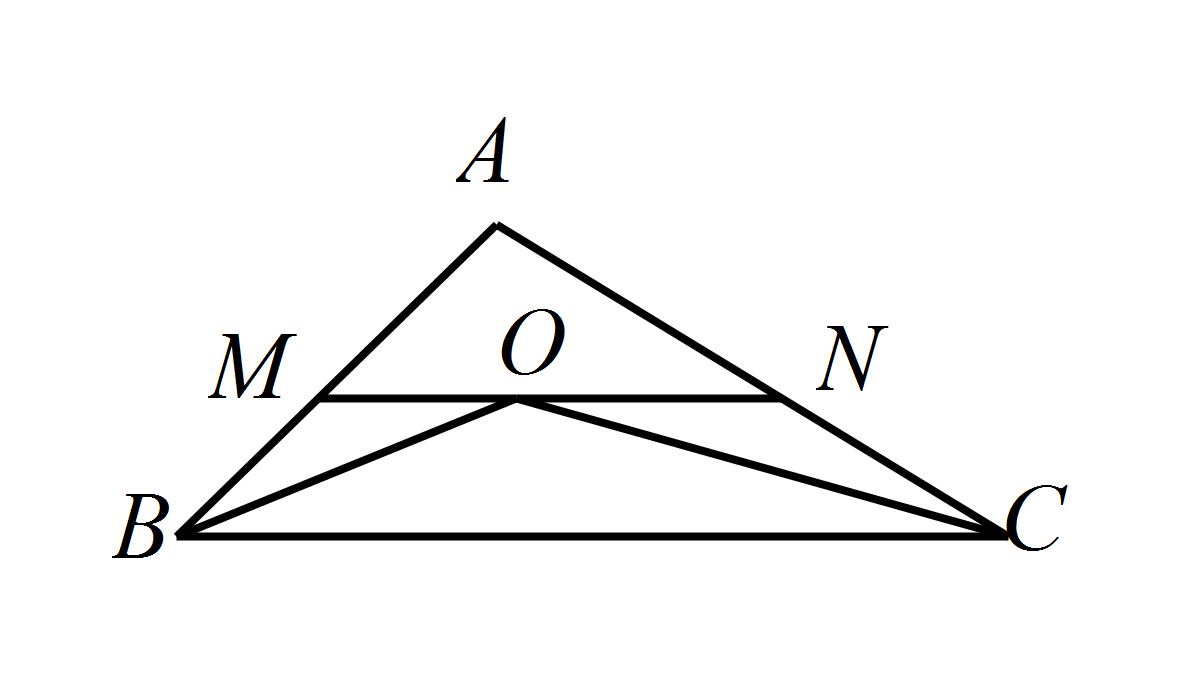
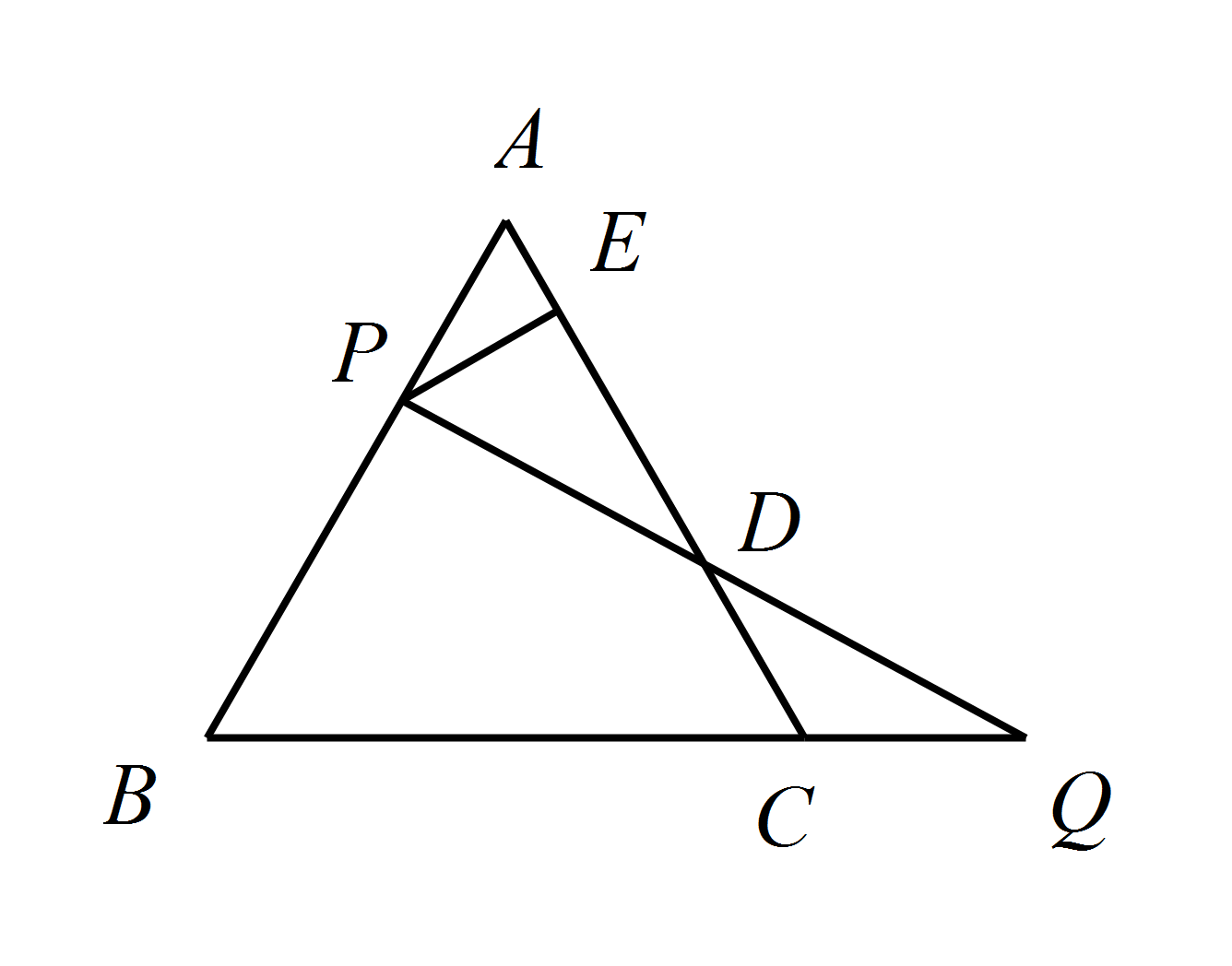
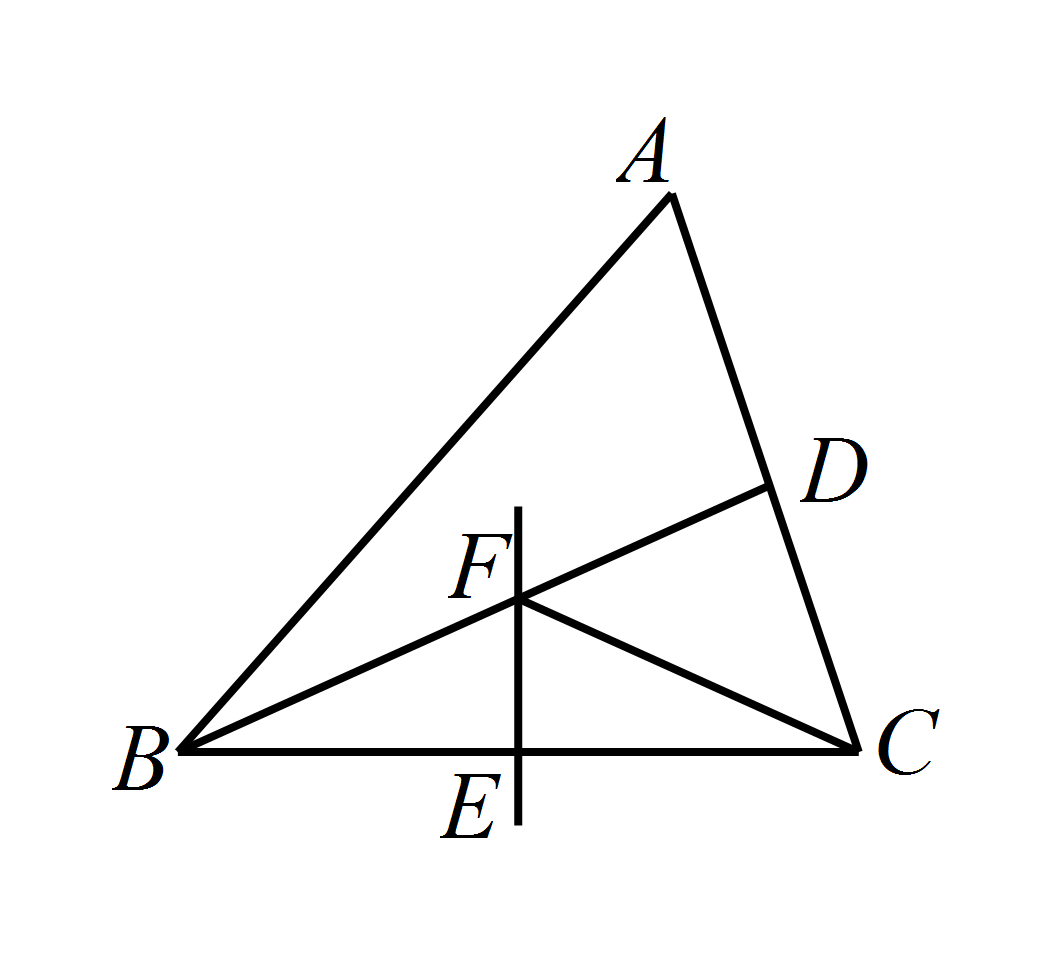


**【同步讲练】**

**一、选择题**

1. 如图， 中， 平分 ， 的中垂线交  于点 ，交  于点 ，连接 ．若 ，，则  的度数为 

A.  B.  C.  D. 



第1题图 第2题图 第3题图

2. 如图，过边长为  的等边  的边  上一点 ，作  于点 ， 为  延长线上一点，当  时，连  交  边于点 ，则  的长为 

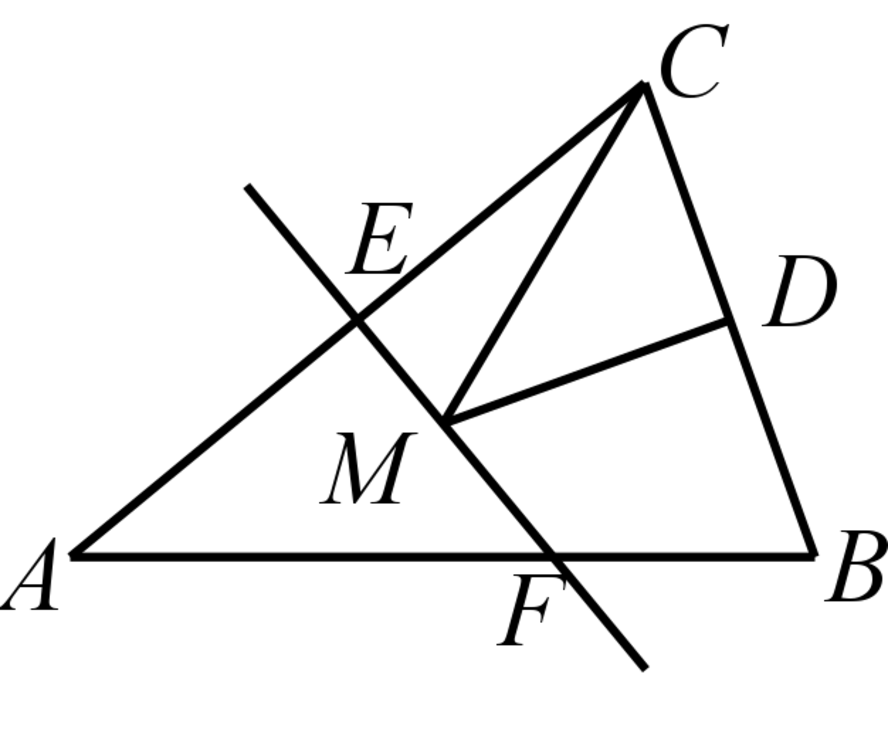
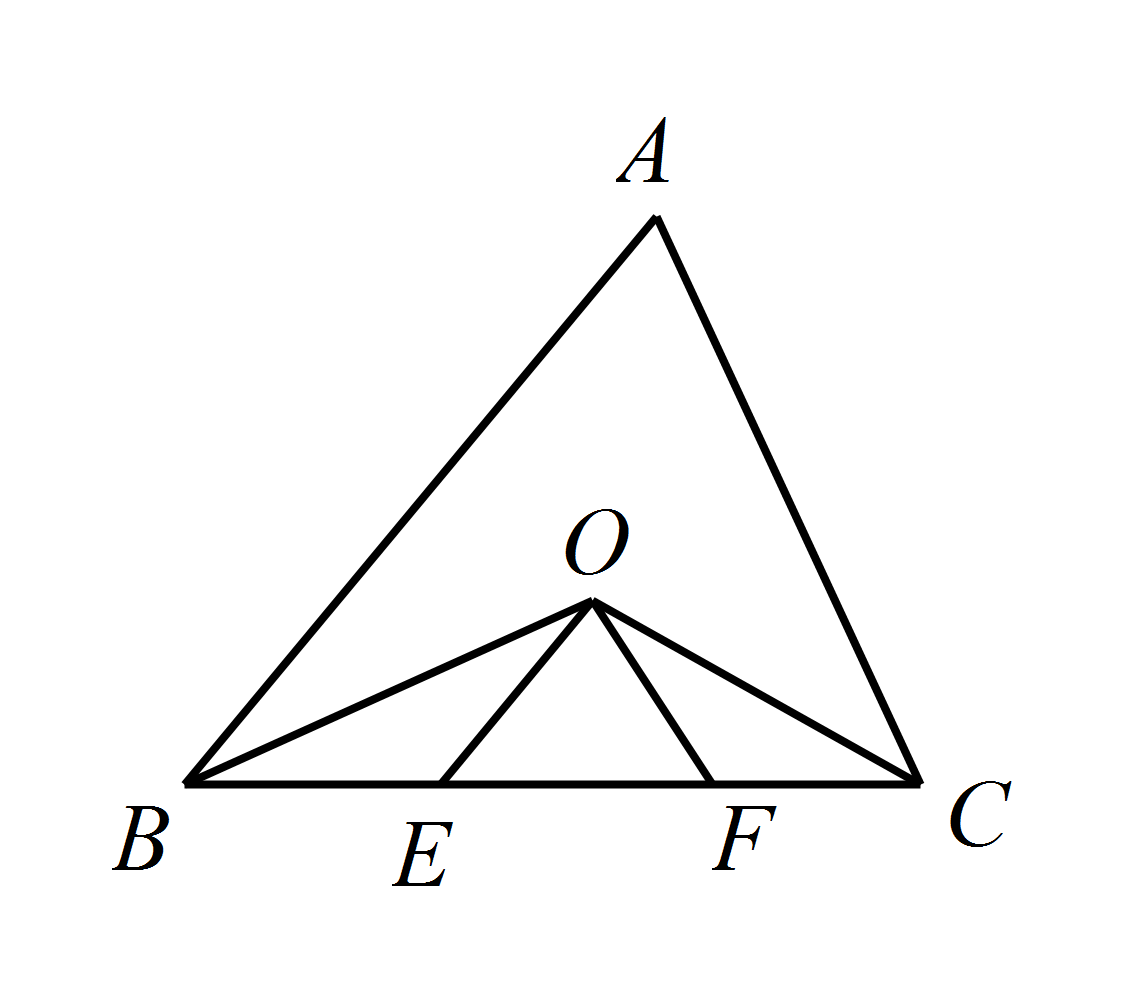
A.  B.  C.  D. 不能确定

3. 如图， 中，， 的平分线交于点 ，过  点作  分别交 ， 于 ， 两点，，，，则  的周长是 

A.  B.  C.  D. 

4. 如图， 中，， 的平分线 ， 相交于点 ，，， 的周长 ，则  的长为 

A.  B.  C.  D. 



第4题图 第5题图

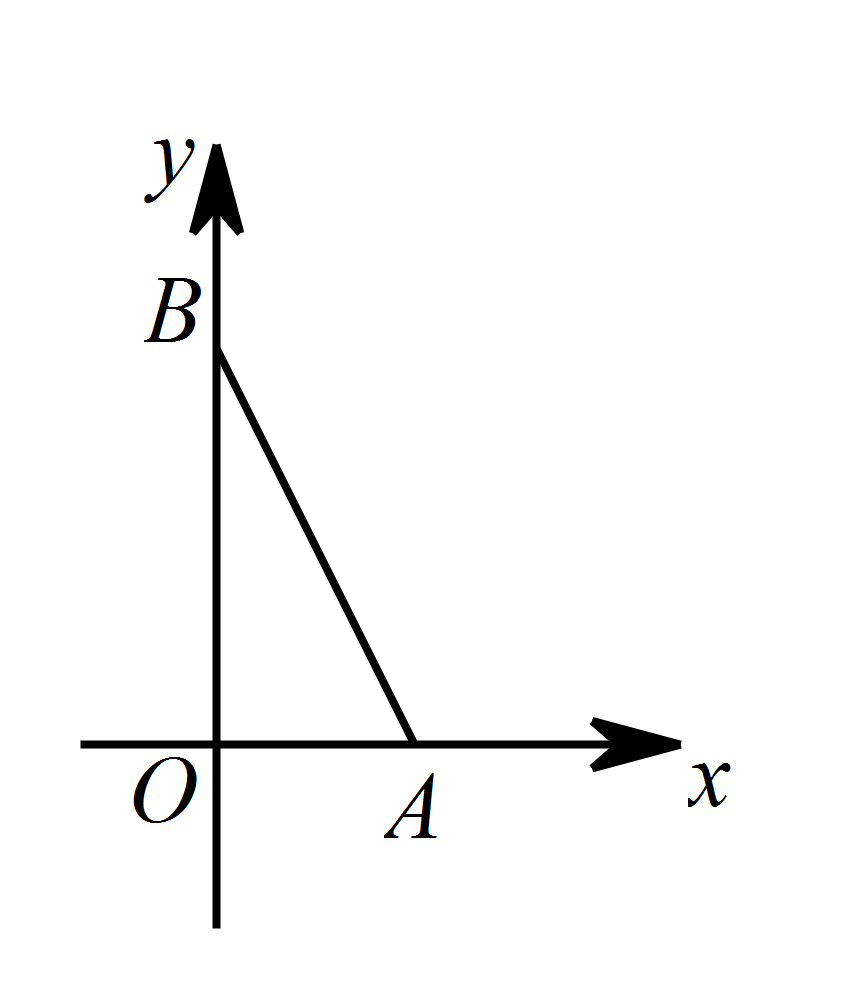
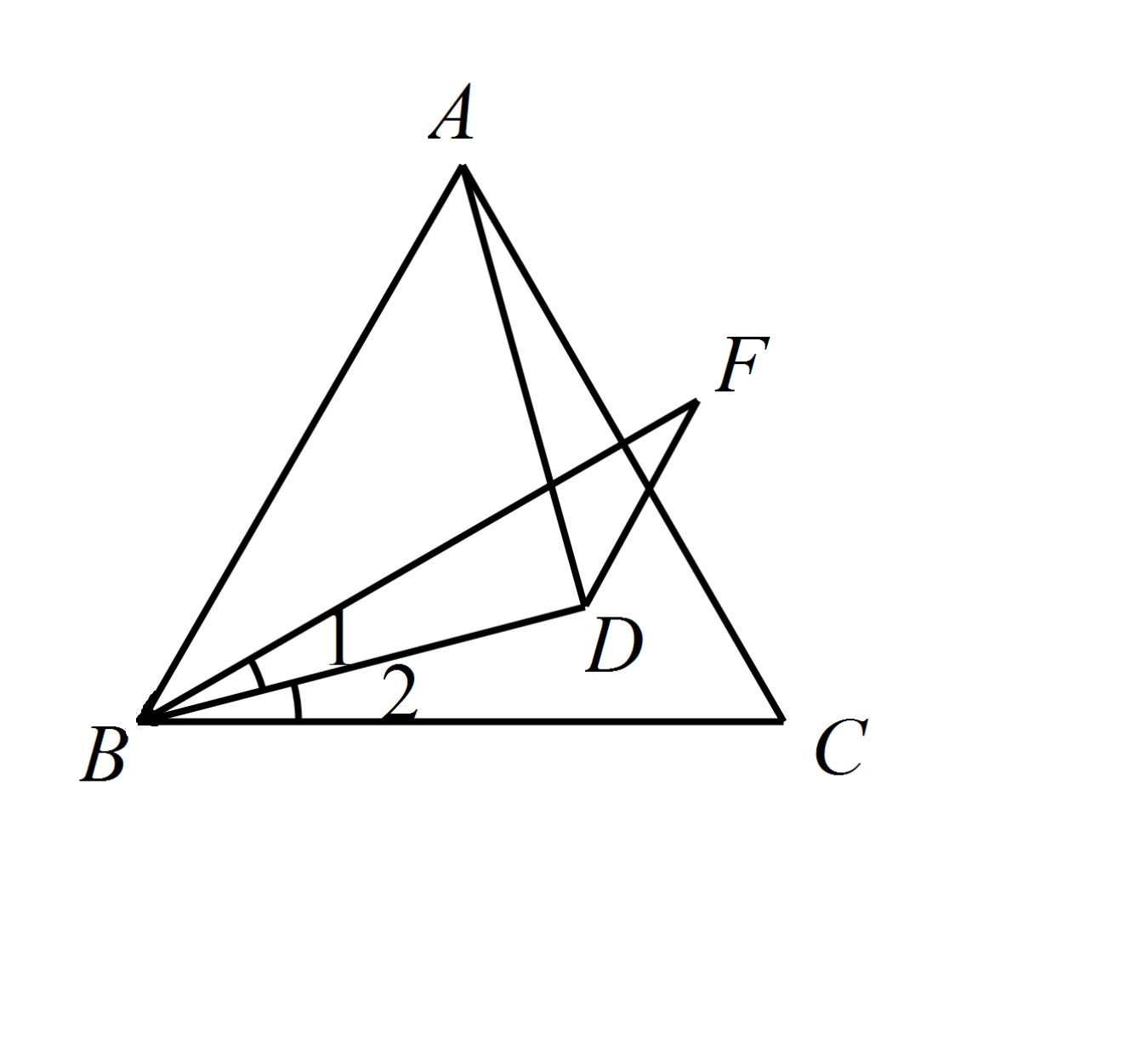
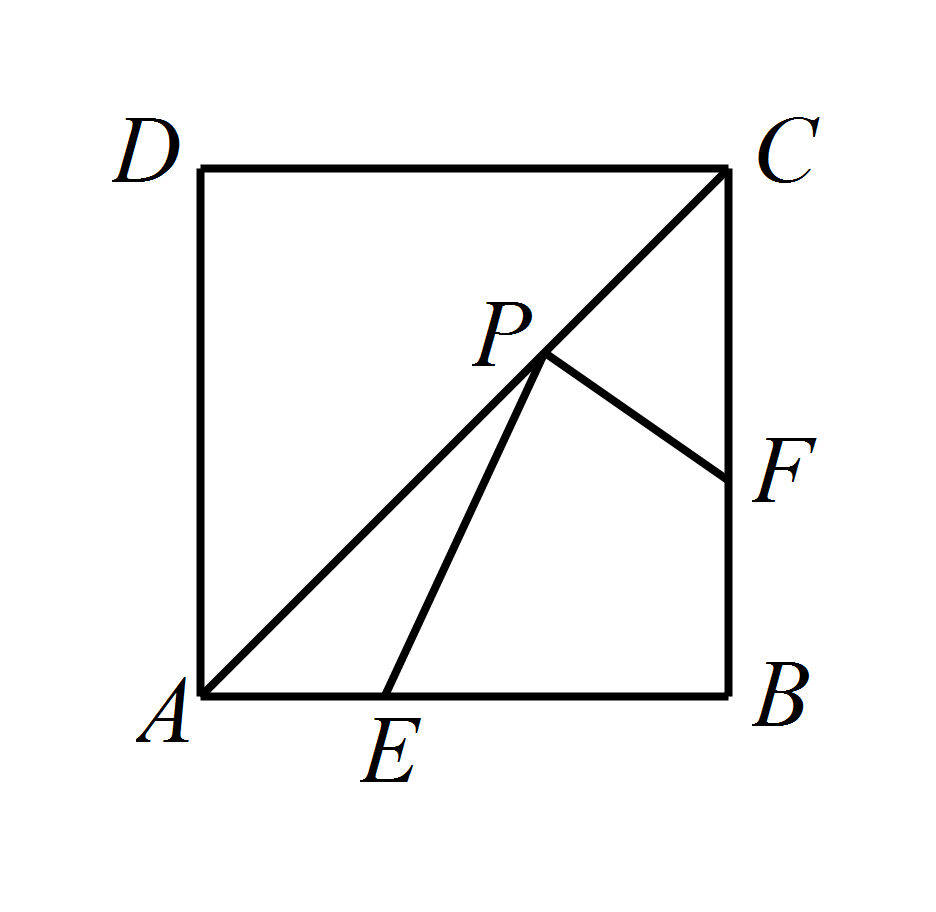
5. 如图，等腰三角形  的底边  长为 ，面积是 ，腰  的垂直平分线  分别交 ， 边于 ， 点，若点  为  边的中点，点  为线段  上一动点，则  周长的最小值为 

A.  B.  C.  D. 

**二、填空题**

6. 平面直角坐标系中，已知 ，．若在坐标轴上取点 ，使  为等腰三角形，则满足条件的点  的个数是   个．

7. 在平面直角坐标系中，点 ，，以  为斜边作等腰直角 ，则点  坐标为  ．

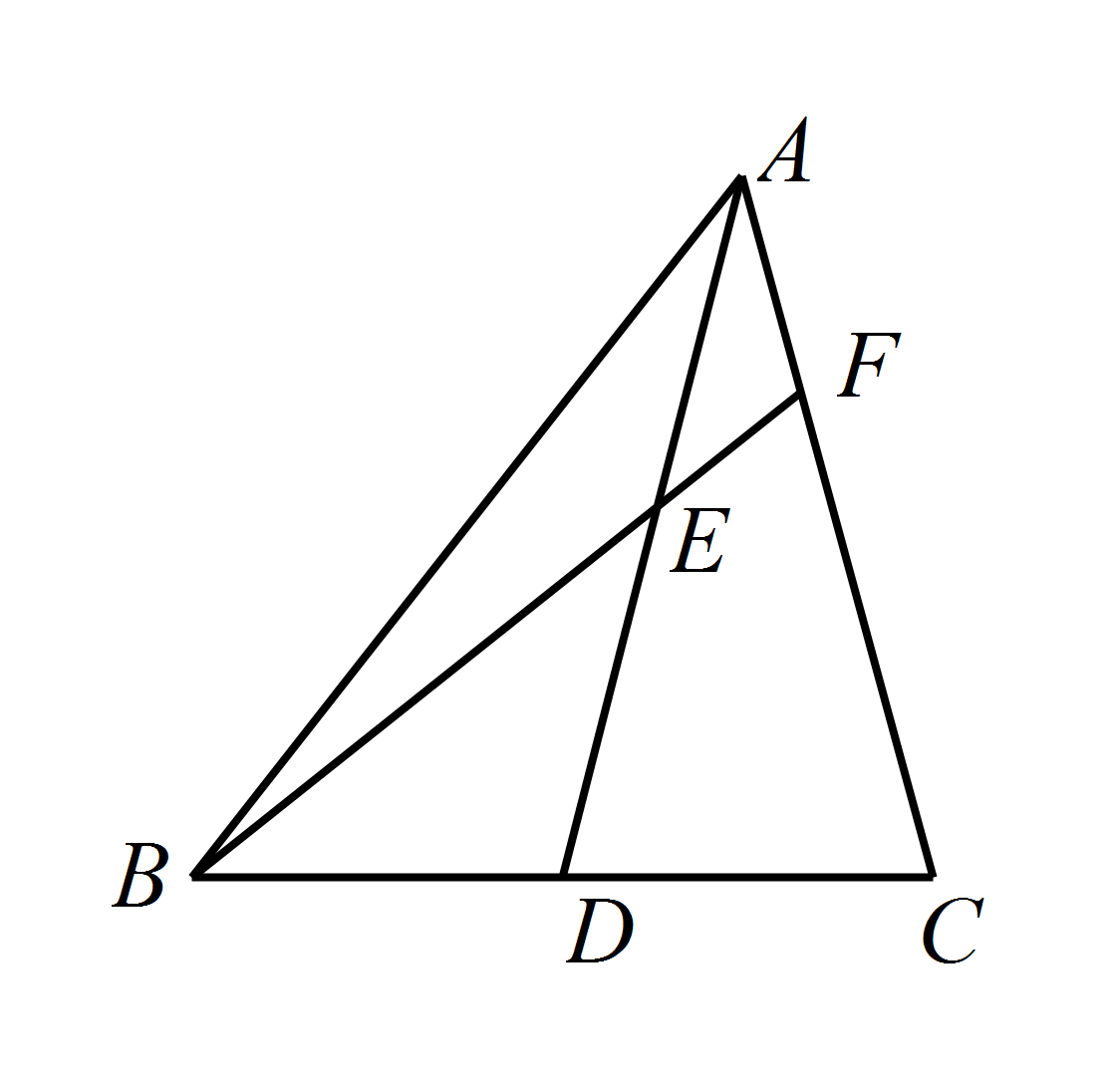


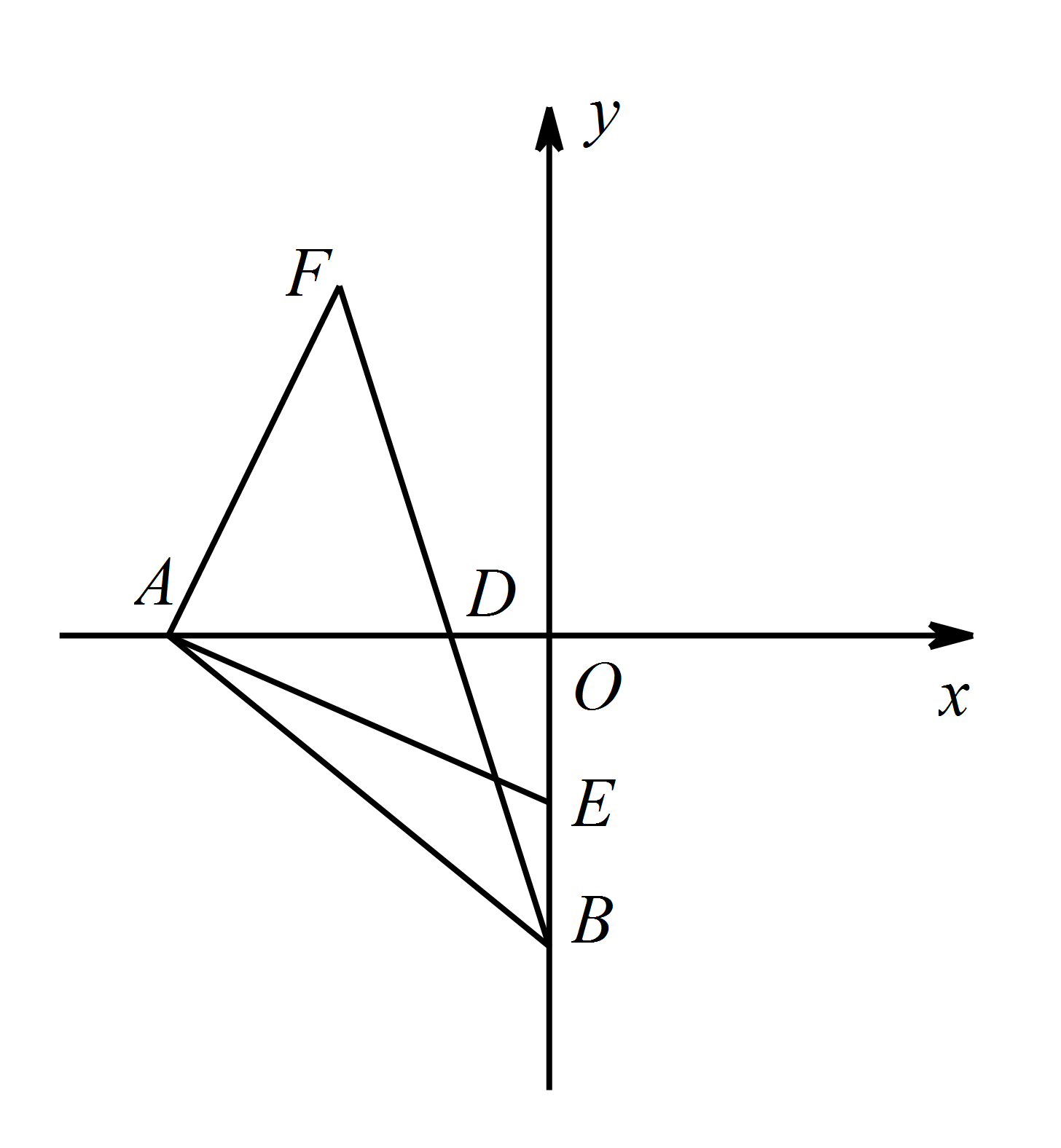
第7题图 第8题图 第9题图

8. 如图， 为等边三角形  内一点，，，，则  的度数为  ．

9.如图，正方形  的面积是 4，，， 分别是 ，， 上的动点， 的最小值等于  ．

**三、解答题**

10. 已知：在  中， 是  边上的中线， 是  上一点，且 ，延长  交  于 ，求证：．



11. 平面直角坐标系中，点 ，点 ，已知 ， 满足 ；

    （1）求点  、点  的坐标；

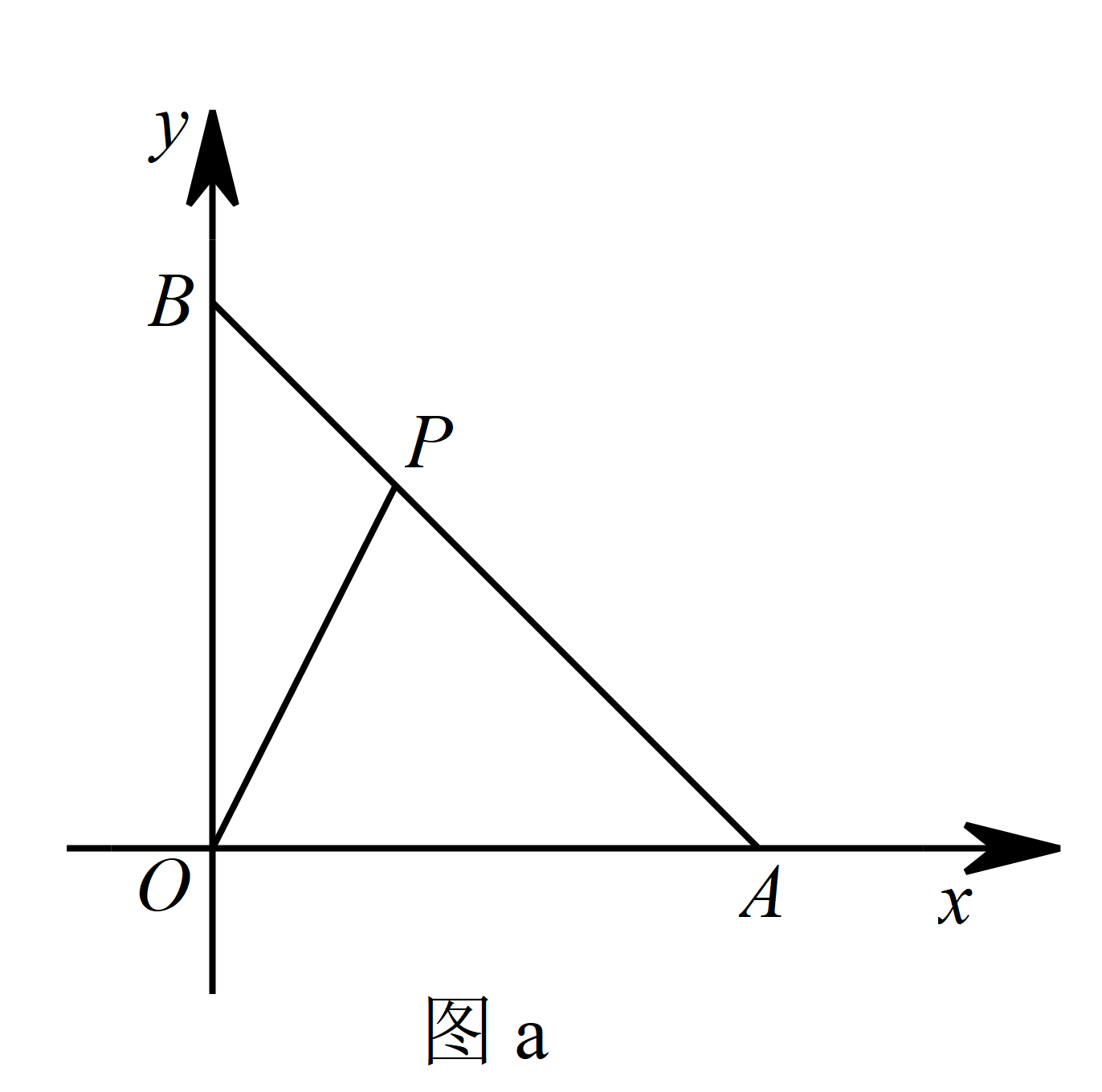
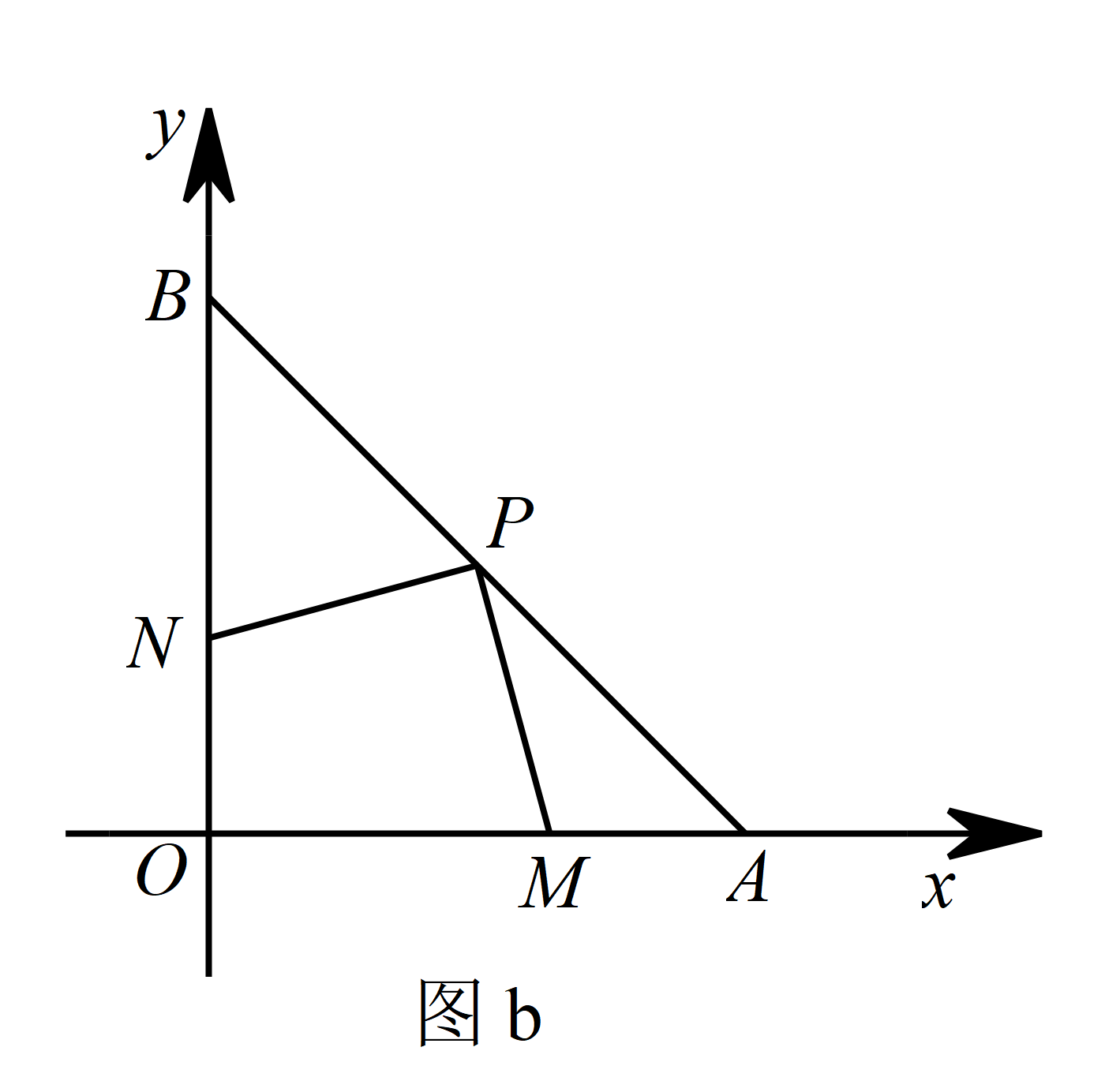
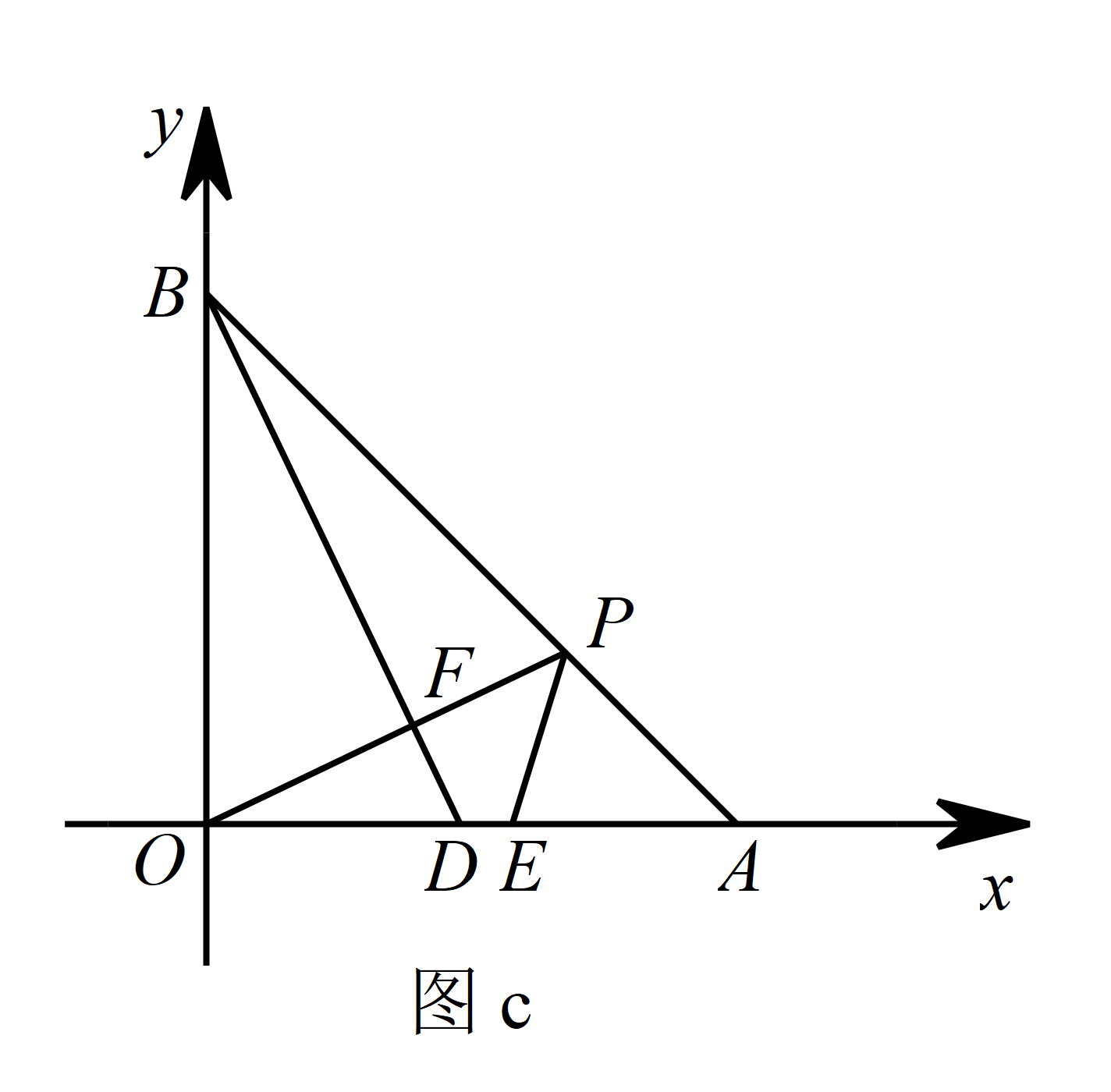
    （2）如图 ，点  为线段  上一点，连接 ，过  作 ，且 ，连接  交  轴于点 ，若点 ，求点  的坐标；

12. 如图a，在平面直角坐标系中，， 坐标分别为 ，， 为线段  上的一点．

（1）如图a，若 ，求  的坐标；

（2）如图b，若  为  的中点，点 ， 分别是 ， 边上的动点，点  从顶点 ，点  从顶点  同时出发，且它们的速度都为 ，则在 ， 运动的过程中，线段 ， 之间有何关系?并证明；

（3）如图c，若  为线段  上异于 ， 的任意一点，过  点作 ，交 ， 分别于 ， 两点， 为  上一点，且 ，试判断线段  与  的数量关系，并说明理由．



12.3 角的平分线的性质 答案

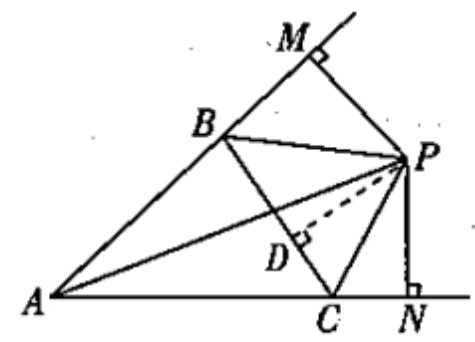
**第一部分**

1. A 2. D 3. B

**第二部分**

4.  5.  6.  7. 150°

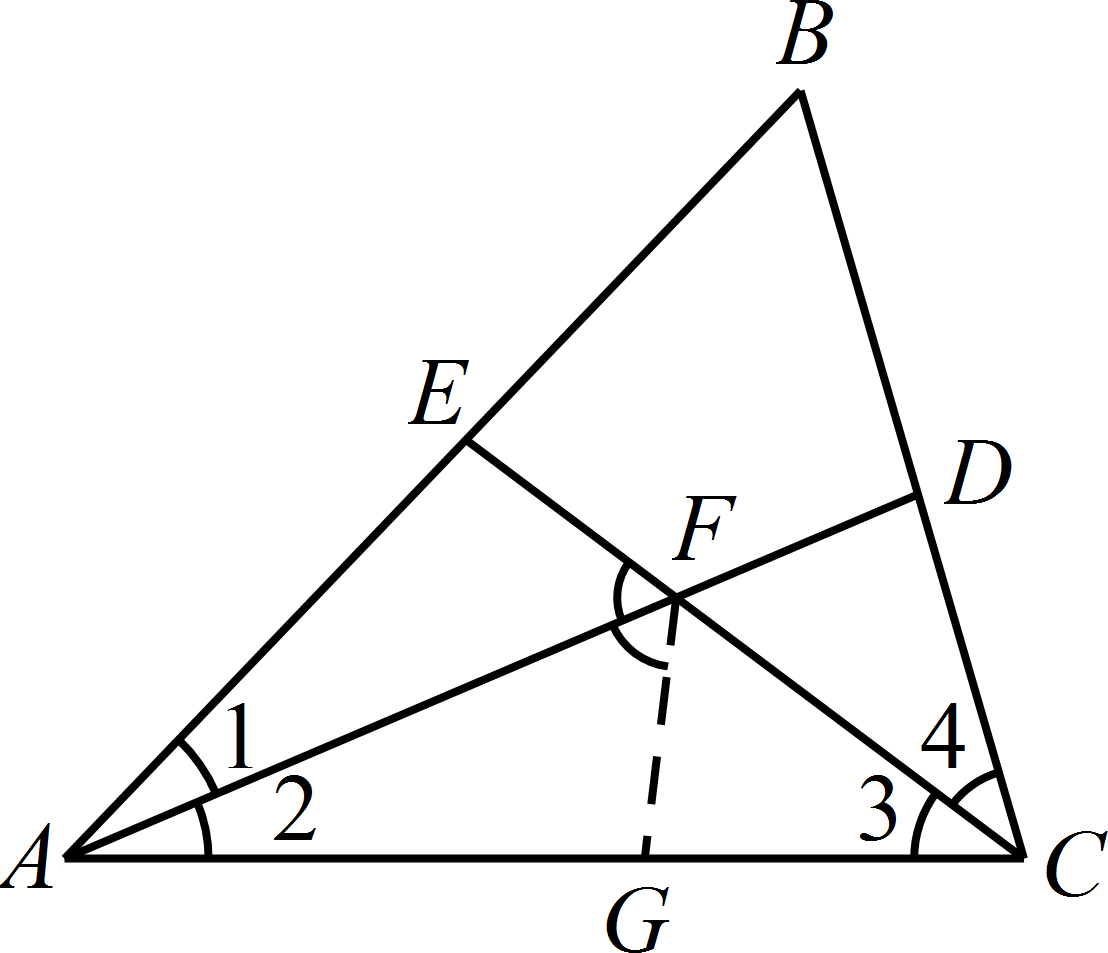
**第三部分**

8. 如答图，作  于点 ．

 是  的外角平分线，，，

，同理，， ，又 ，，  平分 ．

9. ．

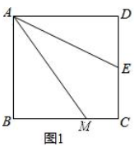
如图，在  上截取 ，连接  .

  是  的平分线， ．

 ，  . ，． ， 是  的平分线，

 . ， . ． ， 为公共边，

 . ．  .

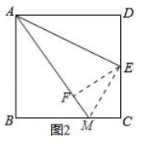


10. 提示：先证明 ，再推出 ．

11. （1） 如图  所示：

 与  的数量关系：，理由如下：

   ，   平分 ，

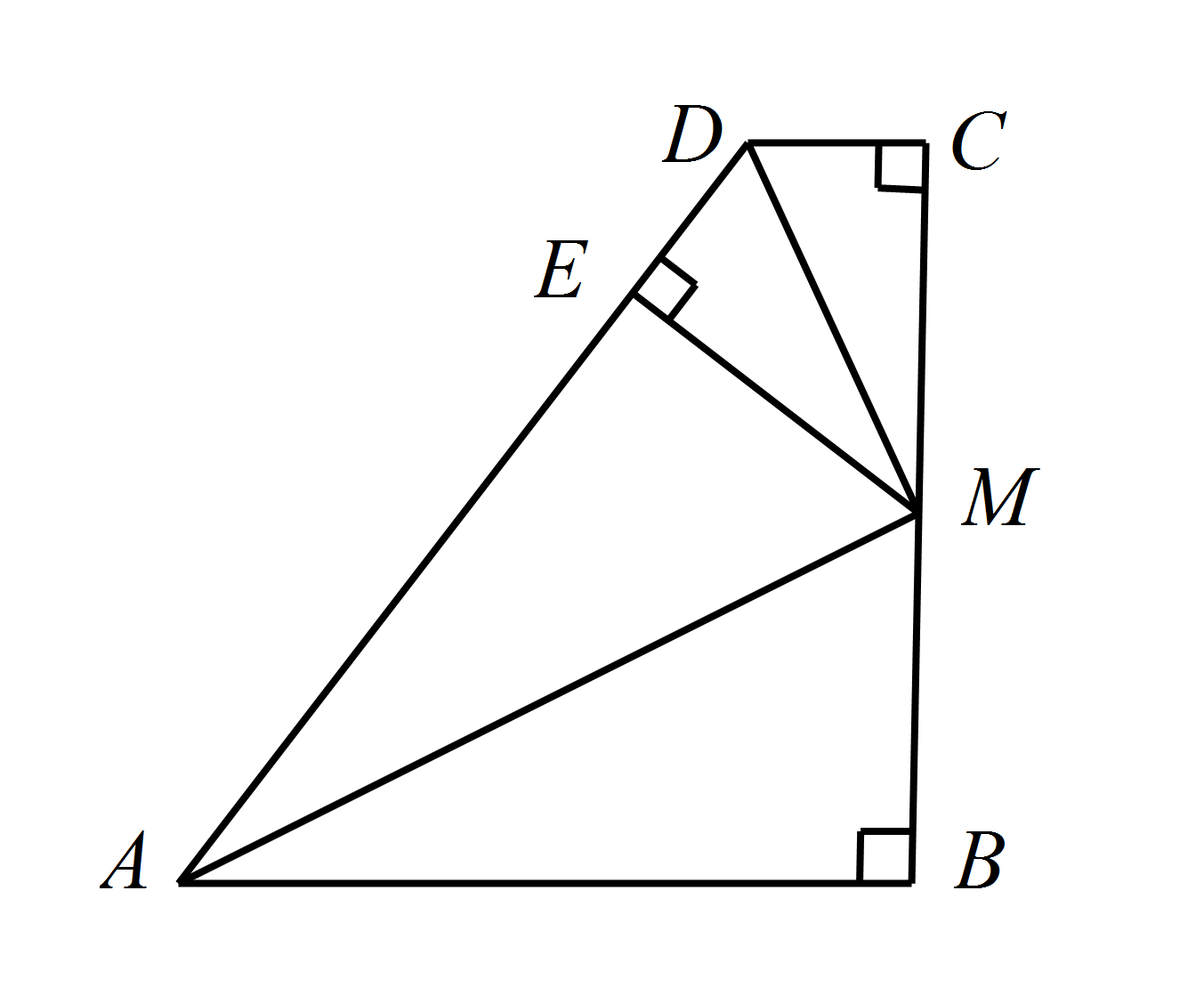
  ，  ．

      （2） 如图  所示：过点  作  交  于点 ，连接 ．  平分 ，，，

，又  是  的中点， ， ，，在  和  中，

 ，

，又 ， ．



12. 如图，过点  作  于点 ，根据角平分线定理有 ，

根据已知条件有 ，则点  在  的平分线上，即  平分 ．

13. （1） 

      （2） 由题意：在运动过程中，，在正方形  中，，，  在  和  中，

 ．

      （3）  为一定值．理由如下： ， ，， ，即 ，

， ， ，

， ， ， ，

，， ．在  和  中，

 ， ，，

，即 ，又 ， ，

，  是等腰直角三角形，

 为一定值．

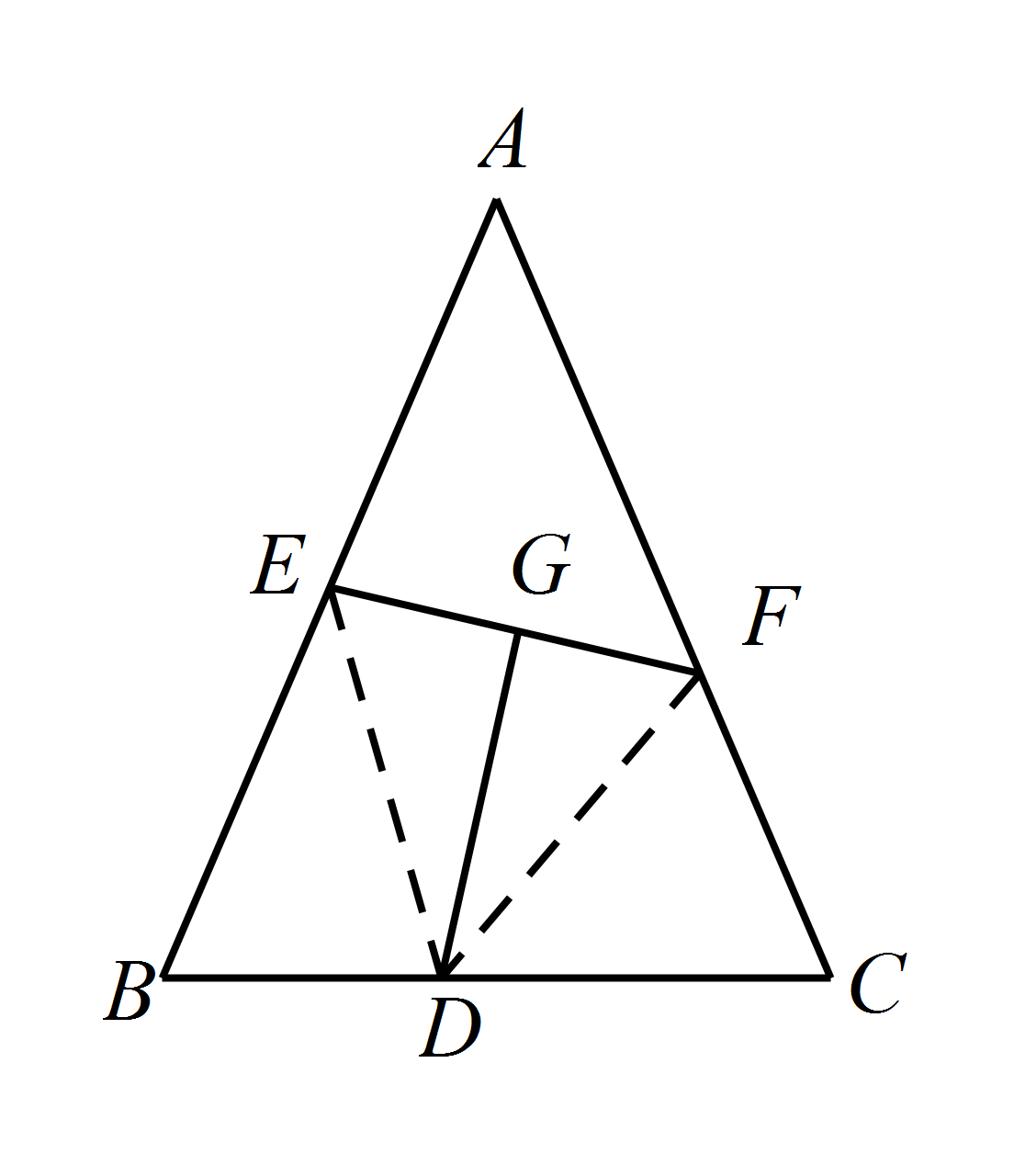
13.1 轴对称 13.2 画轴对称图形 答案

**第一部分**

1. A 2. B 3. B 4. C 5. B 6. A

**第二部分**

7.  8. 【解析】由翻折变换的性质得：，  是等边三角形，

 ， ，，

 . ．

9.  10. 

11. 如图所示，连接 ， . ，， ，

 .  .  为  的中点，

 .又  ，  .  .  垂直平分  .

12. （1）  ，  ，

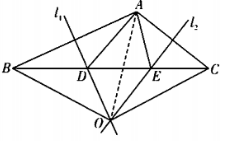
 ；

      （2） 由（）的结论可得  ，由折叠的性质可得，

，  ；

      （3） 不变，由折叠的性质可得， ，，

所以 ，不变，永远是平角的一半．

13. （1）  是  边的垂直平分线， ．  是  边的垂直平分线， ． ．

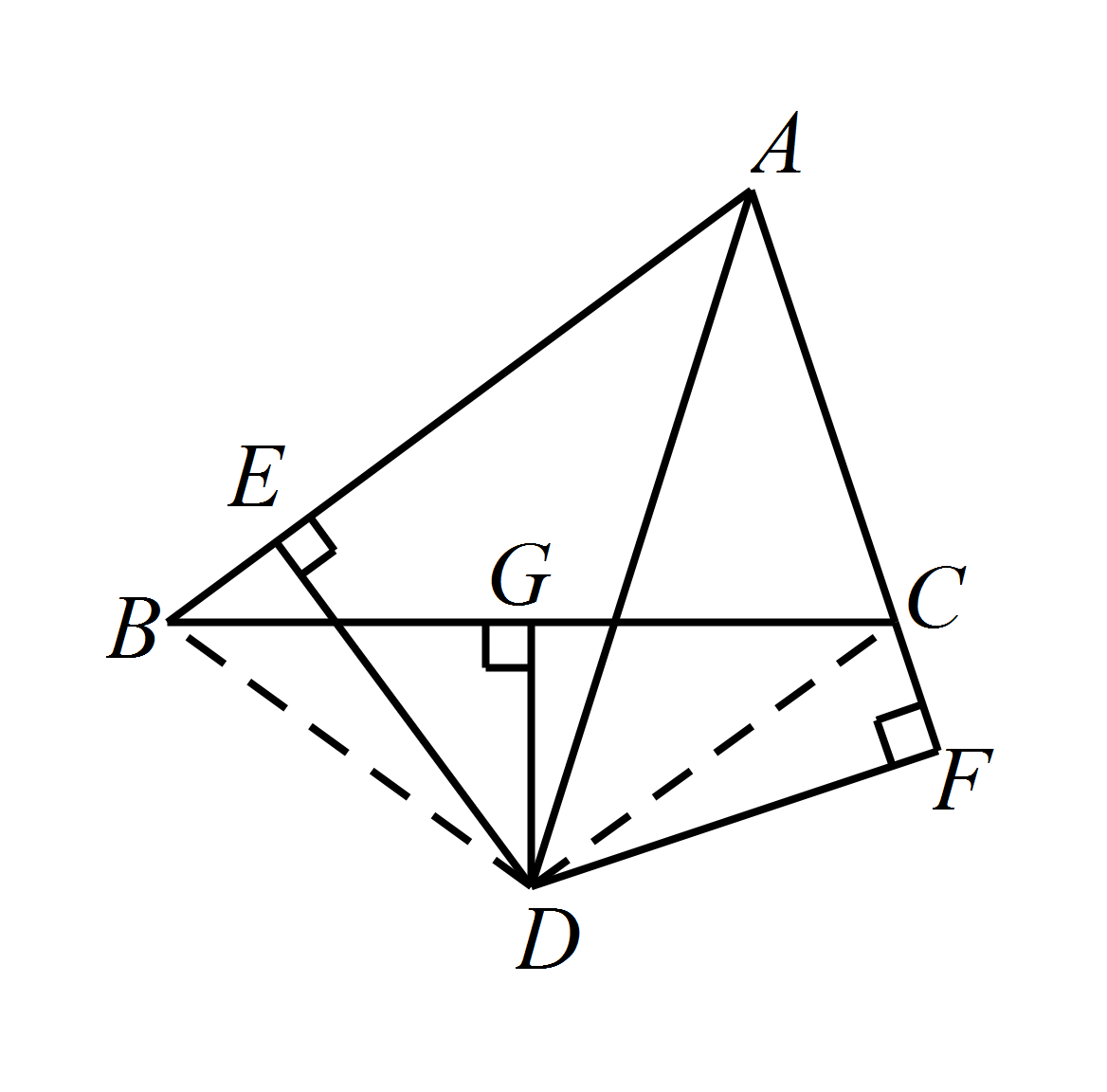
      （2） 如图，连接 ，  是  边的垂直平分线，

．  是  边的垂直平分线， ．

， ．

      （3） ．

14. （1） 如图，连接 ，，因为  平分 ，，，所以 ，因为  且平分 ，

所以 ，在  和  中， ，，所以 ，所以 ．

      （2） 由（）可知，，，易证 ，所以 ，

所以 ，所以 ，所以 

## 13.3 等腰三角形

1. A 2. B 3. D 4. B 5. C

6. 5 7. ， 8.  9. 2

10. 如图，延长  到点 ，使得 ，连接 ．

  是  边上的中线（已知），  ，

在  和  中， 

 ，  ，．

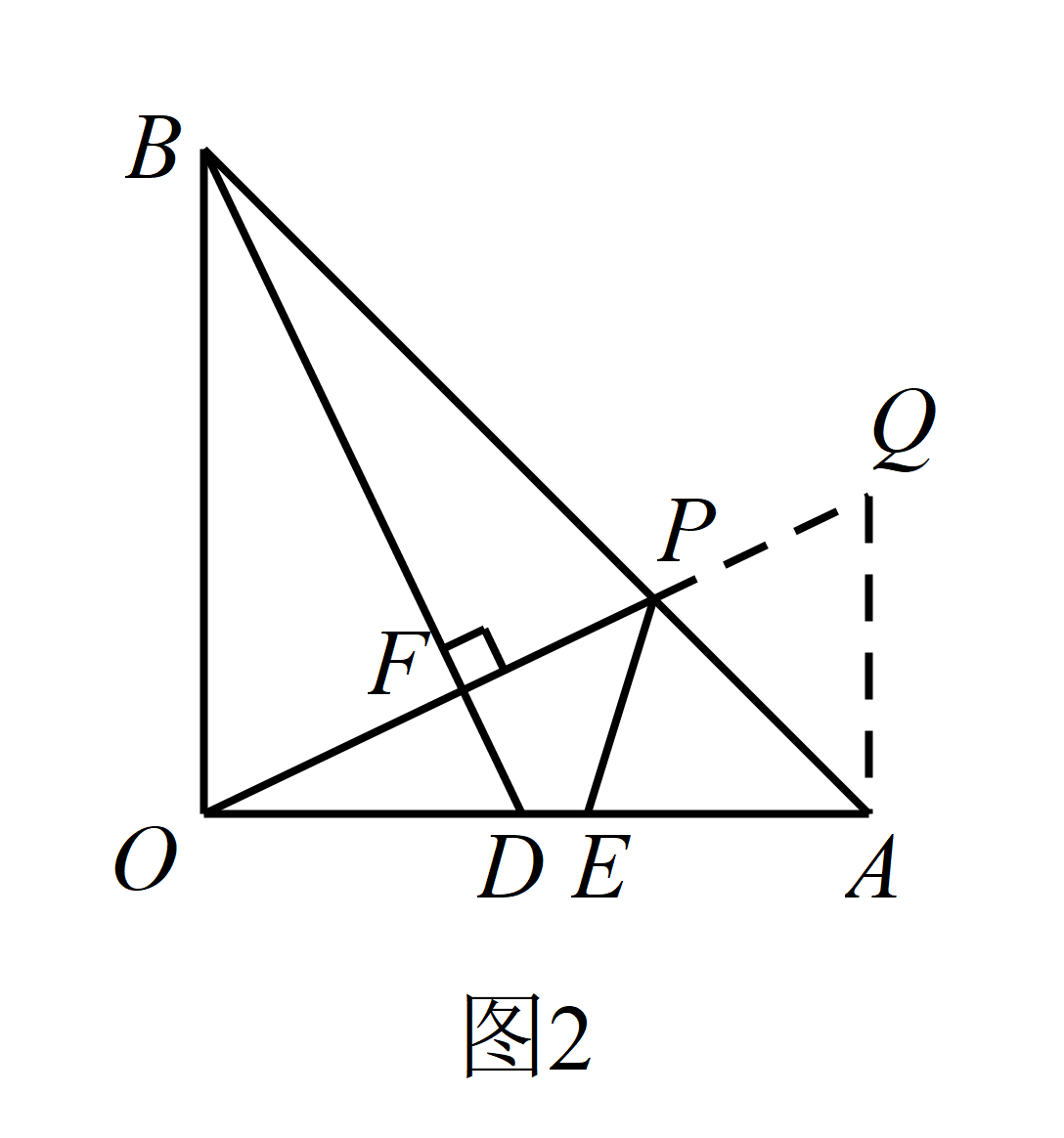
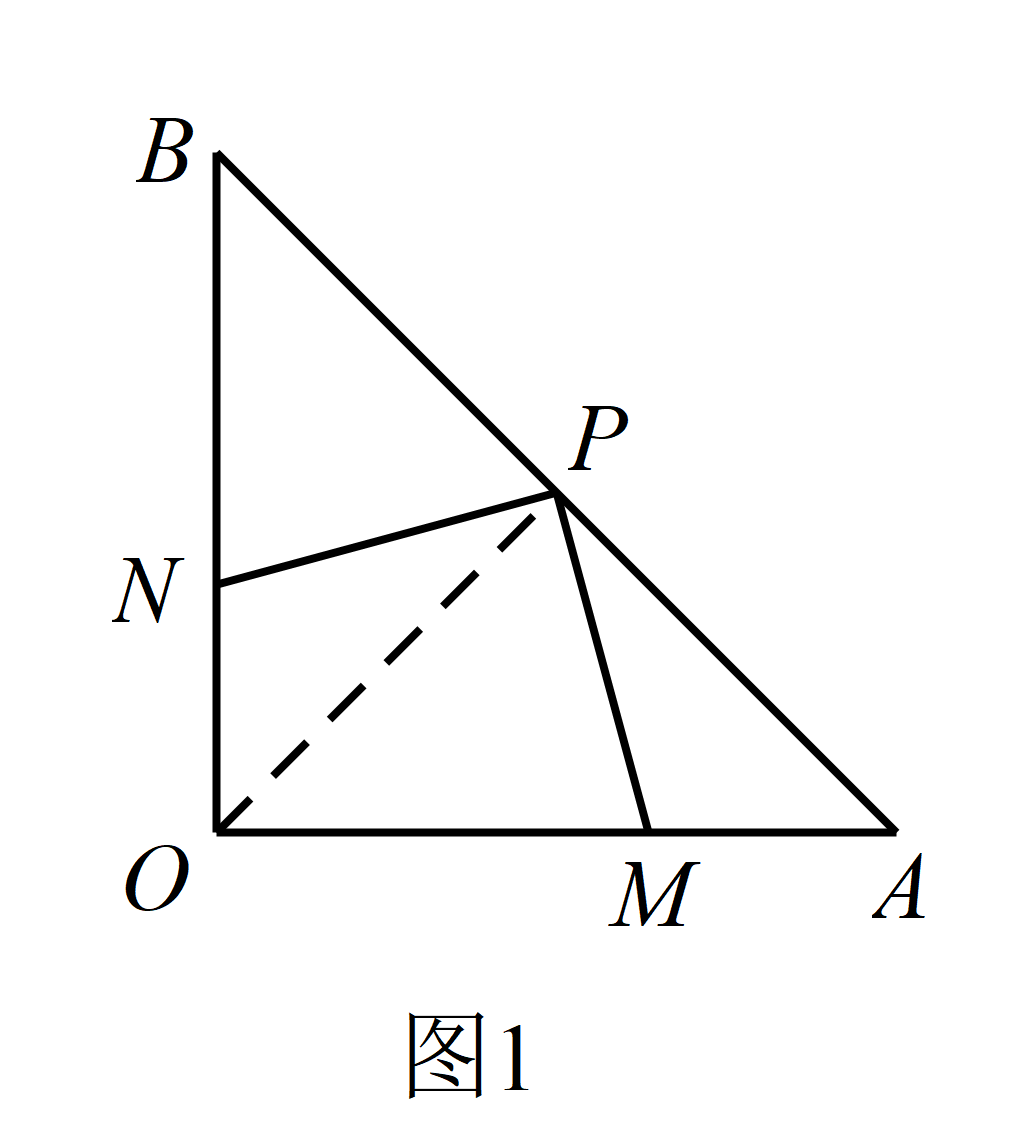
又  ，  ，  ，  ，

 ，即：，  ．

11. (1) ，  
所以 ，，所以 ，．  
      (2) 过  作  交  轴于点 ，  
易得 ，因为 ，，所以 ，在  和  中，  
  所以 ，所以 ，．因 ，所以 ，在  和  中，  所以 ，所以 ，所以 ，所以 ．

12. （1）  ，  ．

 ，  ．  ．



      （2）  且 ，证明如下：

如图 ，连接 ，在  与  中，

  ，

 ．且 ．

又  ，

 ，即 ，

 ，综上： 且 ．

      （3） ，理由：如图 ，

作  交  延长线于 ，易知 ，在  与  中，

  ，  ，，

易证 ，  ，  ．